Mechanics of Advanced and Smart Materials Journal

http://masm.araku.ac.ir

ISSN: 2783-4220

Vibration Analysis of Composite Beams with Vertically Laminated Structure Based on Timoshenko Beam Theory

Saeed Abolghasemi*

[a] Department of Engineering, Faculty of Engineering, Golestan University, Gorgan, Iran

Original Article

Use your device to scan and read the article online

Citation: Abolghasemi S. Vibration Analysis of Composite Beams with Vertically Laminated Structure Based on Timoshenko Beam Theory. Mechanics of Advanced and Smart Materials. 2026;5(4):504-526.

10.66224/masm.2026.2093181.1193

KEYWORDS

Composite beams,
Timoshenko beam theory,
Fundamental natural frequency,
Laminate configuration.

ABSTRACT

This paper introduces a vertically laminated configuration for composite beams and investigates its effect on the vibrational behavior of the beam. For this purpose, the governing equations of the problem are first derived using Timoshenko beam theory. Then, by defining the constitutive relations for two types of laminate configurations, including the conventional horizontal lamination used in composite beams and the proposed vertical lamination, the governing equations are expressed in terms of the beam displacement components, resulting in a system of coupled differential equations. Subsequently, by developing an analytical approach, the governing equations are solved simultaneously without the need for decoupling, and the natural frequencies of the beam are obtained. Natural frequency analysis results for both horizontal and vertical laminate configurations under different boundary conditions and stacking sequences are presented and compared. The results demonstrate that, unlike the horizontal laminate configuration, the natural frequency of the beam in the vertically laminated configuration can be controlled and optimized by changing the fiber angle orientation. This characteristic can be of significant importance in the design of composite structures, enabling the development of beams with desirable dynamic properties for specific applications.

Extended Abstract

1. Introduction

Composite structures, including beams, plates, and shells, are widely utilized in various engineering applications, particularly in fields where weight reduction is a critical design requirement. The primary advantage of composite materials lies in their superior strength-to-weight ratio, which makes them highly suitable for lightweight structures such as aerospace components. Typical applications of composite materials include aircraft wings and fuselage structures, unmanned aerial vehicles, helicopter rotor blades, and fuel storage pressure vessels. Composite beams are generally fabricated by stacking multiple laminae with different fiber orientations to achieve the desired mechanical performance. Owing to the anisotropic nature of laminated composites, their static and dynamic responses can be tailored and optimized by modifying the fiber arrangement and stacking sequence to meet specific design objectives. The static and dynamic analyses of composite beams have been extensively investigated by numerous researchers using various beam theories [1–22]. Over the past decades, a wide range of beam models has been developed, with the primary distinction among them being the way shear deformation—and consequently the distribution of transverse shear stresses through the beam

* Corresponding author.
E-mail address: s.abolghasemi@gu.ac.ir
DOI: 10.66224/masm.2026.2093181.1193
Received: July 05, 2026; Received in revised form: August 30, 2026; Accepted: October 06, 2026.
© Author

thickness—is considered. The classical Euler–Bernoulli beam theory, as the simplest beam model, neglects the effects of shear deformation. In contrast, the Timoshenko beam theory accounts for shear deformation by assuming a constant distribution of transverse shear strain across the beam thickness. A comparison between these two theories is presented in Ref. [23].

Previous studies on composite beam analysis have primarily focused on the conventional horizontal laminate configuration, in which the composite layers are stacked through the beam thickness. In contrast, this study investigates the free vibration behavior of composite beams with a vertical laminate configuration, in which it is constructed by placing several composite laminas side by side along the beam width, and compares their response with that of horizontally laminated beams. The governing vibration equations are derived and formulated in terms of the displacement field using the appropriate constitutive relations for each laminate configuration. An exact analytical solution is then developed to solve the coupled governing equations directly while accommodating various boundary conditions. The proposed formulation is subsequently used to determine and compare the natural frequencies of beams with both laminate configurations under different boundary conditions.

2. **Problem Formulation**

In this paper, the Timoshenko beam theory is employed to derive the governing equations for the vibration behavior of the beam. According to the Timoshenko beam theory, the displacement field is defined as

$$\begin{aligned} u(x,z,t) &= u_0(x,t) + z\phi(x,t) \\ w(x,z,t) &= w(x,t) \end{aligned} \tag{1}$$

where u_0 and w denote the axial and transverse displacements of a point on the beam midplane, respectively, and ϕ represents the rotation of the normal to the midplane. By applying Hamilton's principle, the governing equations of motion for the vibration behavior of the beam are derived as follows:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial N_x}{\partial x} - \rho A\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - \rho I_1\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \\ &\frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} + \rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \\ &\frac{\partial M_x}{\partial x} - Q_{xz} - \rho I_1\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - \rho I_2\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

where ρ and A denote the density and the cross-sectional area of the beam, respectively, and the stress resultants are defined as follows:

$$(N_x, M_x) = b\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_x(1,z)dz\,, \qquad Q_{xz} = b\int_{-h/2}^{h/2}\tau_{xz}dz \tag{3}$$

Furthermore, the first and second moments of the cross-sectional area are defined as follows:

$$(I_1, I_2) = b\int_{-h/2}^{h/2}(z, z^2)dz \tag{4}$$

2.1. Analysis of Beams with a Horizontal Laminate Configuration

The stress–strain relationship for each lamina of a beam with a horizontal laminate configuration can be expressed in the global coordinate system as follows:

$$\begin{bmatrix}\sigma_x \\ \tau_{xz}\end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix}\overline{Q_{11}} & 0 \\ 0 & \overline{Q_{55}}\end{bmatrix}_k \begin{bmatrix}\epsilon_x \\ \gamma_{xz}\end{bmatrix}_k \tag{5}$$

where k denotes the layer number. The stress resultants can be expressed in terms of the displacement field components as follows:

$$\begin{bmatrix}N_x \\ M_x\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A_{11} & B_{11} \\ B_{11} & D_{11}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial u_0}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial x}\end{bmatrix}, \qquad Q_{xz} = A_{55}\gamma_{xz} \tag{6}$$

where the stiffness coefficients of the composite beam are calculated as follows:

$$(A_{11}, B_{11}, D_{11}) = b\left(\sum_{k=1}^{n}\int_{h_k}^{h_{k+1}}\overline{Q_{11}}_k\,(1,z,z^2)dz\right), \qquad A_{55} = k_s b\left(\sum_{k=1}^{n}\int_{h_k}^{h_{k+1}}\overline{Q_{55}}_k\,dz\right) \tag{7}$$

In Eq. (7), k_s is the shear correction factor employed in the Timoshenko beam theory. Finally, by substituting the stress resultants given in Eq. (6) into the differential equations in Eq. (2), the governing equations can be expressed in terms of the displacement field as follows:

$$\begin{aligned}
&A_{11}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+B_{11}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}+\rho A\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}+\rho I_1\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}=0\\
&k_s A_{55}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)-\rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0\\
&B_{11}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+D_{11}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}-k_s A_{55}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\phi\right)-\rho I_2\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}-\rho I_1\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}=0
\end{aligned} \tag{8}$$

2.2. Analysis of Beams with a Horizontal Laminate Configuration

the stress–strain relationship for each lamina of a beam with a vertical laminate configuration can be expressed in the global coordinate system as follows:

$$\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \tau_{xz}\end{bmatrix}_k=\begin{bmatrix}\overline{Q_{11}} & \overline{Q_{16}}\\ \overline{Q_{16}} & \overline{Q_{66}}\end{bmatrix}_k\begin{bmatrix}\epsilon_x\\ \gamma_{xz}\end{bmatrix}_k \tag{9}$$

The stress resultants for this type of beam can be expressed in terms of the displacement field components as follows:

$$N_x=A_{11}\frac{\partial u_0}{\partial x}+A_{16}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\phi\right),\qquad M_x=D_{11}\frac{\partial \phi}{\partial x},\qquad Q_{xz}=k_s\left(A_{16}\frac{\partial u_0}{\partial x}+A_{66}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\phi\right)\right) \tag{10}$$

In Eq. (10), the stiffness coefficients of the composite beam are calculated according to the laminate configuration as follows:

$$(A_{11},A_{16})=\sum_{k=1}^{n}b_k\int_{-h/2}^{h/2}\left(\overline{Q_{11}}_k,\overline{Q_{16}}_k\right)dz,\quad D_{11}=\sum_{k=1}^{n}b_k\int_{-h/2}^{h/2}\overline{Q_{11}}_k z^2\,dz \tag{11}$$

where b_k denotes the width of the k-th lamina. Finally, by substituting the stress resultants given in Eq. (11) into Eq. (2), the governing equations for the vibration behavior of the beam in this case are obtained as follows:

$$\begin{aligned}
&A_{11}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+A_{16}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)-\rho A\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}-\rho I_1\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}=0\\
&k_s A_{66}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)+k_s A_{16}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}-\rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0\\
&D_{11}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}-k_s A_{16}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\phi+\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)-\rho I_2\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}-\rho I_1\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}=0
\end{aligned} \tag{12}$$

2.3. Solution Method

In this section, the solution procedure for Eqs. (8) and (12), which correspond to the horizontal and vertical laminate configurations, respectively, is presented. The solution procedure is identical for both cases. To solve these equations, the method of separation of variables is employed, whereby the beam displacement field is first decomposed into its spatial and temporal components as follows:

$$u_0(x,t)=U_0(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t},\qquad w(x,t)=W(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t},\qquad \phi(x,t)=\Phi(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \tag{13}$$

In the next step, the solution of displacement components is expressed as:

$$W(x)=a_1e^{\lambda x},\qquad \Phi(x)=b_1e^{\lambda x},\qquad U_0(x)=c_1e^{\lambda x} \tag{14}$$

Substituting the assumed solution into Eqs. (8) and (12), and simplifying the resulting expressions, yields the following system of equations in matrix form for horizontal and vertical laminate configurations:

$$\begin{bmatrix}0 & B_{11}\lambda^2 & A\rho\omega^2+A_{11}\lambda^2\\ A\rho\omega^2+A_{55}k_s\lambda^2 & k_sA_{55}\lambda & 0\\ -k_sA_{55}\lambda & \rho I_2\omega^2+D_{11}\lambda^2-k_sA_{55} & B_{11}\lambda^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\ b_1\\ c_1\end{bmatrix}=[0] \tag{15}$$

$$\begin{bmatrix}A_{16}\lambda^2 & A_{16}\lambda & \rho A\omega^2+A_{11}\lambda^2\\ \rho A\omega^2+A_{66}k_s\lambda^2 & k_sA_{66}\lambda & k_sA_{16}\lambda^2\\ -k_sA_{66}\lambda & \rho I_2\omega^2+D_{11}\lambda^2-k_sA_{66} & -k_sA_{16}\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\ b_1\\ c_1\end{bmatrix}=[0] \tag{16}$$

As can be seen, the system of equations obtained is homogeneous. Therefore, for a nontrivial solution to exist, the determinant of the coefficient matrix must vanish. By setting this determinant equal to zero, the characteristic equation of the problem is obtained in the form of a sixth-order polynomial in λ , as follows:

$$\left|d_{ij}\right| = 0 \rightarrow p_6\lambda^6 + p_4\lambda^4 + p_2\lambda^2 + p_0 = 0 \tag{17}$$

Since the characteristic equation given in Eq. (17) generally possesses six roots, the assumed solution presented in Eq. (14) can be expanded as follows:

$$W(x) = \sum_{i=1}^{6} a_i e^{\lambda_i x}, \quad \Phi(x) = \sum_{i=1}^{6} b_i e^{\lambda_i x}, \quad U_0(x) = \sum_{i=1}^{6} c_i e^{\lambda_i x} \tag{18}$$

Finally, the beam's boundary conditions are applied, which leads to a homogeneous system of algebraic equations, in the form $[B]\{C\} = 0$, where $\{C\} = \{a_1, a_2, \dots, a_6\}^T$ is the vector of unknown constants and $[B]$ is the coefficient matrix, whose elements depend on the beam boundary conditions. For a nontrivial solution to exist, the determinant of the matrix $[B]$ must vanish. This condition yields an eigenvalue equation with infinitely many roots. By solving this equation and determining its roots, the natural frequencies of the beam, ω_i and the corresponding mode shapes are obtained.

3. Results

The results obtained show that unlike the horizontal laminate configuration, in which increasing the fiber orientation angle consistently leads to a reduction in the natural frequency, the vertical laminate configuration allows the natural frequency to be maximized by selecting an appropriate fiber orientation angle. In some cases, this maximum natural frequency differs significantly from that of the horizontal configuration. The optimum fiber orientation angle for vertically laminated beams depends on both the boundary conditions and the laminate stacking sequence. Table 1 presents the optimum fiber orientation angle and the corresponding maximum natural frequency for vertically laminated composite beams under various boundary conditions and stacking sequences. The table also compares the maximum natural frequencies of the horizontal and vertical laminate configurations in terms of percentage difference. The largest difference, 26.52%, is observed for the clamped–clamped beam with the $[\theta/-\theta]$ laminate stacking sequence.

