

Effects of Graphene Platelet Weight Fraction and Fractional Damping on Nonlinear Vibration Behavior of Fluid-Conveying Microtubules on a Nonlinear Viscoelastic Foundation

Sina Ghahnavieh ^a, Rouzbeh Nouhi Hefzabad ^b, Ahmad Homayooni ^{c*}

^a School of Mechanical Engineering, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran

^b School of Railway Engineering, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran

^c Department of Mechanical Engineering, Arak University of Technology, Arak, Iran

Original Article

Use your device to scan
and read the article online



Citation: Ghahnavieh S, Nouhi Hefzabad R, Homayooni A. Effects of Graphene Platelet Weight Fraction and Fractional Damping on Nonlinear Vibration Behavior of Fluid-Conveying Microtubules on a Nonlinear Viscoelastic Foundation. *Mechanics of Advanced and Smart Materials*. 2025;5(2):251-270.

 <https://10.66224/masm.5.2.251>

KEYWORDS

Cantilever microtubule
Conveying fluid,
Graphene platelet reinforced,
Natural frequency,
Nonlinear primary resonance,
Multiple scales method.

ABSTRACT

In this research, the primary resonance of a fractional viscoelastic microtube reinforced with graphene nanoplatelets conveying fluid and resting on a nonlinear viscoelastic foundation has been investigated. The main objective of this study is to analyze the effects of the graphene nanoplatelets weight fraction, the coefficients of the nonlinear fractional viscoelastic model, and damping on the nonlinear vibration behavior of the cantilever fluid-conveying microtube system. Using micromechanics theory, the modified couple stress theory, and mathematical modeling of the mechanical properties of graphene nanoplatelets and nonlinear fractional viscoelasticity within the framework of Euler-Bernoulli beam theory, the governing equations of motion for the fluid-conveying microtube were derived. The equations were discretized using the Galerkin method and subsequently solved by the multiple scales method. The results showed that an increase in the graphene nanoplatelets weight fraction parameter leads to a decrease in the nonlinear stiffness of the system. Furthermore, the response amplitude of the microtube undergoes a very significant reduction with an increase in the fractional viscoelastic derivative parameter. The findings of this investigation can be applied in the design and development of fluid force microscopes, medical instruments, and drug delivery systems.

Extended Abstract

1. Introduction

Microtubules containing fluid are used as primary components for fluid transfer or storage in various fields such as microelectromechanical systems [1], drug delivery [2, 3], biosensors [4], actuators [5], biology [6], semiconductors [7], and flowmeters. Therefore, recent advancements in this area have attracted researchers' interest in designing and constructing structures at micro and nano scales. For modeling structures at micro and nano scales, classical theories are not adequately capable of predicting behavior at the micro scale [8], and thus alternative theories such as couple stress theory, modified couple stress theory [9, 10], and strain gradient theory [11–13] must be used. These theories can exhibit interesting dynamic behaviors that are highly important in dynamic and vibration analyses.

* Corresponding author. Tel.: (+98) 08633400629

E-mail address: homayooni@arakut.ac.ir

DOI: <https://10.66224/masm.5.2.251>

Received: June 22, 2025; Received in revised form: July 30, 2025; Accepted: September 08, 2025.

© Author



In the domain of micro/nano tubes conveying fluid, numerous studies have focused on nonlinear vibration analysis and stability of these structures [14]. Oyelade et al. [17] studied nonlinear forced vibrations of slightly curved nanotubes conveying fluid using nonlocal strain gradient elasticity theory and demonstrated high sensitivity of dynamic behavior to size-dependent parameters and fluid velocity. Finally, Wu et al. [20] conducted nonlinear dynamic analysis of functionally graded micropipes conveying fluid with initial imperfections and showed that initial geometric imperfections can reduce critical frequencies, but functionally graded materials compensate for these effects. Collectively, these studies emphasize the importance of size effects, nonlinearities, and advanced materials in enhancing the performance of fluid-conveying tubes.