Table 1. Optimum Fiber Angles and Corresponding Maximum Natural Frequencies of Composite Beams with a Vertical Laminate Configuration

Stacking sequence	Boundary condition								
	Pinned-Pinned			Clamped-Free			Clamped-Clamped		
	$\theta°_{max}$	$\bar{\omega}_{max}$	Relative difference (%)	$\theta°_{max}$	$\bar{\omega}_{max}$	Relative difference (%)	$\theta°_{max}$	$\bar{\omega}_{max}$	Relative difference (%)
$[\theta]$	0	8.4267	0	0	3.4908	0	28	11.1183	1.44
$[\theta/-\theta]$	17	9.5472	13.29	13.5	3.6781	5.37	26.5	16.6894	52.26
$[0/\theta]$	27	9.1761	8.89	19.5	3.5883	2.79	43	15.3230	39.80
$[0/\theta/90°]$	22.5	7.8242	15.34	12.5	3.0594	31.81	41.5	13.1072	38.44

4. Conclusion

This study presented an analytical free vibration analysis of composite beams with horizontal and vertical laminate configurations based on the Timoshenko beam theory. The proposed solution directly solves the coupled governing equations while accommodating various boundary conditions. The results show that vertically laminated beams consistently exhibit higher fundamental natural frequencies than horizontally laminated beams. Unlike the horizontal configuration, which always achieves its maximum natural frequency at zero fiber orientation angle, the vertical configuration possesses an optimum fiber orientation angle that maximizes the natural frequency. The optimum fiber orientation angles and the corresponding maximum natural frequencies were determined for various boundary conditions and laminate stacking sequences. Among the cases considered, the clamped–clamped beam exhibited the highest natural frequencies, while the largest difference between the horizontal and vertical laminate configurations was observed for the $[\theta/-\theta]$ stacking sequence under clamped–clamped boundary conditions. In contrast, the clamped–free beam exhibited the lowest natural frequencies. These findings demonstrate the significant influence of laminate configuration on the vibration characteristics of composite beams and highlight the potential advantages of the vertical laminate arrangement in structural design.

مکانیک مواد پیشرفته و هوشمند

مجله علمی مکانیک مواد پیشرفته و هوشمند

شاپا: ۴۲۲۰-۲۷۸۳

تحلیل ارتعاشات تیرهای کامپوزیتی با ساختار لایه‌ای عمودی بر اساس تئوری تیر تیموشنکو

سعید ابوالقاسمی*

استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی گرگان، دانشگاه گلستان، گرگان، ایران، s.abolghasemi@gu.ac.ir

واژگان کلیدی

تیرهای کامپوزیتی، تئوری تیموشنکو، فرکانس طبیعی اصلی، آرایش لایه‌ای، روابط ساختاری.

تاریخ دریافت: ۱۴۰۵/۰۴/۱۴

تاریخ بازنگری: ۱۴۰۵/۰۶/۰۸

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۵/۰۷/۱۴

چکیده

این مقاله به معرفی یک آرایش لایه‌ای عمودی برای تیرهای کامپوزیتی و بررسی اثر آن بر رفتار ارتعاشی تیر می‌پردازد. بدین منظور ابتدا معادلات حاکم بر مسئله با استفاده از تئوری تیموشنکو به دست می‌آیند. سپس با تعریف روابط ساختاری برای دو نوع آرایش لایه‌ای، شامل آرایش افقی متداول در تیرهای کامپوزیتی و آرایش عمودی پیشنهادی، معادلات حاکم برحسب میدان جابجایی تیر نوشته شده که به‌صورت یک دستگاه معادلات دیفرانسیل کوپل شده می‌باشند. در ادامه با توسعه یک روش تحلیلی، معادلات حاکم بدون نیاز به جداسازی و به‌صورت هم‌زمان حل شده و فرکانس‌های طبیعی تیر محاسبه می‌شوند. نتایج حاصل از تحلیل فرکانس طبیعی برای دو آرایش لایه‌ای افقی و عمودی و برای شرایط مرزی و لایه چینی‌های مختلف، ارائه و با یکدیگر مقایسه می‌شوند. نتایج نشان می‌دهند که در آرایش لایه‌ای عمودی، برخلاف آرایش افقی، امکان کنترل و بهینه‌سازی فرکانس طبیعی تیر از طریق تغییر زاویه الیاف وجود دارد. این ویژگی می‌تواند از دیدگاه طراحی سازه‌های کامپوزیتی اهمیت ویژه‌ای داشته باشد و امکان دستیابی به تیرهایی با ویژگی‌های دینامیکی مطلوب برای کاربردهای خاص را فراهم سازد.

۱-مقدمه

سازه‌های کامپوزیتی، شامل تیرها، صفحات و پوسته‌ها، به‌طور گسترده در کاربردهای مختلف مهندسی و به‌ویژه در حوزه‌هایی که کاهش وزن به‌عنوان یک الزام اساسی در طراحی مطرح است، مورد استفاده قرار می‌گیرند. مهم‌ترین ویژگی مواد کامپوزیتی، نسبت استحکام به وزن بالای آن‌ها است که این مواد را برای استفاده در سازه‌های سبک، مانند سازه‌های هوافضا، بسیار مناسب می‌سازد. ازجمله کاربردهای رایج مواد کامپوزیتی می‌توان به بال و بدنه هواپیماها، وسایل نقلیه هوایی بدون سرنشین، پره‌های روتور بالگردها و نیز مخازن تحت فشار مورد استفاده در ذخیره‌سازی سوخت و انواع سیالات اشاره کرد. تیرهای کامپوزیتی معمولاً از کنار هم قرار دادن چندین لایه کامپوزیتی که زاویه الیاف در هرلایه می‌تواند متفاوت باشد، ساخته می‌شوند. هدف از این کار، رسیدن به خواص مکانیکی مطلوب برای کاربرد موردنظر است. به دلیل ماهیت ناهمسانگرد کامپوزیت‌های لایه‌ای، رفتار استاتیکی و دینامیکی این سازه‌ها را می‌توان با تغییر زاویه الیاف و نیز توالی لایه‌چینی، متناسب با اهداف طراحی خاص، تنظیم و بهینه‌سازی کرد، اما درعین‌حال این رفتار ناهمسانگرد در کامپوزیت‌ها، فرایند تحلیل آن‌ها را نسبت به مواد همسانگرد یا ایزوتروپیک به مراتب پیچیده‌تر می‌کند.

تحلیل استاتیکی و دینامیکی تیرهای کامپوزیتی توسط پژوهشگران مختلف و با استفاده از تئوری‌های گوناگون به‌طور گسترده

* نویسنده مسئول؛

آدرس پست الکترونیک: s.abolghasemi@gu.ac.ir

مورد مطالعه قرار گرفته است [۱–۲۲]. در طول سال‌های گذشته، مدل‌های متعددی برای تحلیل تیر توسعه یافته‌اند که تفاوت اصلی میان آن‌ها به نحوه در نظر گرفتن تغییرشکل برشی و درنتیجه توزیع تنش‌های برشی در راستای ضخامت تیر مربوط می‌شود. تئوری کلاسیک تیر اویلر–برنولی، به‌عنوان ساده‌ترین مدل، اثرات تغییرشکل برشی را نادیده می‌گیرد؛ درحالی‌که تئوری تیر تیموشنکو با فرض توزیع ثابت کرنش برشی در ضخامت تیر، اثر تغییرشکل برشی را در نظر می‌گیرد. مقایسه‌ای میان این دو تئوری در مرجع [۲۳] ارائه شده است. به‌منظور رفع محدودیت‌های تئوری‌های کلاسیک، به‌ویژه در حوزه تحلیل تیرهای ضخیم، ارتعاشات با فرکانس بالا و مسائل مربوط به انتشار موج، تئوری‌های مختلف تغییرشکل برشی مرتبه بالاتر ارائه شده‌اند. این تئوری‌های پیشرفته، تغییرات تنش برشی در راستای ضخامت تیر را با دقت بیشتری مدل‌سازی می‌کنند؛ بااین‌حال، استفاده از آن‌ها منجر به پیچیده‌تر شدن معادلات حاکم و روش‌های حل می‌شود. ازاین‌رو، روش‌های عددی و تقریبی، مانند توابع جابجایی فرضی مبتنی بر بسط سری‌های توانی و روش ضرایب لاگرانژ، به‌طور گسترده برای حل معادلات حاصل به کار گرفته شده‌اند. در مرجع [۲۴] یک روش تحلیلی مبتنی بر تئوری مرتبه بالاتر تیرها برای بررسی رفتار استاتیکی، کمانشی و ارتعاشی تیرهای کامپوزیتی لایه‌ای ارائه شده است. در این پژوهش، معادلات حاکم حرکت با استفاده از معادلات لاگرانژ استخراج شده و یک حل تحلیلی بر پایه سری‌های مثلثاتی توسعه یافته است که قابلیت اعمال شرایط مرزی مختلف را دارد. هوانگ [۸] یک حل تحلیلی برای بررسی ارتعاش آزاد تیرهای همسانگرد بر اساس تئوری تیر تیموشنکو ارائه کرد که بعدها برای مطالعه ویژگی‌های ارتعاشی تیرهای کامپوزیتی توسعه داده شد [۱و ۶]. آبراموویچ و همکاران [۲] از یک روش حل مبتنی بر سری‌های چندجمله‌ای برای تحلیل پاسخ ارتعاشی تیرهای کامپوزیتی غیرمتقارن استفاده کردند. رفتار ارتعاش آزاد تیرهای کامپوزیتی لایه‌ای متقارن بر اساس تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول در مرجع [۱۲] مورد بررسی قرار گرفت؛ در این مطالعه، معادلات حاکم با استفاده از اصل همیلتون استخراج و به‌صورت تحلیلی حل شدند. سورش و ونکاتسان [۱۳] پاسخ دینامیکی تیرهای کامپوزیتی مورد استفاده در سیستم‌های روتور بالگرد را با استفاده از دو فرمول‌بندی متفاوت مبتنی بر مدول‌های الاستیک و پارامترهای نرمی بررسی کردند. نتایج آن‌ها نشان داد که در برخی موارد تفاوت‌های قابل‌توجهی میان این دو رویکرد وجود دارد که این اختلاف‌ها به محدودیت‌های تغییرشکل درون تیر نسبت داده شد. شی و لام [۱۴] تحلیل ارتعاش آزاد تیرهای کامپوزیتی با شرایط مرزی مختلف را با استفاده از یک فرمول‌بندی اجزای محدود توسعه‌یافته بر پایه تئوری تغییرشکل برشی مرتبه سوم انجام دادند. هورتا و فیلیو [۱۵] یک مدل تیر تیموشنکو مبتنی بر روش اجزای محدود و در چارچوب تئوری گرادیان کرنش ارائه کردند تا ویژگی‌های ارتعاشی تیرهای کامپوزیتی لایه‌ای را بررسی کنند. در این پژوهش، تأثیر شرایط مرزی و جهت‌گیری الیاف بر فرکانس‌های طبیعی تیر به‌طور ویژه مورد توجه قرار گرفت. خِلادی و همکاران [۱۶] ویژگی‌های ارتعاش آزاد تیرهای کامپوزیتی با سفتی متغیر را با در نظر گرفتن اثرات تغییرشکل برشی عرضی، اینرسی دورانی و پدیده‌های کوپل‌شدگی مورد بررسی قرار دادند. در این پژوهش، برای تعیین فرکانس‌های طبیعی تیرها از تحلیل ایزوژئومتریک استفاده شد که در آن شش درجه آزادی به هر نقطه کنترلی اختصاص داده شده بود. لین و شیانگ [۱۷] روش ریتز را با استفاده از توابع چندجمله‌ای برای بررسی رفتار ارتعاشی تیرهای کامپوزیتی تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی به کار گرفتند. در این مطالعه، فرکانس‌های طبیعی تیرها بر اساس هر دو تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول و مرتبه سوم، برای توزیع‌های مختلف نانولوله‌ها و پیکربندی‌های گوناگون تیر، محاسبه شدند. در مرجع [۱۸] یک فرمول‌بندی اجزای محدود مبتنی بر میدان‌های جابجایی مرتبه بالاتر و المان‌های پیوسته از نوع C^0 برای تحلیل استاتیکی تیرهای کامپوزیتی و ساندویچی متقارن و نامتقارن تحت بارگذاری سینوسی توسعه داده شد. تای و وو [۱۹] یک مدل اجزای محدود دوگرهی با پیوستگی C^1 و شش درجه آزادی در هر گره ارائه کردند تا پاسخ استاتیکی تیرهای کامپوزیتی را بررسی کنند. در ادامه، در پژوهشی دیگر [۲۰]، آن‌ها از تئوری‌های مختلف تغییرشکل برشی مرتبه بالاتر برای تحلیل رفتار خمشی و ارتعاشی تیرهای با خواص تابعی استفاده کردند. در این فرمول‌بندی‌ها، توزیع تنش برشی در راستای ضخامت تیر با استفاده از توابع مختلف شامل چندجمله‌ای، هارمونیک، هذلولی و نمایی مدل‌سازی شد. معادلات حاکم با استفاده از اصل همیلتون استخراج شده و برای تیرهای با تکیه‌گاه ساده، به‌صورت تحلیلی و با بهره‌گیری از روش سری‌های مثلثاتی ناویر حل شدند.

جیونتا و همکاران [۲۱] رویکرد مشابهی را برای تحلیل ارتعاش تیرهای کامپوزیتی لایه‌ای متقاطع با تکیه‌گاه ساده به کار گرفتند. در این مطالعه، میدان جابجایی سه‌بعدی در سطح مقطع تیر با استفاده از بسط عمومی چندجمله‌ای مرتبه N تقریب زده

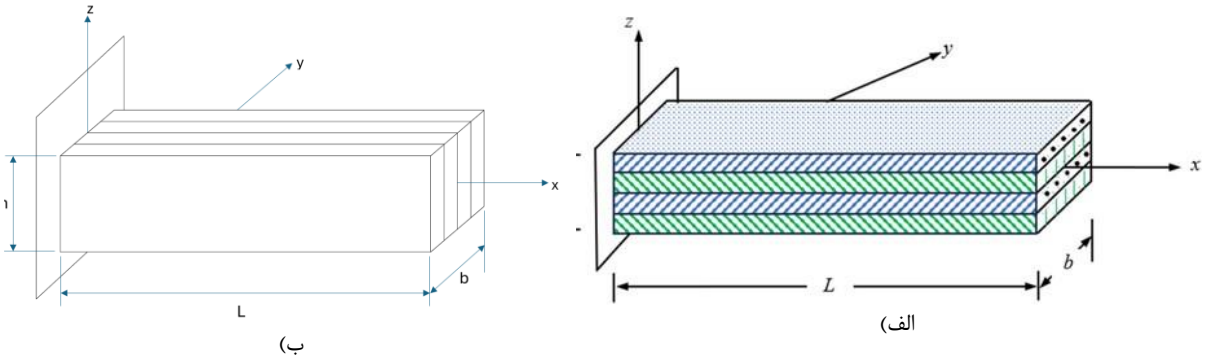
شد. رمضان و همکاران [۱۶] یک مدل اجزای محدود مبتنی بر تئوری تیر تیموشنکو توسعه دادند تا ارتعاش آزاد تیرهای لایه‌ای متقاطع قرارگرفته بر روی فونداسیون‌های الاستیک را بررسی کنند. گویانی و کاپانیا [۲۰] پاسخ‌های استاتیکی و دینامیکی تیرهای لایه‌ای نامتقارن را با استفاده از یک فرمول‌بندی اجزای محدود دارای ۲۱ درجه آزادی مورد مطالعه قرار دادند. المان پیشنهادی آن‌ها اثرات کوپل‌شدگی مرتبط با رفتار صفحات لایه‌ای را در نظر گرفته و چارچوبی کارآمد برای تحلیل دوبعدی تیرها فراهم می‌کرد. دش و همکاران [۲۵] یک فرمول‌بندی نیمه‌تحلیلی مبتنی بر روش ریتز ارائه کردند تا پایداری و پاسخ ارتعاشی تیرهای کامپوزیتی لایه‌ای با سختی متغیر تحت بارگذاری‌های ترمو-مکانیکی را تحلیل کنند. وو و تای [۲۶] رفتار ارتعاشی و کمانشی تیرهای کامپوزیتی با توالی‌های لایه‌چینی دلخواه را با استفاده از یک المان تیر دوگرهی با پیوستگی C^1 و پنج درجه آزادی در هر گره بررسی کردند. این روش امکان در نظر گرفتن اثرات کوپل‌شدگی ناشی از ناهمسانگردی ماده را فراهم می‌کرد. اثرات کوپل‌شدگی کششی، خمشی و پیچشی در تیرهای لایه‌ای عمومی نیز در مرجع [۲۱] با استفاده از یک فرمول‌بندی اجزای محدود دینامیکی مبتنی بر تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول برای محاسبه فرکانس‌های طبیعی مورد بررسی قرار گرفت. چن و همکاران [۲۷] یک فرمول‌بندی فضای حالت ترکیب‌شده با روش مربعات تفاضلی، بر اساس معادلات الاستیسیته دوبعدی مواد ارتوتروپیک، برای تحلیل ارتعاش آزاد تیرهای ارتوتروپیک ارائه کردند. ییلدریم و همکاران [۲۸] نیز از روش ماتریس انتقال، با استفاده از حل سری معادلات دیفرانسیل حاکم، برای تحلیل ارتعاش تیرهای لایه‌ای متقارن متقاطع استفاده کردند. مانتاری و کانالس [۲۹] از روش ریتز با استفاده از سری‌های کاملاً چندجمله‌ای یا ترکیبی چندجمله‌ای—مثلثاتی برای بررسی ویژگی‌های کمانشی و ارتعاشی تیرهای لایه‌ای بهره گرفتند. در این پژوهش، شرایط مرزی با استفاده از روش جریمه اعمال شد. به‌طور مشابه، آیدوغدو [۳۰] روش ریتز را با بیان سه مؤلفه جابجایی به‌صورت بسط سری‌هایی از چندجمله‌ای‌های جبری ساده به کار برد تا ارتعاش تیرهای کامپوزیتی لایه‌ای متقاطع را تحت شش ترکیب مختلف شرایط مرزی مطالعه کند. در مرجع [۳۱] یک تئوری تیر اصلاح‌شده مبتنی بر حل سه‌بعدی سنت‌ونان برای تحلیل کمانش تیرهای I شکل جدار نازک ساخته‌شده از کامپوزیت‌های لایه‌ای و ساندویچی با خواص تابعی توسعه داده شد.

در پژوهش‌های پیشین درزمینه‌ی تحلیل تیرهای کامپوزیتی، عموماً از ساختار لایه‌ای افقی استفاده شده است که در آن لایه‌های کامپوزیت به‌صورت افقی و روی هم قرار می‌گیرند، درحالی‌که تیر کامپوزیتی می‌تواند دارای آرایش لایه‌ای عمودی باشد، که در آن تیر از کنار هم قرار دادن چندین لایه کامپوزیت به‌صورت عمودی ساخته می‌شود. انگیزه عملی از بررسی آرایش لایه‌ای عمودی این است که جهت‌گیری و توزیع فضایی لایه‌های تشکیل‌دهنده کامپوزیت می‌توانند به‌عنوان پارامترهای طراحی اضافی برای تنظیم و بهینه‌سازی پاسخ دینامیکی سازه مورد استفاده قرار گیرند. به‌طور خاص، قرار دادن لایه‌هایی با جهت‌گیری‌های متفاوت الیاف در کنار یکدیگر، به‌جای چیدمان آن‌ها به‌صورت متوالی در راستای ضخامت، می‌تواند سفتی مؤثر سازه را تغییر داده و درنتیجه بر فرکانس‌های طبیعی و پاسخ ارتعاشی تیر تأثیر بگذارد. ازاین‌رو، این آرایش می‌تواند در اجزای سازه‌ای که در آن‌ها ویژگی‌های ارتعاشی، سفتی جهت‌دار، کاهش وزن یا تنظیم موضعی خواص مکانیکی از ملاحظات مهم طراحی هستند، مورد توجه قرار گیرد. در این مقاله، رفتار ارتعاشی این نوع تیر مورد بررسی قرار گرفته و با حالت متداول افقی مقایسه شده است. بدین منظور ابتدا معادلات حاکم بر رفتار ارتعاشی تیر استخراج شده و سپس به کمک روابط ساختاری متناسب با نوع آرایش لایه‌ها، این معادلات برحسب میدان جابجایی تیر نوشته می‌شوند. در ادامه، یک روش حل تحلیلی ارائه می‌گردد که قادر است بدون نیاز به جداسازی معادلات کوپل‌شده، این معادلات را به‌طور دقیق حل نموده و همچنین شرایط مرزی مختلف را اعمال نماید. درنهایت، بر اساس حل ارائه‌شده، فرکانس‌های طبیعی تیر برای شرایط مرزی مختلف و برای هر دو نوع آرایش لایه‌ای عمودی و افقی محاسبه شده و نتایج حاصل مورد مقایسه و تحلیل قرار می‌گیرند.

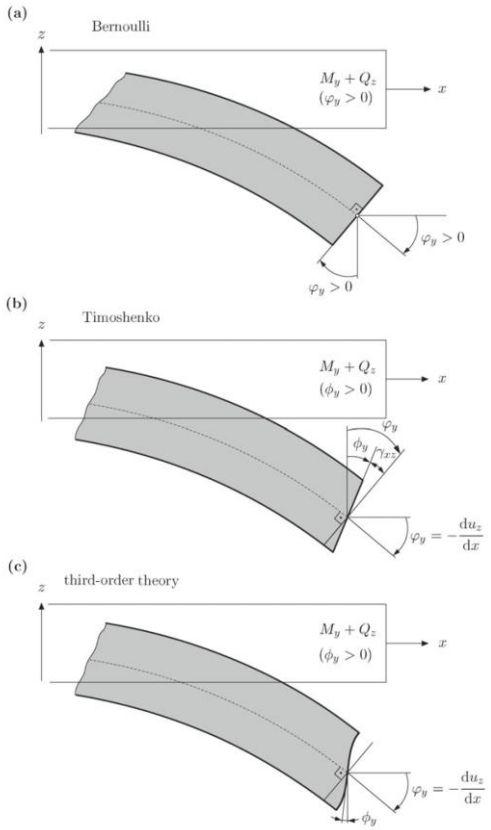
۲- فرمول‌بندی مسئله

یک تیر کامپوزیتی با سطح مقطع مستطیلی یکنواخت $(b \times h)$ با دو آرایش لایه‌ای افقی و عمودی در شکل ۱ نشان داده شده است. یک دستگاه مختصات تعریف می‌شود که در آن محور x در راستای طول تیر قرار داشته و از صفحه میانی آن عبور می‌کند، محور y در راستای عرض تیر و محور z در راستای ضخامت تیر می‌باشد. تیر نشان داده شده در شکل (۱-الف) دارای آرایش لایه‌ای افقی می‌باشد که بسیار متداول بوده و در اکثر مقالات رفتار آن بررسی می‌شود، درحالی‌که در شکل (۱-ب)، آرایش

لایه‌ای عمودی نشان داده شده است که در آن لایه‌ها به‌صورت عمودی و در کنار هم قرار می‌گیرند و هدف اصلی این مقاله تحلیل رفتار ارتعاشی این نوع تیر می‌باشد.



شکل ۱ تیر کامپوزیتی با آرایش لایه‌ای الف) افقی و ب) عمودی، به همراه دستگاه مختصات مورد استفاده برای تحلیل تیر.



شکل ۲ مقایسه تئوری‌های مختلف مورد استفاده در تحلیل تیرها

در شکل ۲، تئوری‌های متداول برای تحلیل تیرها با یکدیگر مقایسه شده‌اند. در تئوری اویلر–برنولی، اثر تغییرشکل برشی و نیز اینرسی دورانی نادیده گرفته شده و فرض می‌شود که تغییرشکل تیر تنها ناشی از خمش است؛ درحالی‌که در تئوری تیموشنکو، فرض می‌شود که تغییرشکل برشی ثابت در راستای ضخامت تیر رخ می‌دهد. تئوری‌های مرتبه بالاتر، توزیع دقیق‌تری از تغییرشکل برشی را در راستای ضخامت تیر ارائه می‌دهند. همان‌طور که در شکل ۲ مشاهده می‌شود، دوران یک خط که در ابتدا بر صفحه میانی تیر عمود است (ϕ_y)، می‌تواند به‌صورت زیر تعریف شود:

$$\phi_y = \varphi_y - \gamma_{xy} \qquad (۱)$$

که در آن ϕ_y و γ_{xy} به‌ترتیب نشان‌دهنده دوران‌های ناشی از تغییرشکل‌های خمشی و برشی هستند. در تئوری اویلر–برنولی، مقدار γ_{xy} برابر با صفر در نظر گرفته می‌شود؛ درحالی‌که در تئوری تیموشنکو، مقدار γ_{xy} در راستای ضخامت تیر ثابت فرض می‌شود. در تئوری‌های مرتبه بالاتر، تغییرشکل برشی به‌صورت تابعی از مختصات z و به شکل $\gamma_{xy} = f(z)$ در نظر گرفته می‌شود، که باعث تخمین بهتری می‌شود، اما درعین‌حال پیچیدگی معادلات حاصل و روش حل را به‌شدت افزایش می‌دهد. در این مقاله از تئوری تیر تیموشنکو به‌منظور به دست آوردن معادلات حاکم بر رفتار ارتعاشی تیر استفاده می‌شود. این تئوری در مقایسه با تئوری‌های مرتبه بالاتر از پیچیدگی کمتری برخوردار بوده و درعین‌حال، نتایج حاصل از آن نسبت به تئوری اویلر-برنولی دقت بالاتری به‌خصوص برای تیرهای با نسبت طول به ضخامت کم (L/h) دارد. میدان جابجایی تیر بر اساس تئوری تیموشنکو به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} u(x,z,t) &= u_0(x,t) + z\phi(x,t) \\ w(x,z,t) &= w(x,t) \end{aligned} \tag{۲}$$

که در آن u_0 و w به‌ترتیب جابجایی یک نقطه روی صفحه میانی تیر هستند و ψ بیانگر دوران خط عمود بر صفحه میانی می‌باشد. بر اساس میدان جابجایی تعریف شده در رابطه ۲، مؤلفه‌های کرنش به‌صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + z\frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \gamma_{xz} &= \phi + \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned} \tag{۳}$$

با استفاده از اصل همیلتون، معادلات حاکم بر رفتار ارتعاشی تیر به‌صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial N_x}{\partial x} - \rho A\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - \rho I_1\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \\ &\frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} + \rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \\ &\frac{\partial M_x}{\partial x} - Q_{xz} - \rho I_1\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - \rho I_2\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \tag{۴}$$

که در آن ρ و A به ترتیب چگالی و مساحت سطح مقطع تیر بوده و منتجه‌های تنش به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$(N_x, M_x) = b\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_x(1,z)dz, \qquad Q_{xz} = b\int_{-h/2}^{h/2}\tau_{xz}dz \tag{۵}$$