Modified couple stress theory, as a key tool for considering size effects in micro/nano structures, has been used in vibration and stability analysis of tubes and beams. Tang et al. [24] presented nonlinear modeling and size-dependent vibration analysis of curved microtubes conveying fluid based on this theory and showed that the characteristic length parameter increases bending stiffness and delays fluid velocity-induced instability. This research highlights the pivotal role of couple stress theory in accurately modeling nonlinear and size-dependent behaviors of small-scale structures. Research on micro/nano viscoelastic beams primarily focuses on fractional models and memory effects, examining nonlinear vibrations in the presence of viscoelastic damping. Loghman et al. [29] analyzed nonlinear vibrations of fractional viscoelastic micro-beams using non-integer order fractional models and showed that the fractional parameter affects the amplitude and frequency of nonlinear responses, with memory-dependent damping increasing stability. This study emphasizes the need for fractional models to accurately describe viscoelastic behavior at small scales. Reinforcing composite structures with graphene platelets (GPLs) in beams and plates has been the focus of recent research on improving mechanical and vibrational properties. Eyvazian et al. [36] analyzed free vibrations and post-buckling of rotating GPL-reinforced nanocomposite beams and showed that GPL distribution increases stiffness and improves post-buckling behavior. This research emphasizes the potential of GPLs in enhancing vibrational and thermal performance of nanocomposite structures and suggests their applications in advanced engineering.

Following a comprehensive review of the existing literature on fluid-conveying microtubes, a significant research gap was identified. To date, no comprehensive study has been conducted on the simultaneous investigation of primary resonance and frequency response of nonlinear viscoelastic microtubes — modeled using a nonlinear fractional viscoelastic model, reinforced with graphene platelets, and resting on a nonlinear Winkler foundation. Furthermore, most of the existing studies in this field have focused exclusively on fluid-conveying microtubes supported on viscoelastic foundations. Accordingly, the present study focuses on investigating the effects of graphene platelet weight fraction with different distribution patterns, as well as the fractional viscoelastic order, on the frequency response of fluid-conveying microtubes. In this study, the behavior of a clamped-free fluid-conveying viscoelastic microtube, modeled using the reinforced nonlinear fractional viscoelastic model, resting on a nonlinear viscoelastic foundation and subjected to a moving load, is investigated. Employing Hamilton's principle within the framework of Euler–Bernoulli beam theory combined with the modified couple stress theory, the governing equation of motion for the microtube was derived and subsequently discretized using the Galerkin method. The discretized equation of motion was then solved in the time domain using the method of multiple scales. Finally, the effects of the graphene platelet weight fraction parameter, the fractional viscoelastic derivative parameter, and damping on the response of the fluid-conveying microtube are presented.

2. Theory

Consider a cantilever fluid-conveying tube reinforced with graphene platelets (GPLs) and modeled using a fractional viscoelastic model, as shown in Figure 1. This tube rests on a nonlinear viscoelastic surrounding foundation. Since the micro-cantilever tube is embedded in both linear and nonlinear Winkler foundations, the foundation applies radial reactions in all directions surrounding the micro-tube. An incompressible viscous fluid is considered for deriving the equation of motion, taking into account the mass of the fluid per unit length. Additionally, the potential energy of the flow is zero [41]. The tube length, inner radius, and outer radius are denoted by L , r_i , and r_o , respectively. Furthermore, the mean flow velocity is denoted by v .

The Young's modulus of the graphene platelet-reinforced core is calculated using the Halpin-Tsai algorithm [42].

$$E_{nc} = E_M \left[\frac{3}{8} \left(\frac{1+2\xi_L \eta_L V_G}{1-\eta_L V_G} \right) + \frac{5}{8} \left(\frac{1+2\xi_B \eta_B V_G}{1-\eta_B V_G} \right) \right] \quad (1)$$

where

$$\xi_L = \frac{l_G}{t_G}, \xi_B = \frac{b_G}{t_G}, \eta_L = \frac{E_G/E_M - 1}{E_G/E_M + 2\xi_L}, \eta_B = \frac{E_G/E_M - 1}{E_G/E_M + 2\xi_B}. \tag{2}$$

In this relation, l_G , b_G , and t_G represent the average length, width, and thickness, respectively. E_M and E_G also denote the elasticity modulus of the matrix and the graphene platelet core. Additionally, the Poisson's ratio and density of the matrix and graphene platelet core are defined as follows:

$$v_{nc} = v_G V_G + v_M (1 - V_G), \rho_{nc} = \rho_G V_G + \rho_M (1 - V_G) \tag{3}$$

v_M and v_G represent the Poisson's ratio of the matrix and the graphene platelet core (nanofillers). The relations for various graphene distribution patterns along the thickness of the microtube, shown schematically in Figure 1, are derived as follows:

$$V_G = A_j Q_j(z) = S_j \times \begin{cases} \left[1 - \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right)\right] & ; (\text{Pattern A}) \\ \left[1 - \cos\left(\frac{\pi z}{2h} + \frac{\pi}{4}\right)\right] & ; (\text{Pattern B}) \\ 1 & ; (\text{Pattern C}) \end{cases} \tag{4}$$

In this relation, A_j ($j = 1, 2, 3$) and $Q_j(z)$ represent the graphene reinforcement functions and the volume fraction values of graphene platelets, respectively.

$$V_G = \frac{W_G}{W_G + (1 - W_G)\rho_G/\rho_M} \tag{5}$$

where W_G , ρ_G , and ρ_M are the weight fraction of graphene platelets, mass density, and matrix density of graphene platelets, respectively.