همچنین ممان‌های اول و دوم سطح به‌صورت زیر بیان می‌شوند:

$$(I_1, I_2) = b\int_{-h/2}^{h/2}(z, z^2)dz \tag{۶}$$

۲-۱-معادلات سازگاری

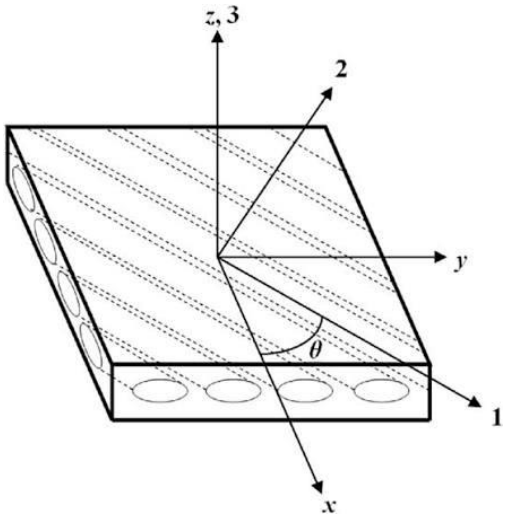
به‌منظور حل دستگاه معادلات دیفرانسیل در رابطه ۴، ابتدا باید آن را برحسب مؤلفه‌های میدان جابجایی نوشت. برای این منظور، لازم است از معادلات ساختاری کامپوزیت لایه‌ای استفاده شود. در ادامه نحوه انجام این کار برای دو آرایش لایه‌ای نشان داده شده در شکل ۱ توضیح داده می‌شود. بر اساس شکل ۳، به‌منظور تحلیل یک کامپوزیت تک لایه از دو دستگاه مختصات محلی $(1-2-3)$ و جهانی $(x-y-z)$ استفاده می‌شود که در آن محورهای ۱ و۲ در دستگاه مختصات محلی، به ترتیب در راستای الیاف و عمود بر آن تعریف می‌شوند. شکل کلی رابطه تنش-کرنش برای یک کامپوزیت تک لایه در مختصات محلی به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\\ \sigma_{23}\\ \sigma_{31}\\ \sigma_{12}\end{Bmatrix}=\begin{pmatrix}Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 & 0 & 0\\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & 0 & 0\\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66}\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_3\\ \gamma_{23}\\ \gamma_{31}\\ \gamma_{12}\end{Bmatrix} \quad (۷)$$

که در آن $[Q_{ij}]$ ماتریس سفتی در مختصات محلی می‌باشد. با استفاده از تبدیلات تنش و کرنش، رابطه ۷ در مختصات جهانی به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_z\\ \sigma_{yz}\\ \sigma_{xz}\\ \sigma_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{pmatrix}\overline{Q_{11}} & \overline{Q_{12}} & \overline{Q_{13}} & 0 & 0 & \overline{Q_{16}}\\ \overline{Q_{12}} & \overline{Q_{22}} & \overline{Q_{23}} & 0 & 0 & \overline{Q_{26}}\\ \overline{Q_{13}} & \overline{Q_{23}} & \overline{Q_{33}} & 0 & 0 & \overline{Q_{36}}\\ 0 & 0 & 0 & \overline{Q_{44}} & \overline{Q_{45}} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \overline{Q_{45}} & \overline{Q_{55}} & 0\\ \overline{Q_{16}} & \overline{Q_{26}} & \overline{Q_{36}} & 0 & 0 & \overline{Q_{66}}\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_z\\ \gamma_{yz}\\ \gamma_{xz}\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix} \quad (۸)$$

ماتریس ضرایب سفتی در مختصات جهانی به‌صورت $[\bar{Q}]=[T]^{-1}[Q][T]$ به دست می‌آید که در آن $[T]$ ماتریس تبدیل بوده و تابعی از زاویه الیاف θ می‌باشد.



شکل ۳ دستگاه مختصات محلی و جهانی مورد استفاده در تحلیل لایه کامپوزیتی.

۲-۲-تحلیل تیر با آرایش افقی لایه‌ها

در تحلیل تیرها، فرض بر این است که تنها تنش نرمال σ_x و تنش برشی σ_{xz} غیر صفر بوده و از مقادیر دیگر مؤلفه‌های تنش صرف‌نظر می‌شود. بنابراین با توجه به رابطه ۸، در یک تیر با آرایش افقی لایه‌ها، رابطه تنش-کرنش برای هرلایه را در مختصات جهانی می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \tau_{xz}\end{bmatrix}_k=\begin{bmatrix}\overline{Q_{11}} & 0\\ 0 & \overline{Q_{55}}\end{bmatrix}_k\begin{bmatrix}\epsilon_x\\ \gamma_{xz}\end{bmatrix}_k \quad (۹)$$

که در آن k بیانگر شماره لایه می‌باشد. با جایگذاری رابطه ۹ در ۵، منتجه‌های تنش برحسب مؤلفه‌های میدان جابجایی

به‌صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ M_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & B_{11} \\ B_{11} & D_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u_0}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial x} \end{bmatrix}, \qquad Q_{xz} = A_{55}\gamma_{xz} \tag{۱۰}$$

که در آن ضرایب سفتی تیر کامپوزیت به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$(A_{11}, B_{11}, D_{11}) = b\left(\sum_{k=1}^{n}\int_{h_k}^{h_{k+1}} \overline{Q_{11}}_k\,(1, z, z^2)dz\right), \qquad A_{55} = k_s b\left(\sum_{k=1}^{n}\int_{h_k}^{h_{k+1}} \overline{Q_{55}}_k\,dz\right) \tag{۱۱}$$

در رابطه ۱۱، k_s ضریب تصحیح برشی است که در تئوری تیموشنکو مورد استفاده قرار می‌گیرد. درنهایت با جایگذاری منتجه‌های تنش از رابطه ۱۱ در معادلات دیفرانسیل ۴، این معادلات برحسب میدان جابجایی به‌صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\begin{aligned} &A_{11}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + B_{11}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \rho A\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + \rho I_1\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \\ &A_{55}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) - \rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \\ &B_{11}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + D_{11}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - A_{55}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \phi\right) - \rho I_2\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \rho I_1\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \tag{۱۲}$$

توضیح اینکه در یک تیر کامپوزیتی، مقدار I_1 با توجه به رابطه ۶ برابر با صفر است، البته این موضوع برای همه مواد صادق نیست و برای مثال در مواد مدرج تابعی که تغییرات خواص در راستای ضخامت به‌صورت پیوسته صورت می‌گیرد، I_1 دارای مقدار غیر صفر می‌باشد. همچنین با توجه به معادلات ۴، سفتی B_{11} باعث ایجاد کوپلینگ بین معادلات می‌شود، بدین معنی که تغییر شکل طولی تیر، باعث ایجاد جابجایی عرضی و دوران در تیر می‌شود و برعکس می‌شود. مقدار B_{11} وابسته به نوع لایه چینی کامپوزیت بوده و در حالت لایه چینی متقارن برابر با صفر می‌باشد.

۲-۳-تحلیل تیر با آرایش عمودی لایه‌ها

در یک تیر کامپوزیت با آرایش عمودی لایه‌ها، تنش برشی τ_{xz} در مختصات مورد استفاده در تحلیل تیر (شکل ۱)، معادل با تنش برشی τ_{xy} در دستگاه مختصات متصل به لایه کامپوزیتی نشان داده شده در شکل ۳ می‌باشد و بنابراین، رابطه تنش کرنش برای لایه k ام، با توجه به معادله ۸ به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xz} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \overline{Q_{11}} & \overline{Q_{16}} \\ \overline{Q_{16}} & \overline{Q_{66}} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix}_k \tag{۱۳}$$

اکنون با جایگذاری ۱۳ در روابط منتجه‌های تنش ۵، منتجه‌های تنش برحسب مؤلفه‌های میدان جابجایی برای این نوع تیر به‌صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$N_x = A_{11}\frac{\partial u_0}{\partial x} + A_{16}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \phi\right), \qquad M_x = D_{11}\frac{\partial \phi}{\partial x}, \qquad Q_{xz} = k_s\left(A_{16}\frac{\partial u_0}{\partial x} + A_{66}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \phi\right)\right) \tag{۱۴}$$

که در رابطه ۱۴ و با توجه به آرایش لایه‌ها، ضرایب سفتی تیر به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$(A_{11}, A_{16}) = \sum_{k=1}^{n} b_k \int_{-h/2}^{h/2}\left(\overline{Q_{11}}_k, \overline{Q_{16}}_k\right)dz, \;\; D_{11} = \sum_{k=1}^{n} b_k \int_{-h/2}^{h/2} \overline{Q_{11}}_k z^2\,dz\,, A_{66} = \sum_{k=1}^{n} b_k \int_{-h/2}^{h/2} \overline{Q_{66}}_k\,dz, \tag{۱۵}$$

که در آن b_k پهنای لایه k ام می‌باشد. درنهایت با جایگذاری منتجه‌های تنش از رابطه ۱۴ در ۴، معادلات حاکم بر رفتار ارتعاشی تیر در این حالت به‌صورت زیر به دست می‌آیند:

$$A_{11}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{16}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) - \rho A\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - \rho I_1\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \tag{۱۶}$$

$$k_s A_{66}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)+k_s A_{16}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}-\rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0$$
$$D_{11}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}-k_s A_{16}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\phi+\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)-\rho I_2\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}-\rho I_1\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}=0$$

با توجه به معادلات ۱۶، در حالت آرایش عمودی لایه‌ها، سفتی A_{16} باعث ایجاد کوپلینگ در معادلات و وابستگی بین تغییر شکل داخل و خارج صفحه‌ای تیر می‌شود.

۲-۴-حل معادلات

در این قسمت در مورد روش حل معادلات ۱۲ و۱۶ که به ترتیب برای آرایش افقی و عمودی لایه‌ها به دست آمد، توضیح داده می‌شود. در این مقاله از یک روش تحلیلی برای حل هم‌زمان دستگاه معادلات حاصل، بدون جداسازی آن‌ها استفاده می‌شود. در روش‌های مبتنی بر جداسازی معادلات، معمولاً باید با استفاده از ترکیبی از عملیات جبری، مشتق‌گیری یا تبدیل متغیرها، دستگاه چندمعادله‌ای به یک معادله مستقل مرتبه بالاتر برحسب تنها یکی از متغیرهای مسئله تبدیل شود. این فرآیند مرتبه معادله حاصل را افزایش داده و معادله حاصل بسیار پیچیده‌تر از معادلات اولیه بوده و ساختار فیزیکی مسئله کوپل شده را مخفی می‌کند. درواقع برخلاف دستگاه معادلات اولیه که ضرایب معادلات دارای مفهوم فیزیکی هستند، در معادله جداسازی شده، این ضرایب، مفهوم فیزیکی خاصی ندارند. بنابراین روش ارائه شده، علاوه بر ساده‌تر نگه‌داشتن ساختار ریاضی مسئله، امکان اعمال مستقیم و نظام‌مند شرایط مرزی و ارائه یک چارچوب تحلیلی یکپارچه برای بررسی رفتار تیرهای کامپوزیتی با ساختارهای مختلف را فراهم می‌سازد. روند حل برای هردو حالت مشابه می‌باشد. برای حل این معادلات، با استفاده از روش جداسازی متغیرها، ابتدا میدان جابجایی تیر به‌صورت زیر به مؤلفه‌های مکانی و زمانی تفکیک می‌شود:

$$u_0(x,t)=U_0(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t},\qquad w(x,t)=W(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t},\qquad \phi(x,t)=\Phi(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \tag{۱۷}$$

با جایگذاری حل فوق در معادلات ۱۲ و پس از ساده‌سازی، معادلات زیر به دست می‌آیند:

$$A_{11}\frac{d^2U_0}{dx^2}+B_{11}\frac{d^2\Phi}{\partial x^2}+\rho A\omega^2 U_0=0$$
$$A_{55}\left(\frac{d^2W}{dx^2}+\frac{d\Phi}{dx}\right)+\rho A\omega^2 W=0 \tag{۱۸}$$
$$B_{11}\frac{d^2U_0}{dx^2}+D_{11}\frac{d^2\Phi}{\partial x^2}-A_{55}\left(\frac{dW}{dx}+\Phi\right)+\rho I_2\omega^2\Phi=0$$

روابط ۱۸ بیانگر یک دستگاه معادلات دیفرانسیل کوپل شده هستند که رفتار ارتعاشی تیرهای کامپوزیتی چندلایه با لایه‌چینی عمومی را توصیف می‌کنند. این دستگاه را می‌توان ابتدا با جداسازی[1] معادلات از یکدیگر حل کرد تا یک معادله تک‌متغیره مرتبه بالاتر برحسب U_0 ، Φ و یا W به دست آید. اما در اینجا یک روش حل مستقیم ارائه شده است که نیازی به جداسازی معادلات ندارد. بدین منظور، ابتدا مؤلفه‌های میدان جابجایی به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند:

$$W(x)=a_1e^{\lambda x},\qquad \Phi(x)=b_1e^{\lambda x},\qquad U_0(x)=c_1e^{\lambda x} \tag{۱۹}$$

اکنون با جایگذاری این جواب در روابط ۱۸ و پس از ساده‌سازی، دستگاه معادلاتی به فرم ماتریسی زیر به دست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} 0 & B_{11}\lambda^2 & A\rho\omega^2+A_{11}\lambda^2 \\ A\rho\omega^2+A_{55}\lambda^2 & A_{55}\lambda & 0 \\ -A_{55}\lambda & \rho I_2\omega^2+D_{11}\lambda^2-A_{55} & B_{11}\lambda^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix}=[0] \tag{۲۰}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، دستگاه معادلات حاصل در رابطه ۲۰، یک دستگاه همگن بوده و بنابراین برای وجود جواب غیر بدیهی، دترمینان ماتریس ضرایب باید برابر با صفر باشد. با مساوی صفر قرار دادن این دترمینان، معادله مشخصه مسئله به‌صورت یک چندجمله‌ای درجه شش برحسب λ به شکل زیر به دست می‌آید:

[1] Decoupling

$$|d_{ij}| = 0 \rightarrow p_6\lambda^6 + p_4\lambda^4 + p_2\lambda^2 + p_0 = 0 \quad (۲۱)$$