Considering structural damping effects and the stress-strain relation with a fractional viscoelastic model, as well as displacement components for an Euler-Bernoulli beam, the equations of motion within the modified couple stress theory framework are derived using Hamilton's principle [43].

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(\Pi_k - \Pi_s + W_{ff} + W_{ve} + \bar{W}) dt = 0, \tag{6}$$

Π_k , Π_s , W_{ve} , \bar{W} denote the kinetic energy, strain energy, work done by the fluid flow, work done by the nonlinear viscoelastic foundation, and work done by the harmonic force, respectively. The governing equation of motion is rewritten as follows.

$$\tilde{\eta}_d (EI + GAl^2) \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right) + (EI + GAl^2) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + m_f (VCF \times v_{ns})^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + k_l w + k_{nl} w^3 + 2m_f (VCF \times v_{ns}) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + c_d \frac{\partial w}{\partial t} + (m_{eq} + m_f) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f \cos \bar{\omega} t \delta(x - x_0), \tag{7}$$

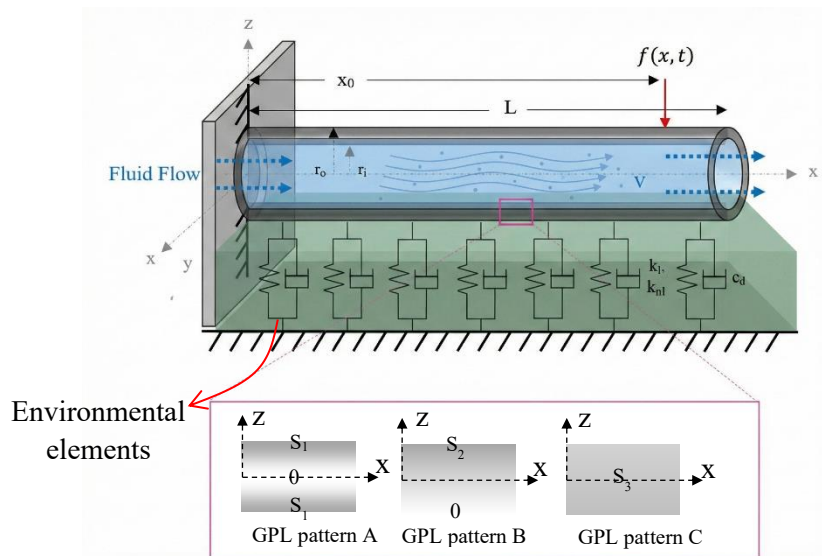


Figure 1. Schematic representation of a fluid-conveying microtubule reinforced with graphene platelets on a nonlinear viscoelastic foundation

According to Hamilton's principle, the boundary conditions for the cantilever microtube will be as follows:

$$x = 0: w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad x = L: \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0 \tag{8}$$

The dimensionless governing equation of motion and dimensionless boundary conditions are derived as follows:

$$\eta_d \overline{EI}(1 + \theta) \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right) + \overline{EI}(1 + \theta) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (VCF \times V)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2(VCF \times V) \sqrt{\beta_0} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial T^2} + K_t W + K_{nl} W^3 + C_d \frac{\partial w}{\partial T} + \frac{1}{\beta} \frac{\partial^2 w}{\partial T^2} = F \cos \Omega T \delta(X - X_0) \tag{9}$$

$$W = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \text{ at } X = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0 \text{ at } X = 1$$

The Galerkin method and the closed form $W(X, T) = \sum_{r=1}^N \varphi_r(X) q_r(T)$ are used to discretize equation (9), where $\varphi_r(X)$, $q_r(T)$, and N are the dimensionless mode shape functions, generalized coordinates, and number of modes of the cantilever microtube, respectively [44, 45].

3. Results

In this section, the effects of changes in graphene platelet weight, fluid velocity, Knudsen number, size parameter, and nonlinear viscoelastic foundation constants on the vibrations of the fluid-conveying microtube are examined. The mechanical and geometric properties of graphene platelets and polymeric matrix elements are in accordance with Tables 1 and 2.