که در آن $|d_{ij}|$ دترمینان ماتریس ضرایب رابطه ۲۰ بوده و ضرایب p_i تابعی پیچیده از مقادیر سفتی تیر و نیز فرکانس طبیعی ω می‌باشند که به دلیل طولانی بودن آورده نشده است. این معادله دارای شش ریشه به‌صورت تابعی از ω خواهد بود. از سوی دیگر، ضرایب a_1، b_1 و c_1 در معادله ماتریسی ۲۰ مستقل از یکدیگر نبوده و قابل‌محاسبه هستند. برای انجام این کار، می‌توان یکی از این ضرایب را مستقل در نظر گرفت و از هر دو معادله از سه معادله موجود در ۲۰ برای محاسبه ضرایب باقیمانده استفاده کرد. به‌عنوان‌مثال، می‌توان ضریب a_1 را مستقل در نظر گرفته و از دو معادله اول رابطه ۲۰ برای محاسبه ضرایب b_1 و c_1 به‌عنوان جواب دستگاه زیر استفاده کرد:

$$\begin{bmatrix} d_{12} & d_{13} \\ d_{22} & d_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = -a_1 \begin{bmatrix} d_{11} \\ d_{21} \end{bmatrix} \quad (۲۲)$$

با توجه به اینکه معادله مشخصه ۲۱ در حالت کلی دارای ۶ ریشه می‌باشد، حل در نظر گرفته شده در رابطه ۱۹ را می‌توان به‌صورت زیر بسط داد:

$$W(x) = \sum_{i=1}^{6} a_i e^{\lambda_i x}, \ \Phi(x) = \sum_{i=1}^{6} b_i e^{\lambda_i x}, \ U_0(x) = \sum_{i=1}^{6} c_i e^{\lambda_i x} \quad (۲۳)$$

که در آن λ_i ها ریشه‌های معادله مشخصه ۲۱ بوده و برای هر مقدار λ_i، ضرایب b_i و c_i از رابطه ۲۲ به‌صورت تابعی از a_i محاسبه می‌شوند. درنهایت با اعمال شرایط مرزی، مقدار ω و همچنین ضرایب a_i، b_i و c_i که درواقع شکل مد مربوطه را تعریف می‌کنند، محاسبه می‌گردند. در این مقاله سه نوع شرط مرزی مفصلی در دو طرف، گیردار در دو طرف و گیردار-آزاد مورد بررسی قرار گرفته است. شرایط مرزی مربوط به این سه حالت به‌صورت زیر می‌باشد:

مفصل-مفصل: $x = (0, L): U_0 = W = 0; \ x = (0, L): M_x = 0$

گیردار-گیردار: $x = (0, L): U_0 = \mathrm{W} = \Phi = 0$

گیردار-آزاد: $x = 0: U_0 = \mathrm{W} = \Phi = 0; \ x = L: N_x = M_x = Q_{xz} = 0$

برای اعمال شرایط مرزی نیرویی، ابتدا مقادیر منتجه‌های تنش باید برحسب میدان جابجایی نوشته شوند. در حالت تحلیل ارتعاشی، با توجه به آنکه هیچ بار خارجی بر تیر اعمال نمی‌شود، با اعمال شرایط مرزی، یک دستگاه معادلات جبری همگن به‌صورت $[B][C] = 0$ به دست می‌آید، که در آن $[C] = [a_1, a_2, \dots, a_6]^T$ بردار ثوابت مسئله و $[B]$ ماتریس ضرایب است که مؤلفه‌های آن به شرایط مرزی تیر وابسته هستند. برای وجود جواب غیر بدیهی، دترمینان ماتریس $[B]$ باید برابر با صفر قرار داده شود که این امر منجر به تشکیل یک معادله ویژه با تعداد نامتناهی ریشه می‌شود. با حل این معادله و یافتن ریشه‌های آن، فرکانس‌های طبیعی تیر محاسبه می‌گردند. پس از محاسبه مقادیر ω_i و جایگذاری مجدد آن در معادله همگن $[B][C] = 0$ ، بردار ویژه متناظر با ω_i به دست می‌آید که بیانگر شکل مد i ام تیر است. توضیح اینکه حل این مسئله مقدار ویژه[2] که شامل محاسبه ریشه‌های معادله مشخصه و سپس یافتن بردار ویژه متناظر با هر ریشه می‌باشد، بسیار پیچیده بوده و در این پژوهش، از ترکیب نرم‌افزارهای متلب برای انجام محاسبات عددی و ریشه‌یابی و نرم‌افزار Maple برای انجام محاسبات تحلیلی و سیمبلیک استفاده شده است. در حالت آرایش عمودی لایه‌ها نیز، با جایگذاری حل در نظر گرفته شده در رابطه ۱۹ در معادلات ۱۸ و پس از ساده‌سازی، دستگاه معادلات زیر به دست می‌آید:

$$A_{11}\frac{d^2U_0}{dx^2} + A_{16}3 + \rho I_2\omega^2\Phi = 0 \quad (۲۴)$$

معادلات ۲۴ را می‌توان به فرمت ماتریسی زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} A_{16}\lambda^2 & A_{16}\lambda & \rho A\omega^2 + A_{11}\lambda^2 \\ \rho A\omega^2 + A_{66}k_s\lambda^2 & k_sA_{66}\lambda & k_sA_{16}\lambda^2 \\ -k_sA_{66}\lambda & \rho I_2\omega^2 + D_{11}\lambda^2 - k_sA_{66} & -k_sA_{16}\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = [0] \quad (۲۵)$$

[2] Eigenvalue problem

اکنون با استفاده از روندی مشابه آنچه در قسمت قبل توضیح داده شد، مقادیر فرکانس‌های طبیعی مربوط به این حالت نیز قابل‌محاسبه می‌باشد.

۳-نتایج

در این بخش، نتایج عددی مربوط به محاسبه فرکانس طبیعی اصلی تیرهای کامپوزیتی برای دو آرایش افقی و عمودی که در قسمت قبل توضیح داده شد، و در هر آرایش برای لایه‌چینی‌های متقارن و نامتقارن مختلف ارائه و مورد بحث قرار می‌گیرد. در ابتدا یک مطالعه اعتبارسنجی انجام می‌شود تا دقت و اعتبار راه‌حل ارائه‌شده نشان داده شود. دو نوع ماده برای اعتبارسنجی بر اساس مقالات مختلف به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

Material I [۲۴]: $E_1 = 181\ Gpa,\ E_2 = \frac{E_1}{40},\ G_{12} = G_{13} = 0.6E_2,\ G_{23} = 0.5E_2, \nu_{12} = 0.25$

Material II [۲۴]: $E_1 = 144.9\ Gpa, E_2 = 9.65\ Gpa, G_{12} = G_{13} = 4.14\ Gpa,$

$$G_{23} = 3.45\ Gpa, \nu_{12} = 0.3, \rho = 1389\ kg/m^3$$

برای سهولت، فرکانس طبیعی اصلی به‌صورت زیر نرمال‌سازی (بی‌بعد) می‌شوند:

$\bar{\omega} = \frac{\omega L^2}{h}\sqrt{\frac{\rho}{E_2}}$ for material I and $\bar{\omega} = \frac{\omega L^2}{h}\sqrt{\frac{\rho}{E_1}}$ for material II

این مطالعه صحت سنجی برای آرایش افقی انجام شده است، چراکه همان‌طور که توضیح داده شد، آرایش عمودی در مقالات مورد بررسی قرار نگرفته است و نتایجی در این زمینه یافت نشد. در تمام موارد، ضخامت و عرض تیر ثابت و به ترتیب برابر با $h = 200\ mm$ و $b = 50\ mm$ در نظر گرفته شده است. فرکانس طبیعی اصلی تیرهای کامپوزیتی با لایه‌چینی متقاطع[۳] و زاویه‌دار[۴] با سه نوع شرایط مرزی متفاوت، به ترتیب در جداول ۱ و ۲ با مطالعات پیشین بر اساس تئوری‌های مرتبه بالاتر مقایسه شده است. در جدول ۱، فرکانس طبیعی تیرهای متقارن [0/90°/0] و نامتقارن [0/90°] برای نسبت‌های مختلف L/h که در این مقاله بر اساس تئوری تیر اویلر-برنولی و تئوری تیموشنکو محاسبه شده است، با نتایج دیگر مقایسه شده است، درحالی‌که در جدول ۲، فرکانس تیرهای تک‌لایه با لایه‌چینی زاویه‌دار $[\theta]$ با زوایای الیاف مختلف، اعتبارسنجی شده است. نتایج ارائه شده در این جداول و مقایسه آن با نتایج موجود، نشان‌دهنده تطابق بسیار خوب بین حل ارائه شده مبتنی بر تئوری تیر تیموشنکو و مطالعات پیشین است. همان‌طور که در جدول ۱ مشاهده می‌شود، فرکانس اصلی محاسبه‌شده بر اساس تئوری اویلر-برنولی مستقل از نسبت L/h است و به دلیل صرف‌نظر کردن از اثر تغییرشکل برشی در این تئوری، برای تیرهای ضخیم‌تر خطای قابل‌توجهی وجود دارد، اما برای مقادیر بالاتر L/h ، این خطا کاهش می‌یابد. همچنین اختلاف کمی بین نتایج حاصل از تئوری تیموشنکو و تئوری‌های مرتبه بالا وجود دارد، البته این اختلاف برای تیر دو سرگیردار و برای تیرهای ضخیم (با نسبت کم L/h)، بیشتر است. در ادامه به‌منظور بررسی و صحت سنجی مدهای ارتعاشی بالاتر، در جداول ۳ و ۴، فرکانس مدهای مختلف یک تیر دوسرگیردار با نتایج مراجع دیگر مقایسه شده است. ۴ فرکانس اول یک تیر دوسرگیردار با لایه چینی $[0/\theta]$ برای مقادیر مختلف زاویه الیاف، در جدول ۳ مقایسه شده است. همچنین در جدول ۴ مقادیر فرکانس طبیعی ۵ مد اول تیر دوسرگیردار برای دو نوع لایه چینی مورد مقایسه قرار گرفته است. نتایج ارائه شده در این جداول نیز نشان‌دهنده تطابق مناسب مقادیر به‌دست‌آمده می‌باشد. البته برای زوایای الیاف بین حدود ۳۰ تا ۶۰ درجه، اختلاف بین نتایج کمی بیشتر است که دلیل آن را می‌توان تأثیر بیشتر کوپلینگ بین جابجایی‌های داخل صفحه‌ای و خارج صفحه‌ای در این زوایا دانست.

[3] Cross-ply
[4] Angle-ply

جدول ۱ مقایسه فرکانس طبیعی اساسی بی‌بعد $(\bar{\omega})$ تیرهای کامپوزیتی با لایه چینی متقاطع (ماده I).

			L/h				
		Method	۵	۱۰	۲۰	۳۰	۵۰
S-S	[0/90°/0]	Present (EBT)	۱۷/۷۱۰۳	۱۷/۷۰۹۷	۱۷/۷۱۰۳	۱۷/۷۱۰۳	۱۷/۷۱۰۳
		Present (TBT)	۹/۲۰۶۲	۱۳/۶۷۴۹	۱۶/۳۵۶۶	۱۷/۰۶۰۱	۱۷/۴۶۷۵
		Nguyen et al. [۲۴]	۹/۲۰۸	۱۳/۶۱۴	۱۶/۳۳۸	۱۷/۰۵۵	۱۷/۷۶۲
		Vo and Thai [۲۶]	۹/۲۰۶	۱۳/۶۰۷	۱۶/۳۲۷	-	۱۷/۴۴۹
	[0/90°]	Present (EBT)	۷/۴۰۰۷	۷/۴۶۱۷	۷/۴۷۷۱	۷/۴۷۹۹	۷/۴۸۱۴
		Present (TBT)	۶/۰۴۵۱	۷/۰۲۰۳	۷/۳۵۸۳	۷/۴۳۳۸	۷/۴۶۴۶
		Nguyen et al. [۲۴]	۶/۱۲۸	۶/۹۴۵	۷/۲۱۹	۷/۲۷۴	۷/۳۰۲
		Vo and Thai [۲۶]	۶/۰۵۸	۶/۹۰۹	۷/۲۰۴	-	۷/۲۹۶
C-F	[0/90°/0]	Present (EBT)	۶/۲۵۲۰	۶/۲۹۴۸	۶/۳۰۵۶	۶/۳۰۷۶	۶/۳۰۸۶
		Present (TBT)	۴/۱۳۴۹	۵/۴۷۹۹	۶/۰۷۲۸	۶/۱۹۸۱	۶/۲۶۸۴
		Nguyen et al. [۲۴]	۴/۲۳۴	۵/۴۹۸	۶/۰۷۰	۶/۱۹۸	۶/۲۶۷
		Aydogdu [۳۰]	۴/۲۳۴	-	۶/۰۷۰	-	-
	[0/90°]	Present (EBT)	۲/۶۲۷۹	۲/۶۵۶۰	۲/۶۶۳۱	۲/۶۶۴۴	۲/۶۶۵۱
		Present (TBT)	۲/۳۸۸۱	۲/۵۸۷۶	۲/۶۴۷۵	۲/۶۵۷۴	۲/۶۶۲۶
		Nguyen et al. [۲۴]	۲/۳۸۳	۲/۵۴۳	۲/۵۹۱	۲/۶۰۰	۲/۶۰۵
		Aydogdu [۳۰]	۲/۳۸۴	-	۲/۵۹۰	-	-
C-C	[0/90°/0]	Present (EBT)	۴۰/۱۴۶۴	۴۰/۱۴۶۹	۴۰/۱۴۷۲	۴۰/۱۴۷۲	۴۰/۱۴۷۲
		Present (TBT)	۱۰/۴۳۱۸	۱۹/۰۵۵۰	۲۹/۴۷۷۴	۳۴/۲۰۹۳	۳۷/۶۷۷۹
		Nguyen et al. [۲۴]	۱۱/۶۰۷	۱۹/۷۲۸	۲۹/۶۹۵	۳۴/۲۶۸	۳۷/۶۷۹
		Aydogdu [۳۰]	۱۱/۶۳۷	-	۲۹/۹۲۶	-	-
	[0/90°]	Present (EBT)	۱۶/۷۳۱۲	۱۶/۹۰۳۰	۱۶/۹۴۶۸	۱۶/۳۵۴۸	۱۶/۹۵۸۹
		Present (TBT)	۹/۰۰۹۵	۱۳/۲۵۳۸	۱۵/۷۳۶۱	۱۶/۳۵۶۶	۱۶/۷۶۱۱
		Nguyen et al. [۲۴]	۱۰/۰۲۷	۱۳/۶۷۰	۱۵/۶۶۱	۱۶/۱۵۴	۱۶/۴۲۹
		Aydogdu [۳۰]	۱۰/۱۰۲	-	۱۵/۶۸۸	-	-

جدول ۲ مقایسه فرکانس طبیعی اساسی بی بعد $(\bar{\omega})$ تیر های کامپوزیتی با لایه چینی زاویه دار (ماده II و $L/h = 15$).