Table 1 Physical specifications of the microtube [47]

Parameter and Physical Properties	Symbol (Unit)	Value
Tube length	$L(\mu m)$	250
Inner radius	$r_i(\mu m)$	110
Outer radius	$r_o(\mu m)$	125
Fluid density	$\rho_f(kg/m^3)$	1000

Table 2 Mechanical specifications of graphene platelets and polymeric matrix [48]

Parameter and Physical Properties	Symbol (Unit)	Value
Young's modulus of matrix material	$E_m(GPa)$	3
Density of matrix material	$\rho_m(kg/m^3)$	1200
Poisson's ratio of matrix material	ν_m	0.34
Young's modulus of graphene platelets	$E_{GPL}(GPa)$	1.01
Density of graphene platelets	$\rho_{GPL}(kg/m^3)$	1.0625
Poisson's ratio of graphene platelets	ν_{GPL}	0.186
Length of graphene platelets	$L_{GPL}(\mu m)$	2.5
Width of graphene platelets	$b_{GPL}(\mu m)$	1.5
Thickness of graphene platelets	$t_{GPL}(nm)$	1.5

3.1. Validation of Linear Analysis Results

To verify the accuracy, validity, and precision of the proposed solution method and formulation derived using modified couple stress theory, the results are compared with previous articles. In this section, the geometric and mechanical specifications follow Tables 1 and 2. Here, the first three eigenvalues of the fluid-conveying cantilever microtube, as shown in Figure 2, are studied. The figure shows the imaginary and real parts of the first three eigenvalues of the microtube. $Re(\Omega)$ indicates system stability, and when $Re(\Omega) < 0$, the system is stable. The results obtained in Figure 2 show very good correlation with the results obtained by Ni et al. [49].

3.1. Primary Resonance Response of the Microtube

In this section, the effects of various parameters on the frequency response of the fluid-conveying microtube reinforced with graphene platelets are examined. Here, the dimensionless values are:

$$W_G = 0.25\%(Pattern A), K_L = 10, K_{nl} = 5, \eta = C_d = 0, F = 2, X_0 = 0.9, \beta_0 = 0.5 \tag{10}$$

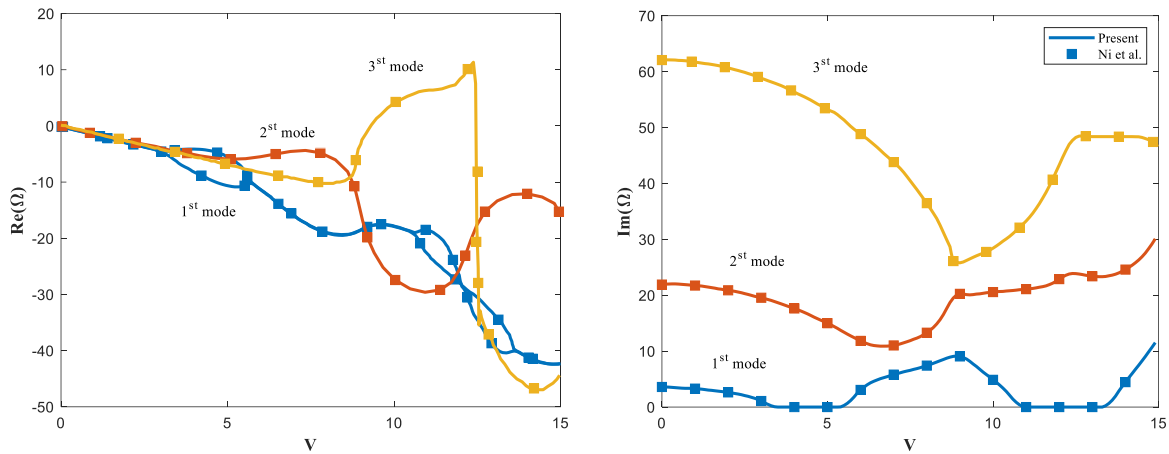


Figure 2 Validation of the first three eigenvalues of the microtube compared to Ni et al. [49]

In Figure 3, as the GPL volume weight parameter increases, the system's hardening behavior decreases. It is clearly evident that for a specific value of the detuning parameter and for a lower weight fraction, the response amplitude has the highest value. The displacement amplitude also experiences a significant decrease with an increase in the graphene platelet weight fraction parameter. With a decrease in the order of the fractional viscoelastic derivative and system damping, the maximum amplitude of the microtube increases. The softening effect of the microtube intensifies with an increase in the order of the fractional viscoelastic derivative.