		Fiber Angle						
BC	Theory	۰	۱۵	۳۰	۴۵	۶۰	۷۵	۹۰
S-S	Present (EBT)	۳/۱۸۷۵	۲/۹۸۲۲	۲/۴۲۴۳	۱/۶۷۵۳	۰/۹۷۳۹	۰/۵۹۷۲	۰/۵۴۹۹
	Present (TBT)	۲/۶۵۷۸	۲/۵۱۲۹	۲/۱۰۸۸	۱/۵۵۰۵	۱/۰۴۶۰	۰/۸۱۹۴	۰/۷۹۸۰
	Nguyen et al. [۲۴]	۲/۶۵۶۳	۲/۵۱۰۸	۲/۱۰۳۳	۱/۵۳۶۷	۱/۰۱۲۱	۰/۷۶۰۸	۰/۷۳۱۷
	Vo and Thai [۲۶]	۲/۶۴۹۴	۲/۴۰۳۹	۱/۵۵۴۰	۰/۹۰۷۸	۰/۹۰۷۸	۰/۷۲۴۷	۰/۷۲۹۵
C-F	Present (EBT)	۱/۱۳۴۴	۱/۰۶۱۳	۰/۸۶۲۸	۰/۵۹۶۲	۰/۳۴۶۶	۰/۲۱۲۵	۰/۱۹۵۷
	Present (TBT)	۰/۹۸۲۶	۰/۹۲۵۷	۰/۷۶۹۸	۰/۵۶۰۵	۰/۳۷۵۴	۰/۲۹۳۵	۰/۲۸۵۵
	Nguyen et al. [۲۴]	۰/۹۸۳۲	۰/۹۲۵۹	۰/۷۶۸۳	۰/۵۵۵۳	۰/۳۶۳۱	۰/۲۷۲۲	۰/۲۶۱۸
	Vo and Thai [۲۶]	۰/۹۸۰۱	۰/۸۸۳۶	۰/۵۶۱۴	۰/۳۲۵۳	۰/۲۶۳۴	۰/۲۵۹۳	۰/۲۶۱۱
C-C	Present (EBT)	۷/۲۲۵۷	۶/۷۶۰۵	۵/۴۹۵۴	۳/۷۹۷۸	۲/۲۰۷۶	۱/۳۵۳۷	۱/۲۴۶۵
	Present (TBT)	۴/۸۵۱۲	۴/۶۶۶۲	۴/۱۰۶۶	۳/۲۰۷۷	۲/۲۶۴۸	۱/۸۰۲۱	۱/۷۵۸۱
	Nguyen et al. [۲۴]	۴/۹۱۱۶	۴/۷۱۷۳	۴/۱۳۰۷	۳/۱۹۷۳	۲/۲۰۱۹	۱/۶۸۲۵	۱/۶۲۰۵
	Vo and Thai [۲۶]	۴/۸۹۶۹	۴/۵۶۹۵	۳/۲۳۵۵	۱/۹۹۱۸	۱/۶۳۰۹	۱/۶۰۵۶	۱/۶۱۵۲

جدول ۳ مقایسه فرکانس طبیعی مدهای مختلف تیر با لایه چینی $[0/\theta]$ و شرایط مرزی دوسرگیردار.

شماره مد	روش حل	زاویه الیاف						
		۰	۱۵	۳۰	۴۵	۶۰	۷۵	۹۰
۱	Present	۴/۸۵۱	۴/۷۵۷	۴/۴۵۶	۳/۹۱۱	۲/۲۶۷	۲/۹۴۵	۲/۹۱۳
	Ref. [۲۶]	۴/۸۹۷	۴/۷۳۰	۳/۹۵۷	۳/۱۰۸	۲/۸۵۹	۲/۸۴۰	۲/۸۴۶
۲	Present	۱۰/۸۲۸	۱۰/۶۷۶	۱۰/۱۷۹	۹/۲۳۲	۸/۰۰۸	۷/۳۴۳	۷/۲۷۳
	Ref. [۲۶]	۱۱/۴۹۳	۱۱/۱۹۲	۹/۷۴۴	۷/۹۶۷	۷/۴۰۰	۷/۳۵۱	۷/۳۶۱
۳	Present	۱۷/۸۲۱	۱۷/۶۱۸	۱۶/۹۵۳	۱۵/۶۷۳	۱۳/۹۵۱	۱۲/۹۶۴	۱۲/۸۵۴
	Ref. [۲۶]	۱۸/۴۰۰	۱۸/۰۱۵	۱۶/۲۱۸	۱۳/۸۸۶	۱۳/۰۷۱	۱۲/۹۸۴	۱۲/۹۹۲
۴	Present	۲۵/۲۲۱	۲۴/۹۸۱	۲۴/۱۹۷	۲۲/۶۷۴	۲۰/۵۶۳	۱۹/۳۰۶	۱۹/۱۵۸
	Ref. [۲۶]	۲۶/۴۴۸	۲۵/۹۸۸	۲۳/۸۹۳	۲۱/۰۴۲	۱۹/۹۷۵	۱۹/۸۴۱	۱۹/۸۴۴

جدول ۴ مقایسه فرکانس طبیعی مدهای مختلف تیر دوسرگیردار برای لایه چینی های مختلف.

لایه چینی	روش حل	شماره مد				
		۱	۲	۳	۴	۵
[0/90/0/90]	Present	۳/۷۴۰	۸/۸۸۲	۱۵/۱۳۵	۲۱/۹۵۲	۲۹/۰۸۰
	Ref. [۱۷]	۳/۷۳۶	۹/۱۸۷	۱۵/۱۰۲	۲۲/۱۹۰	۲۹/۰۰۲
[0/45/0/45]	Present	۴/۱۵۹	۹/۶۶۳	۱۶/۲۴۶	۲۳/۳۴۲	۳۰/۷۰۰
	Ref. [۱۷]	۳/۸۶۵	۹/۴۷۹	۱۵/۵۴۰	۲۲/۸۰۲	۲۹/۷۷۳

به‌منظور مقایسه رفتار ارتعاشی تیرهای کامپوزیتی با آرایش افقی و عمودی که هدف اصلی این مقاله است، در شکل‌های ۴ تا ۶، فرکانس طبیعی اصلی برای این دو آرایش و برای لایه چینی و شرایط مرزی مختلف محاسبه و با یکدیگر مقایسه شده است. توضیح اینکه این نتایج برای کامپوزیت گرافیت/اپوکسی با مشخصات زیر به‌دست‌آمده است:

Graphite/Epoxy: $E_1 = 181\ Gpa, E_2 = 10.3\ Gpa, G_{12} = G_{13} = 7.17\ Gpa,$

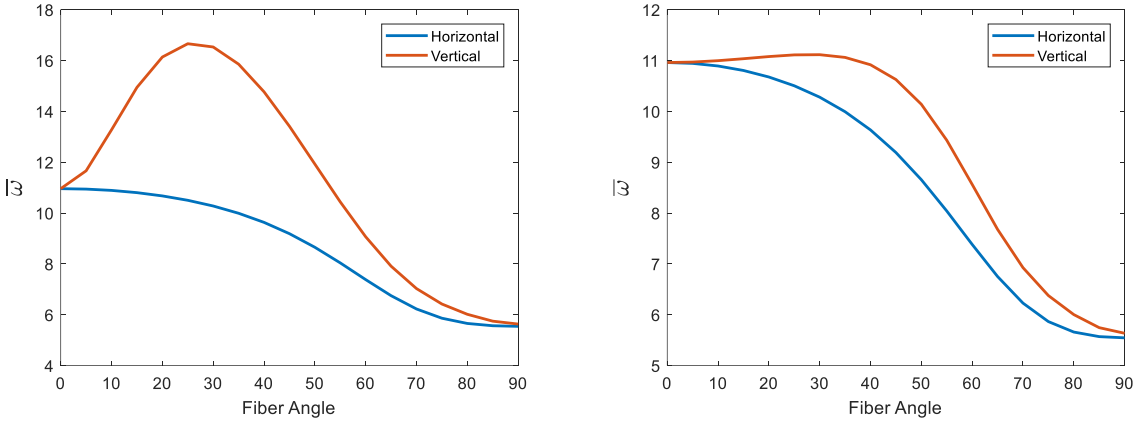
$$G_{23} = 6.21\ Gpa, \nu_{12} = 0.28, \nu_{13} = 0.02, \nu_{23} = 0.4, \rho = 1389\ kg/m^3$$

همچنین فرکانس طبیعی به‌صورت $\bar{\omega} = \frac{\omega L^2}{h}\sqrt{\frac{\rho}{E_2}}$ بی‌بعد شده است. با توجه به این نمودارها، مشاهده می‌شود که فرکانس طبیعی تیرکامپوزیتی با آرایش عمودی، همواره بزرگ‌تر از تیر با آرایش افقی است و میزان این اختلاف بستگی به نوع شرایط مرزی تیر و نحوه لایه چینی دارد. همچنین در آرایش افقی، فرکانس طبیعی تیر همواره با افزایش زاویه الیاف کاهش می‌یابد. در یک لایه کامپوزیتی، مقدار مدول در راستای الیاف (E_1) بسیار بزرگ‌تر از مدول عرضی (E_2) می‌باشد و با توجه به اینکه فرکانس طبیعی متناسب با میزان سفتی یک سازه است، این موضوع نشان می‌دهد که در تیرهای با آرایش افقی، تغییر زاویه الیاف در عین ثابت ماندن جرم تیر، باعث کاهش سفتی کل تیر و درنتیجه کاهش فرکانس طبیعی می‌شود و بنابراین درصورتی‌که هدف، دستیابی به بیشینه فرکانس طبیعی باشد، بهینه‌ترین حالت برای آرایش افقی لایه‌ها، این است که تمامی لایه‌ها دارای زاویه الیاف صفر باشند. در لایه‌های زاویه‌دار، کوپلینگ بین کرنش‌های نرمال و برشی افزایش می‌یابد. بخشی از انرژی ذخیره شده به جای مقاومت در برابر خمش، صرف تغییرشکل‌های برشی و کوپل‌شده می‌شود. این موضوع نیز باعث کاهش سفتی مؤثر سازه و درنتیجه کاهش فرکانس طبیعی می‌شود. بررسی شکل‌های ۴ تا ۶ نشان می‌دهد که در حالت آرایش افقی، حساسیت فرکانس طبیعی اصلی نسبت به تغییر زاویه الیاف در تیرهای با لایه‌چینی $[\theta]$ بسیار بیشتر از تیرهای با لایه‌چینی $[0 / \theta / 90°]$ است. دلیل این امر آن است که رفتار ارتعاشی تیرهای کامپوزیتی عمدتاً توسط لایه‌هایی که الیاف آن‌ها در امتداد طول تیر قرار دارند (لایه‌هایی با $\theta = 0$) تعیین می‌شود و هرگونه تغییر در زاویه الیاف، سفتی تیر و درنتیجه فرکانس اصلی آن را کاهش می‌دهد. این مطلب به‌وضوح در شکل ۷ دیده می‌شود. در این شکل تغییرات ضرایب سفتی کششی، سفتی کوپل کششی–خمشی و نیز سفتی خمشی و برشی تیر کامپوزیتی با آرایش افقی لایه‌ها نسبت به زاویه الیاف برای لایه‌چینی‌های مختلف ترسیم شده است. بر اساس این شکل، تمام ضرایب سفتی تیر با افزایش زاویه الیاف کاهش می‌یابند، و این روند در تیرهای زاویه‌دار با لایه‌چینی $[\theta]$ شدیدتر و

در تیرهای متقاطع با لایه‌چینی $[0 / \theta / 0]$ ملایم‌تر است. این شکل همچنین نشان می‌دهد که مقدار سفتی کوپل کششی-خمشی (B_{11}) برای لایه‌چینی‌های متقارن، صفر است.