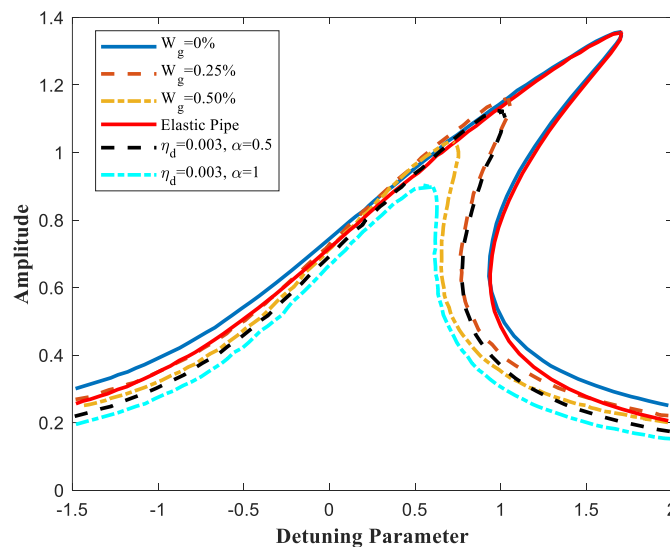


Figure 3 Effects of graphene platelet weight, order of fractional viscoelastic derivative, and damping on the frequency response of the microtube in terms of the detuning parameter

4. Conclusion and Discussion

This study analyzes size-dependent free vibration and steady-state response of fractional viscoelastic microtubes conveying fluid reinforced with graphene platelets on a nonlinear viscoelastic base, under harmonic force, within the modified couple stress theory framework. The microtubes consist of an epoxy polymer matrix with graphene platelet reinforcements that consider the length scale parameter. A nonlinear fractional viscoelastic model was used to represent the structural viscoelastic effect. Numerical results have shown that:

- Higher values of the linear coefficient K_L of the foundation increase the range of natural frequencies.
- The amplitude of the microtube response predicted by the fractional viscoelastic model is much larger than the amplitude reported by previous studies using the Kelvin-Voigt viscoelastic model.
- Increasing the graphene platelet weight fraction parameter reduces the hardening effect.
- Increasing the structural damping parameter and the fractional order reduces the hardening effect.

- Increasing the weight fraction parameter increases the force amplitude.
- With an increase in damping parameters and the order of the fractional derivative, bifurcation points shift toward larger force amplitude values.



اثرات کسر وزنی صفحات گرافن و میرایی کسری بر رفتار ارتعاشات غیرخطی میکرو لوله‌های حامل سیال بر بستر ویسکوالاستیک غیرخطی

سینا قهنویه^{الف}، روزبه نوحی حفظ‌آباد^ب، احمد همایونی^ج*

^{الف} کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران، siina.ghahnavieh@yahoo.com

^ب استادیار، دانشکده مهندسی راه‌آهن، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران، rouzbeh.nouhi@gmail.com

^ج استادیار، گروه طراحی جامدات، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اراک، اراک، ایران، homayooni@arakut.ac.ir

چکیده	واژگان کلیدی
در این پژوهش، رزونانس اولیه میکرو لوله ویسکوالاستیک کسری تقویت‌شده با صفحات گرافن حامل سیال بر روی بستر ویسکوالاستیک غیرخطی بررسی شده است. هدف اصلی از این مطالعه، تحلیل اثرات کسر وزنی صفحات گرافن، ضرایب مدل ویسکوالاستیک کسری غیرخطی و میرایی بر رفتار ارتعاشات غیرخطی سیستم میکرولوله کانتیلور حامل سیال می‌باشد. با استفاده از تئوری میکرومکانیک، تنش کوپل اصلاح‌شده و مدل‌سازی ریاضی خواص مکانیکی صفحات گرافنی و ویسکوالاستیک کسری غیرخطی در چارچوب تئوری تیر اویلر - برنولی، معادلات حاکم بر حرکت برای میکرو لوله حامل سیال استخراج شد. معادلات با روش گالرکین گسسته‌سازی و سپس با روش مقیاس چندگانه حل گردید. نتایج نشان داد که افزایش پارامتر وزنی صفحات گرافنی منجر به کاهش سفتی غیرخطی سیستم می‌شود. همچنین دامنه پاسخ میکرو لوله با افزایش پارامتر مشتق ویسکوالاستیک کسری، کاهش بسیار قابل توجهی دارد. یافته‌های این تحقیق می‌تواند در طراحی و توسعه میکروسکوپ‌های نیروی سیال، ابزارهای پزشکی و سیستم‌های دارورسانی کاربرد داشته باشد.	میکرو لوله‌های کانتیلور حامل سیال، صفحات گرافنی تقویت شده، فرکانس طبیعی، رزونانس اولیه غیرخطی، روش مقیاس چندگانه
	تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۰۴/۰۱
	تاریخ بازنگری: ۱۴۰۴/۰۵/۰۸
	تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۰۶/۱۷