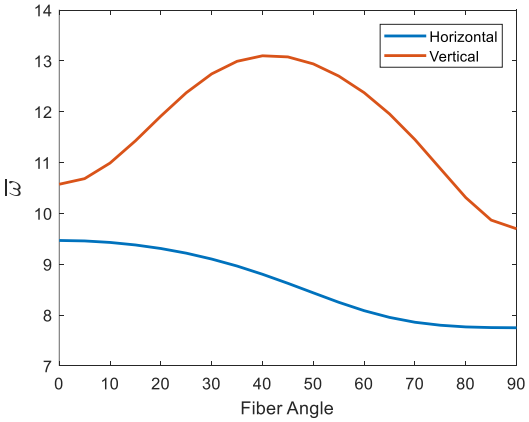
برخلاف آرایش افقی که در آن تغییر زاویه الیاف همواره باعث کاهش فرکانس می‌گردد، برای تیرهای با آرایش عمودی، امکان دستیابی به فرکانس طبیعی ماکزیمم با تغییر زاویه الیاف وجود دارد و مقدار این فرکانس ماکزیمم در بعضی موارد اختلاف قابل‌توجهی با حالت آرایش افقی دارد. مقدار بهینه برای زاویه الیاف در آرایش عمودی، تابعی از شرایط مرزی و نوع لایه چینی کامپوزیت می‌باشد. برای بررسی دقیق‌تر این موضوع، در جدول ۵ زاویه الیاف و مقدار فرکانس طبیعی ماکزیمم برای تیر کامپوزیتی با آرایش عمودی لایه‌ها و برای شرایط مرزی و لایه چینی‌های مختلف آورده شده است. همچنین در این جدول، مقدار ماکزیمم فرکانس طبیعی برای دو آرایش افقی و عمودی به‌صورت درصدی با یکدیگر مقایسه شده‌اند که بیشترین میزان این اختلاف برابر با ۵۲/۲۶ درصد بوده و مربوط به شرایط مرزی دوسرگیردار و لایه چینی $[\theta/-\theta]$ است.

علت اصلی افزایش فرکانس طبیعی در حالت آرایش عمودی لایه‌ها را می‌توان به افزایش سفتی برشی تیر نسبت داد. در این حالت به دلیل نحوه قرارگیری لایه‌ها، تنش‌های برشی به‌صورت داخل صفحه‌ای توسط هر لایه تحمل می‌شوند که این موضوع باعث مقاومت بیشتر هرلایه و درنتیجه مقاومت کل تیر در مقابل برش می‌شود. برای مشاهده بهتر این موضوع، در شکل ۸ نحوه تغییرات مقادیر سفتی برشی (A_{66}) و سفتی کوپل برشی-کششی (A_{16}) برحسب زاویه الیاف رسم شده است. این شکل نشان می‌دهد که برخلاف شکل ۷، مقادیر این سفتی‌ها با تغییر زاویه الیاف افزایش می‌یابند. همچنین بر اساس این شکل، برای زاویه الیاف صفر و نود درجه، مقدار سفتی A_{16} برابر با صفر بوده و تغییر شکل کششی و برشی وابسته نیستند. توضیح اینکه نحوه تغییرات مقادیر سفتی D_{11} و A_{11} در این آرایش، مشابه آرایش افقی است. درنهایت می‌توان گفت که با توجه به یکسان بودن جرم در هردو آرایش افقی و عمودی، عامل تعیین کننده مقدار فرکانس طبیعی، سفتی کل سازه می‌باشد که شامل سفتی کششی، خمشی، برشی و کوپلینگ می‌باشد، در آرایش افقی، تغییر شکل کششی و خمشی به هم وابسته هستند و مقادیر کلیه سفتی‌ها با افزایش زاویه الیاف کاهش می‌یابد. اما در آرایش عمودی، تغییر شکل کششی و برشی به هم وابسته هستند که میزان سفتی برشی و سفتی کوپلینگ با تغییر زاویه الیاف افزایش می‌یابد. به همین دلیل در آرایش افقی همواره فرکانس با افزایش زاویه الیاف کاهش می‌یابد، درحالی‌که در آرایش عمودی، افزایش زاویه الیاف می‌تواند باعث افزایش سفتی کل و درنتیجه افزایش فرکانس طبیعی تیر شود.

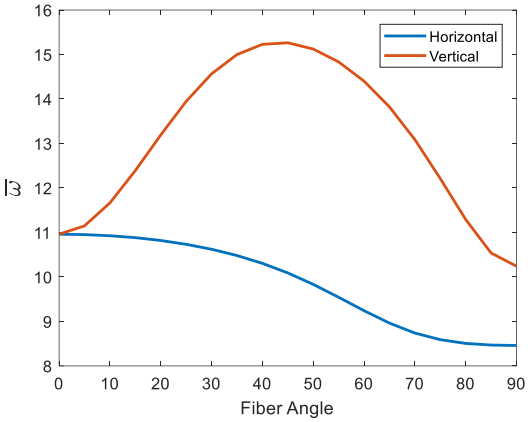


الف) $[\theta]$ ب) $[\theta/-\theta]$

شکل ۴ تغییرات فرکانس طبیعی اصلی تیر کامپوزیت دوسرگیردار برای دو آرایش افقی و عمودی برحسب زاویه الیاف برای لایه چینی‌های مختلف.

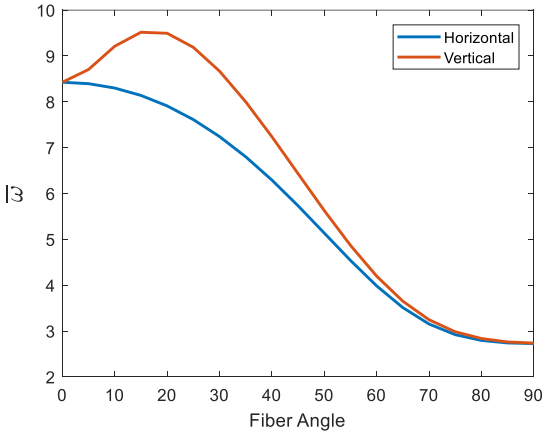


د) $[0/\theta/90°]$

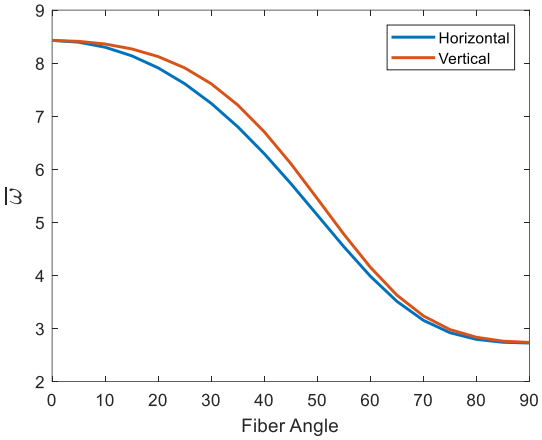


ج) $[0/\theta]$

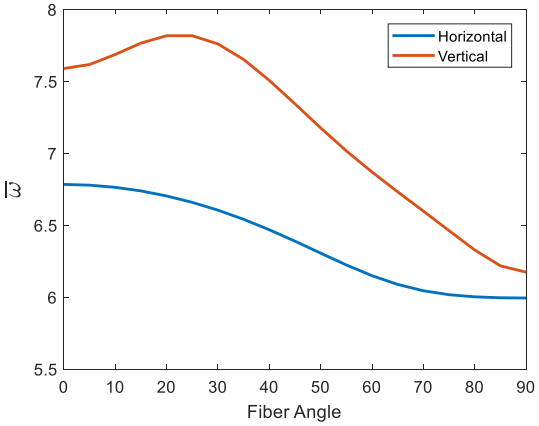
شکل ۴ تغییرات فرکانس طبیعی اصلی تیر کامپوزیت دوسرگیردار برای دو آرایش افقی و عمودی برحسب زاویه الیاف برای لایه چینی‌های مختلف.



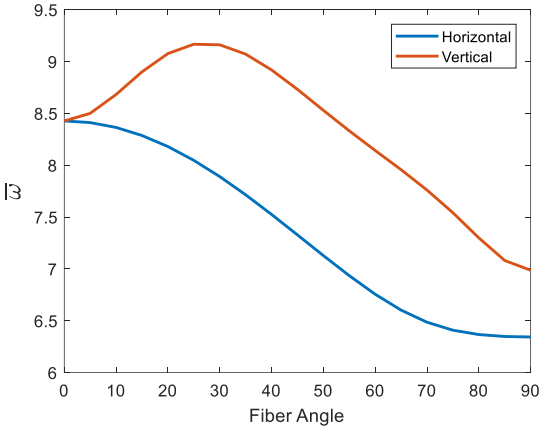
ب) $[\theta/-\theta]$



الف) $[\theta]$

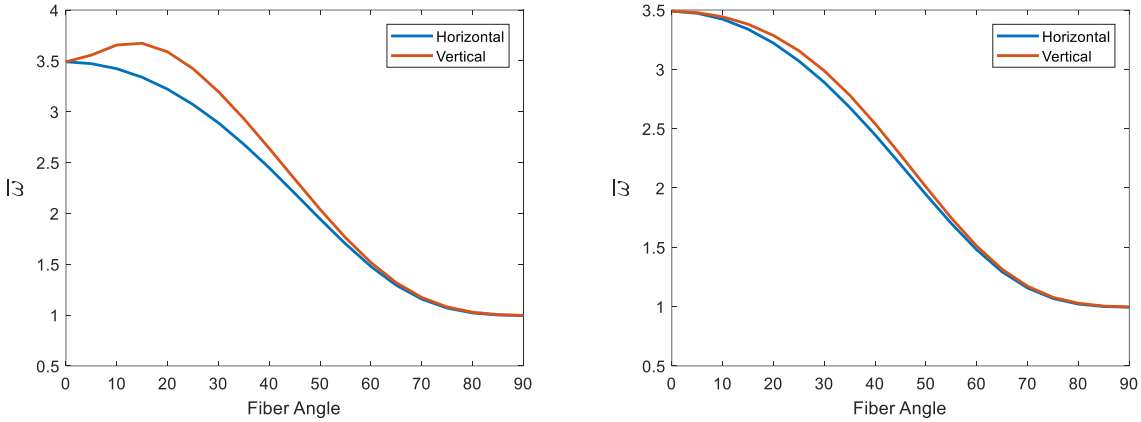


د) $[0/\theta/90°]$

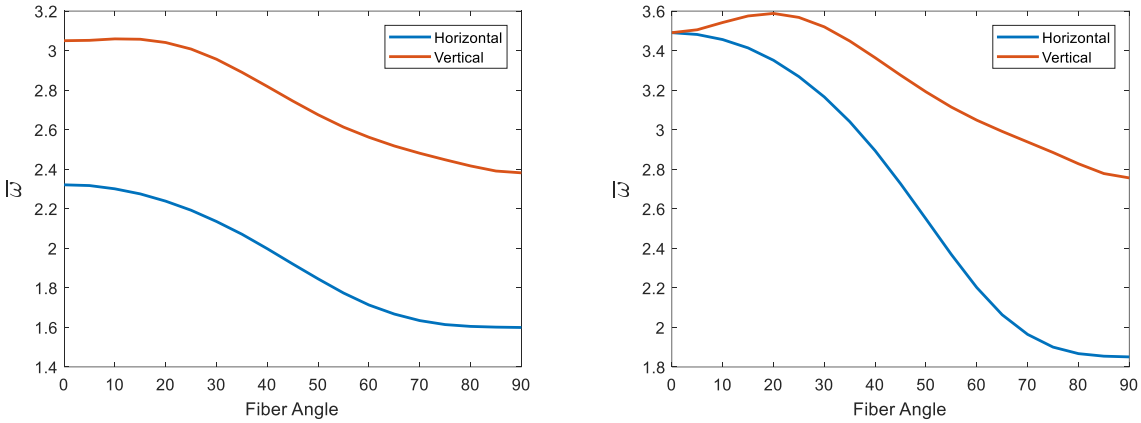


ج) $[0/\theta]$

شکل ۵ تغییرات فرکانس طبیعی اصلی تیر کامپوزیت دو سر مفصل برای دو آرایش افقی و عمودی برحسب زاویه الیاف برای لایه چینی‌های مختلف.

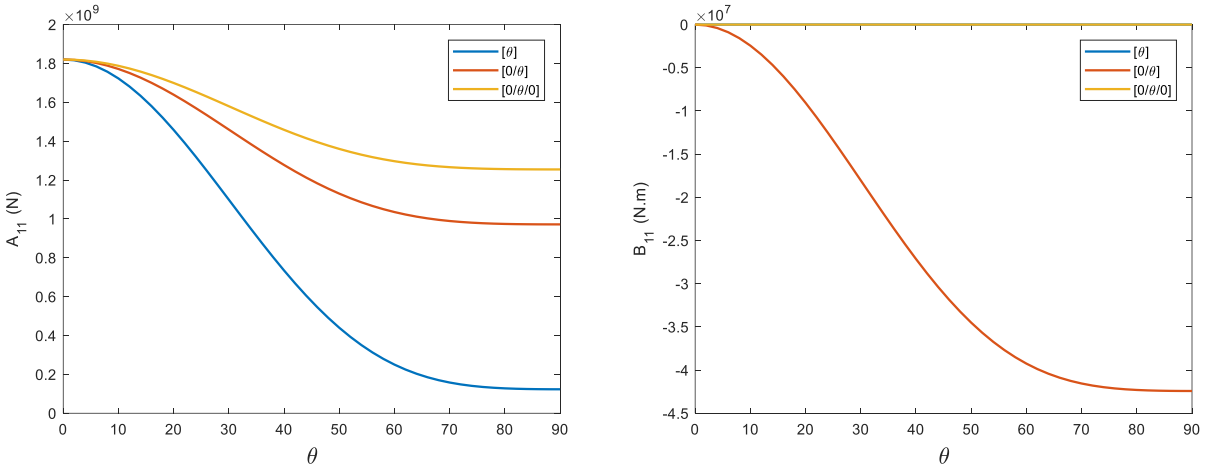


الف) $[\theta]$ ب) $[\theta/-\theta]$



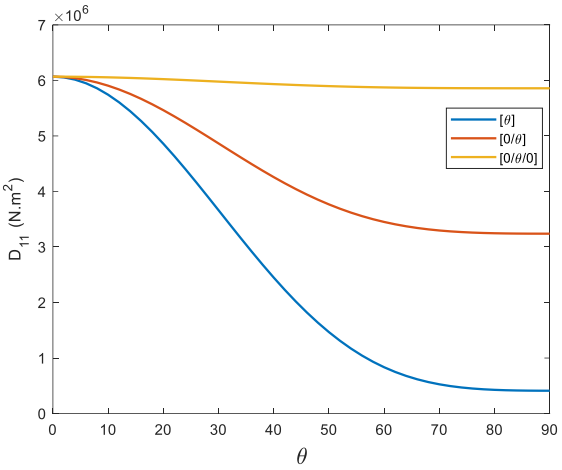
ج) $[0/\theta]$ د) $[0/\theta/90°]$

شکل ۶ تغییرات فرکانس طبیعی اصلی تیر کامپوزیت یکسر گیردار-یکسر آزاد برای دو آرایش افقی و عمودی برحسب زاویه الیاف برای لایه چینی‌های مختلف.

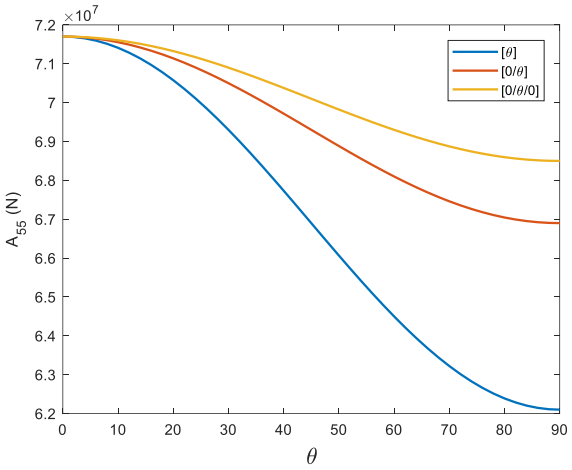


ب) الف)

شکل ۷ تغییرات ضرایب سفتی تیر کامپوزیتی با لایه چینی مختلف برحسب زاویه الیاف برای آرایش افقی.

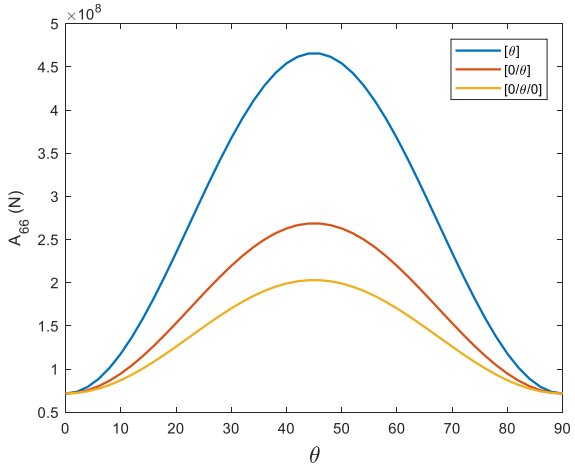


د)

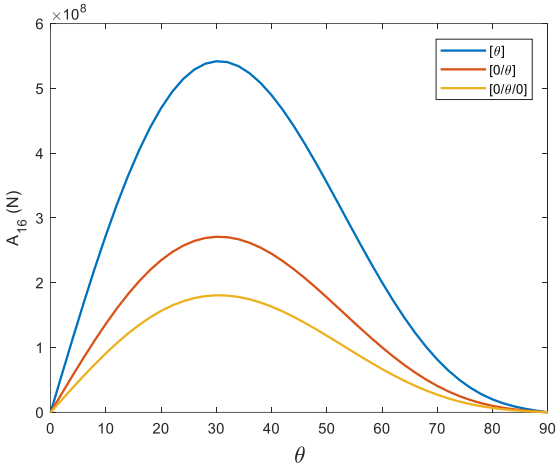


ج)

شکل ۷ تغییرات ضرایب سفتی تیر کامپوزیتی با لایه چینی مختلف برحسب زاویه الیاف برای آرایش افقی (ادامه).



ب)



الف)

شکل ۸ تغییرات ضرایب سفتی برشی و کوپل برشی-کششی تیر کامپوزیتی با لایه چینی مختلف برحسب زاویه الیاف برای آرایش عمودی.

جدول ۵ مقادیر ماکزیمم زاویه الیاف و فرکانس طبیعی در تیرهای کامپوزیتی با آرایش عمودی لایه‌ها.

لایه چینی	شرط مرزی								
	دوسر مفصل			گیردار-آزاد			دوسرگیردار		
	$\theta°_{max}$	$\bar{\omega}_{max}$	اختلاف نسبی (٪)	$\theta°_{max}$	$\bar{\omega}_{max}$	اختلاف نسبی (٪)	$\theta°_{max}$	$\bar{\omega}_{max}$	اختلاف نسبی (٪)
$[\theta]$	۰	۸/۴۲۶۷	۰	۰	۳/۴۹۰۸	۰	۲۸	۱۱/۱۱۸۳	۱/۴۴
$[\theta/-\theta]$	۱۷	۹/۵۴۷۲	۱۳/۲۹	۱۳/۵	۳/۶۷۸۱	۵/۳۷	۲۶/۵	۱۶/۶۸۹۴	۵۲/۲۶
$[0/\theta]$	۲۷	۹/۱۷۶۱	۸/۸۹	۱۹/۵	۳/۵۸۸۳	۲/۷۹	۴۳	۱۵/۳۲۲۰	۳۹/۸۰
$[0/\theta/90°]$	۲۲/۵	۷/۸۲۴۲	۱۵/۳۴	۱۲/۵	۳/۰۵۹۴	۳۱/۸۱	۴۱/۵	۱۳/۱۰۷۲	۳۸/۴۴

۴-نتیجه‌گیری

در این مقاله ارتعاشات تیرهای کامپوزیتی با در نظر گرفتن آرایش افقی و عمودی برای لایه‌ها، مورد بررسی قرار گرفت. از تئوری تیموشنکو برای مدل‌سازی تیر استفاده شد و با ارائه یک روش تحلیلی، معادلات حاکم به‌صورت هم‌زمان حل و شرایط مرزی اعمال شد. هدف اصلی این مقاله، مقایسه رفتار ارتعاشی و فرکانس طبیعی اصلی تیرهای با آرایش افقی و عمودی بود،

چراکه در مقالات مختلف تنها آرایش افقی مورد بررسی قرار گرفته بود. بدین منظور فرکانس طبیعی اصلی برای این دو آرایش و برای شرایط مرزی مختلف و نیز لایه چینی‌های متفاوت محاسبه و با یکدیگر مقایسه شدند. نتایج به‌دست‌آمده نشان می‌دهد که همواره فرکانس طبیعی تیر با آرایش عمودی، بیشتر از حالت افقی است. همچنین در آرایش افقی، فرکانس طبیعی با تغییر زاویه الیاف همواره کاهش می‌یابد که دلیل آن نیز کاهش ثوابت سفتی تیر با تغییر زاویه الیاف می‌باشد و بنابراین بهینه‌ترین حالت برای این آرایش، زمانی اتفاق می‌افتد که همه لایه‌ها دارای زاویه صفر باشند. این درحالی است که در مورد آرایش عمودی، با تغییر زاویه الیاف می توان به فرکانس طبیعی ماکزیمم دست یافت که این موضوع از دید طراحی قابل توجه است. مقادیر ماکزیم فرکانس طبیعی و نیز زاویه مربوط به آن برای شرایط مرزی و لایه چینی های مختلف محاسبه و ارائه شد. بر اساس این نتایج، تیر با شرایط مرزی گیردار در دوطرف دارای بیشترین فرکانس طبیعی بوده و همچنین بیشترین اختلاف بین دو آرایش برای این شرایط مرزی و لایه چینی $[\theta/-\theta]$ اتفاق می‌افتد، درحالی‌که تیرهای با شرایط مرزی یکسر گیردار-یکسر آزاد دارای کمترین مقادیر فرکانس طبیعی هستند.

Authorship Contribution Statement

Dr. Saeed Abolghasemi



Biography: Assistant Professor, Department of Mechanical Engineering, Golestan University, Gorgan, Iran

Contribution Statement: Conceptualization, Methodology, Validation, Formal analysis, Investigation, Software, Visualization, Writing – original draft, Writing – review & editing.

۵-مراجع

[1] Abramovich H. Shear deformation and rotary inertia effects of vibrating composite beams. Compos Struct. 1992;20:165–73.

[2] Abramovich H, Eisenberger M, Shulepov O. Vibrations of multi-span non-symmetric composite beams. Compos Eng. 1995;5:397–404.

[3] Abramovich H, Livshits A. Free vibrations of non-symmetric cross-ply laminated composite beams. J Sound Vib. 1994;176:597–612.

[4] Bhimaraddi A, Carr A, Moss P. A shear deformable finite element for the analysis of general shells of revolution. Comput Struct. 1989;31:299–308.

[5] Bhimaraddi A, Chandrashekhara K. Some observations on the modeling of laminated composite beams with general lay-ups. Compos Struct. 1991;19:371–80.

[6] Chandrashekhara K, Krishnamurthy K, Roy S. Free vibration of composite beams including rotary inertia and shear deformation. Compos Struct. 1990;14:269–79.

[7] Grant D. The effect of rotary inertia and shear deformation on the frequency and normal mode equations of uniform beams carrying a concentrated mass. J Sound Vib. 1978;57:357–65.

[8] Huang T. The effect of rotatory inertia and of shear deformation on the frequency and normal mode equations of uniform beams with simple end conditions. 1961.

[9] Singh M, Abdelnaser A. Random response of symmetric cross-ply composite beams with arbitrary boundary conditions. AIAA J. 1992;30:1081–8.

[10] Teh K, Huang C. The vibrations of generally orthotropic beams, a finite element approach. J Sound Vib. 1979;62:195–206.

[11] Kheladi Z, Hamza-Cherif SM, Ghernaout MEA. Free vibration analysis of variable stiffness laminated composite beams. Mech Adv Mater Struct. 2021;28:1889–916.

[12] Suresh JAV, Ramamurti C. Structural dynamic analysis of composite beams. J Sound Vib. 1990;143:503–19.

[13] Nguyen ND, Vo TP, Thai HT. Ritz-based analytical solutions for bending, buckling and vibration behavior of laminated composite beams. Int J Struct Stab Dyn. 2018;18:1850130.

[14] Ni Z, Hua H. Axial-bending coupled vibration analysis of an axially-loaded stepped multi-layered beam with arbitrary boundary conditions. Int J Mech Sci. 2018;138–139:187–98.

[15] Vo TP, Thai HT. Static behavior of composite beams using various refined shear deformation theories. Compos Struct. 2012;94:2513–22.

[16] Jafari-Talookolaei RA, Kargarnovin MH, Ahmadian MT. Free vibration analysis of cross-ply layered composite beams with finite length on elastic foundation. Int J Comput Methods. 2008;5:21–36.

[17] Krishnaswamy K, Wu WZB. Analytical solutions to vibration of generally layered composite beams. J Sound Vib. 1992;159. [Page range requires verification.]

[18] Chandrashekhara K, Madhav K. Free vibration of composite beams using a refined shear flexible beam element. Comput Struct. 1992;43:719–27.

[19] Teboub YH, [coauthor initials/name require verification]. Free vibration of generally layered composite beams using symbolic computations. Compos Struct. 1995;33:123–34.

[20] Goyal VK, Kapania RK. A shear-deformable beam element for the analysis of laminated composites. Finite Elem Anal Des. 2007;43:463–77.

[21] Jun L, Hongxing H, Rongying S. Dynamic finite element method for generally laminated composite beams. Int J Mech Sci. 2008;50:466–80.

[22] Aydogdu M. Free vibration analysis of angle-ply laminated beams with general boundary conditions. J Reinf Plast Compos. 2006;25:1571–83.

[23] Ahmed AM, Rifai AM. Euler-Bernoulli and Timoshenko beam theories analytical and numerical comprehensive revision. Eur J Eng Technol Res. 2021;6:20–32.

[24] Nguyen TK, Nguyen ND, Vo TP, Thai HT. Trigonometric-series solution for analysis of laminated composite beams. Compos Struct. 2017;160:142–51.

[25] Dash S, Dey T, Hati D. Influence of thermo-mechanical loads on variable stiffness composite beams: a comprehensive study using semi-analytical and finite element approaches. Mech Based Des Struct Mach. 2024;52:10555–82.

[26] Vo TP, Thai HT. Vibration and buckling of composite beams using refined shear deformation theory. Int J Mech Sci. 2012;62:67–76.

[27] Chen WQ, Lü CF, Bian ZG. A semi-analytical method for free vibration of straight orthotropic beams with rectangular cross-sections. Mech Res Commun. 2004;31:725–34.

[28] Yildirim V, Kiral E. Free vibration analysis of symmetric cross-ply laminated composite beams with the help of the transfer matrix approach. Commun Numer Methods Eng. 1999;15:651–60.

[29] Mantari JL, Canales FG. Free vibration and buckling of laminated beams via hybrid Ritz solution for various penalized boundary conditions. Compos Struct. 2016;152:306–15.

[30] Aydogdu M. Vibration analysis of cross-ply laminated beams with general boundary conditions by Ritz method. Int J Mech Sci. 2005;47:1740–55.

[31] Guendouz I, Guenfoud H, Khebizi M, Boumezbeur K, Guenfoud M. Buckling analysis of thin-walled laminated composite or functionally graded sandwich I-beams using a refined beam theory. Mech Based Des Struct Mach. 2025;53:180–200.