۱- مقدمه

از میکرو لوله‌های حاوی سیال به‌عنوان اجزای اصلی انتقال یا ذخیره‌ی سیال در زمینه‌های مختلف مانند سیستم‌های میکروالکترومکانیکی [۱]، دارورسانی [۲، ۳]، سنسورهای زیستی [۴]، محرک‌ها [۵]، بیولوژی [۶]، نیمه رساناها [۷]، فلومترها استفاده می‌شود. از این‌رو، پیشرفت‌های اخیر در این حوزه محققان را علاقه‌مند به طراحی و ساخت ساختارهای در ابعاد میکرو و نانو کرده است. برای مدل‌سازی ساختارهای در ابعاد میکرو و نانو تئوری‌های کلاسیک به درستی قادر به پیش‌بینی رفتار در مقیاس میکرو نیستند [۸] و لذا از تئوری‌های جایگزین مانند تئوری تنش کوپل، تئوری تنش کوپل اصلاح شده [۹، ۱۰]، تئوری گرادیان کرنش [۱۱-۱۳] برای این موضوع باید استفاده شود و این تئوری‌ها قادر هستند که رفتارهای دینامیکی جالبی را نشان دهند که در تحلیل‌های دینامیکی و ارتعاشاتی بسیار حائز اهمیت هستند.

در حوزه تیوب‌های میکرو/نانو حامل سیال، تحقیقات متعددی بر تحلیل ارتعاشات غیرخطی و پایداری این سازه‌ها تمرکز کرده‌اند [۱۴]. مشروطه و همکاران [۱۵] با استفاده از تئوری غیرخطی ارتعاشات، مدل‌سازی دینامیکی لوله‌های میکرو حامل

* نویسنده مسئول؛ تلفن: ۰۸۶۳۳۴۰۰۶۲۹

آدرس پست الکترونیک: homayooni@arakut.ac.ir

سیال را بررسی کرده و نشان دادند که اثرات غیرخطی هندسی و اینرسی سیال بر فرکانس‌های طبیعی و رفتار ارتعاشی تأثیر قابل توجهی دارند، به طوری که افزایش سرعت سیال می‌تواند منجر به ناپایداری شود. ما و مو [۱۶] ارتعاشات غیرخطی تیوب‌های میکرو با گرادیان عملکردی تحت بارگذاری عرضی را تحلیل کرده و با بهره‌گیری از روش‌های عددی، تأکید کردند که توزیع مواد گرادیان عملکردی می‌تواند سختی ساختاری را افزایش داده و پاسخ‌های غیرخطی را تعدیل کند. اوایلاده و همکاران [۱۷] با اعمال تئوری الاستیسیته کرنش گرادیان غیرمحلّی بر نانو تیوب‌های کمی خمیده حامل سیال، ارتعاشات اجباری غیرخطی را مورد مطالعه قرار داده و نتایج نشان‌دهنده حساسیت بالای رفتار دینامیکی به پارامترهای اندازه‌محور و سرعت سیال است. Li و همکاران [۱۸] دینامیک غیرخطی و سرکوب ارتعاشات لوله‌های تقویت‌شده با پلاکت‌های گرافن حامل سیال را بررسی کرده و با استفاده از کنترل فعال، نشان دادند که افزودن پلاکت‌های گرافن سختی و میرایی را بهبود بخشیده و آستانه ناپایداری را افزایش می‌دهد. ابراهیمی و ضیایی‌راد [۱۹] ارتعاشات غیرصفحه‌ای و فلاتر تیوب‌های پیزوالکتریک چرخان عمودی حامل سیال را مورد بررسی قرار داده و تأکید کردند که ولتاژ اعمال‌شده پیزوالکتریک می‌تواند رفتار فلاتر را کنترل کند. درنهایت، وو و همکاران [۲۰] تحلیل دینامیک غیرخطی میکرولوله‌های گرادیان عملکردی حامل سیال با نقص‌های اولیه را انجام داده و نشان دادند که نقص‌های هندسی اولیه می‌تواند فرکانس‌های بحرانی را کاهش دهد، اما مواد گرادیان عملکردی این اثرات را جبران می‌کنند. این مطالعات جمعاً بر اهمیت اثرات اندازه‌محور، غیرخطی‌ها و مواد پیشرفته در بهبود عملکرد تیوب‌های حامل سیال تأکید دارند.

عسکریان و همکاران [۲۱] پایداری دینامیکی لوله‌های کوتاه تیموشنکو حامل سیال روی پایه‌های ویسکوالاستیک کسری را بررسی کردند. نتایج نشان داد افزایش نسبت لاغری، سرعت بحرانی فلوئر را افزایش می‌دهد و پایداری سیستم به پارامتر جرم سیال، مرتبه کسری، سختی و میرایی پایه بسیار حساس است. صبحی [۲۲] خمش استاتیک غیرخطی و ارتعاش غیرخطی پوسته‌های استوانه‌ای میکرو FG-CNT حامل میکروسیال تحت میدان مغناطیسی دوبعدی را تحلیل کرد. یافته‌ها نقش مثبت جریان سیال، تقویت CNT و میدان مغناطیسی را بر رفتار ساختاری تأیید کرد؛ همچنین اعمال اثرات اندازه کوچک (تئوری جفت تنش اصلاح‌شده و عدد نودسن) دامنه موج انحراف را به‌طور قابل توجهی کاهش می‌دهد. مرادی و همکاران [۲۳] ارتعاش غیرخطی و رزونانس اولیه نانوپلیت‌های ساندویچی متخلخل FG/لیپید را بر پایه تئوری گرادیان کرنش غیرمحلّی و FSĐT مطالعه کردند. نتایج حاکی از تأثیر قوی شاخص‌های غیرمحلّی و گرادیان کرنش، کسر حجمی تخلخل و ویسکوالاستیسیته لایه‌های لیپید بر فرکانس‌های طبیعی، دامنه ارتعاش و رفتار رزونانس است که برای طراحی نانوبایوسنسورهای زیست‌سازگار کاربرد مستقیم دارد.

تئوری تنش کوپل تغییر یافته به عنوان ابزاری کلیدی برای در نظرگیری اثرات اندازه‌محور در سازه‌های میکرو/نانو، در تحلیل ارتعاشات و پایداری تیوب‌ها و تیرها مورد استفاده قرار گرفته است. تانگ و همکاران [۲۴] مدل‌سازی غیرخطی و تحلیل ارتعاشات وابسته به اندازه تیوب‌های خمیده میکرو حامل سیال را بر اساس این تئوری ارائه کرده و نشان دادند که پارامتر طول ویژگی تنش کوپل سختی خمشی را افزایش داده و ناپایداری ناشی از سرعت سیال را به تأخیر می‌اندازد. امیری و طالبی توتی [۲۵] ارتعاشات و پایداری میکروپایپ‌های ساندویچی حامل سیال با هسته الاستومر مغناطیسی نانولوله‌ای را با در نظرگیری غیرخطی‌های هندسی بررسی کرده و اثرات میدان مغناطیسی بر میرایی و کنترل ارتعاشات را برجسته ساختند. آتیا و امام [۲۶] خمش، کماتش و ارتعاشات آزاد غیرخطی الکترواستاتیک میکروتیرهای ویسکوالاستیک را تحلیل کرده و تأکید کردند که تنش کوپل تغییر یافته رفتار کماتش را بهبود بخشیده و فرکانس‌های طبیعی را تحت تأثیر ولتاژ الکتریکی قرار می‌دهد. Atcı [۲۷] ارتعاشات غیرخطی میکروتیرهای ترک‌خورده را بر اساس این تئوری مورد مطالعه قرار داده و نشان داد که ترک‌ها سختی را کاهش می‌دهند، اما اثرات اندازه‌محور می‌توانند این کاهش را تعدیل کنند. بابایی و عرب قهستانی [۲۸] ارتعاشات آزاد تیرهای چرخان را با استفاده از تئوری تنش کوپل و میدان جابجایی کوپل شده تحلیل کرده و بر وابستگی فرکانس‌ها به سرعت چرخش و پارامترهای اندازه‌محور تأکید ورزیدند. این تحقیقات نشان‌دهنده نقش محوری تئوری تنش کوپل در مدل‌سازی دقیق رفتارهای غیرخطی و اندازه‌محور سازه‌های کوچک مقیاس است.

تحقیقات بر تیرهای میکرو/نانو ویسکوالاستیک عمدتاً بر مدل‌های کسری و اثرات حافظه متمرکز است و ارتعاشات غیرخطی را در حضور میرایی ویسکوالاستیک بررسی می‌کند. لقمان و همکاران [۲۹] ارتعاشات غیرخطی میکروتیرهای ویسکوالاستیک کسری را با استفاده از مدل‌های کسری مرتبه غیرصحیح تحلیل کرده و نشان دادند که پارامتر کسری بر دامنه و فرکانس پاسخ‌های

غیرخطی تأثیرگذار است و میرایی حافظه‌دار پایداری را افزایش می‌دهد. القاهر و همکاران [۳۰] راه‌حل تحلیلی ارتعاشات آزاد نانوتیرهای ویسکوالاستیک سوراخ‌دار را ارائه کرده و اثرات سوراخ‌کاری بر فرکانس‌های طبیعی و میرایی را با مدل‌های ویسکوالاستیک برجسته ساختند. جوادی و رحمانیان [۳۱] ارتعاشات غیرخطی تیر ویسکوالاستیک کلونین-ووگیت کسری بر پایه الاستیک غیرخطی را بررسی کرده و تأکید کردند که مدل کسری کلونین-ووگیت رفتار گذرا را دقیق‌تر توصیف می‌کند. یوزرا و همکاران [۳۲] ارتعاشات اجباری غیرخطی تیرهای ساندویچی FG-CNTRC با هسته ویسکوالاستیک تحت شرایط مرزی متنوع را تحلیل کرده و نقش توزیع نانولوله‌های کربنی در تعدیل پاسخ‌های غیرخطی را نشان دادند. ژانگ و همکاران [۳۳] ارتعاشات غیرخطی تیر محوری متحرک با میرایی ویسکوالاستیک کسری را مورد مطالعه قرار داده و اثرات سرعت محوری بر فرکانس‌های بحرانی را برجسته ساختند. محمد و همکاران [۳۴] دینامیک غیرخطی و ارتعاشات اجباری میکروتیرهای ویسکوالاستیک کسری به روش کوادریچر تفاضلی کسری را بررسی کرده و دقت روش عددی را در پیش‌بینی رفتارهای پیچیده تأیید کردند. وانگ و همکاران [۳۵] تحلیل ارتعاشات غیرخطی نانوتیرهای پیژوالکتریک ویسکوالاستیک کسری غیرمحلی با اثرات سطحی را انجام داده و بر تعامل اثرات سطحی و کسری در افزایش سختی تأکید ورزیدند. این مطالعات جمعاً بر لزوم مدل‌های کسری برای توصیف دقیق رفتار ویسکوالاستیک در مقیاس‌های کوچک تأکید دارند.

تقویت سازه‌های کامپوزیتی با پلاکت‌های گرافن (GPLs) در تیرها و ورق‌ها، تمرکز تحقیقات اخیر بر بهبود خواص مکانیکی و ارتعاشی بوده است. عیوضیان و همکاران [۳۶] ارتعاشات آزاد و پساکامشی تیرهای نانوکامپوزیتی چرخان تقویت‌شده با GPL را تحلیل کرده و نشان دادند که توزیع GPL سختی را افزایش داده و رفتار پساکامشی را بهبود می‌بخشد. کیان و همکاران [۳۷] فرکانس طبیعی میانی غیرخطی مرطوب تیر کامپوزیتی دی‌الکتریک تقویت‌شده با GPLs را بررسی کرده و اثرات دی‌الکتریک بر میرایی و فرکانس را برجسته ساختند. گو و آروین [۳۸] ناپایداری کم‌انرژی غیرخطی تیر نانوکامپوزیتی چرخان تقویت‌شده با GPL را با روش چیبیشف-ریتر تحلیل کرده و نقش گرافن در افزایش مقاومت حرارتی را نشان دادند. عباسپور و همکاران [۳۹] کنترل فعال ارتعاشات میکروورق‌های مستطیلی نانوکامپوزیتی پیژوالکتریک تقویت‌شده با GPL در محیط حرارتی با در نظرگیری میرایی ساختاری را مورد مطالعه قرار داده و کارایی کنترل پیژوالکتریک را تأیید کردند. انصاری و همکاران [۴۰] ارتعاشات غیرخطی پانل‌های مخروطی کامپوزیتی با برش دلخواه تقویت‌شده با GPL را بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالاتر بررسی کرده و اثرات برش بر پاسخ‌های غیرخطی را برجسته ساختند. این تحقیقات بر پتانسیل GPLs در ارتقای عملکرد ارتعاشی و حرارتی سازه‌های نانوکامپوزیتی تأکید دارند و کاربردهای آن‌ها را در مهندسی پیشرفته پیشنهاد می‌کنند.

با مطالعه و مرور جامع ادبیات پژوهشی در حوزه میکرو لوله‌های حاوی سیال، خلأ پژوهشی مهمی شناسایی شد؛ تاکنون هیچ مطالعه جامعی بر بررسی هم‌زمان رزونانس اولیه و پاسخ فرکانسی میکرو لوله‌های ویسکوالاستیک غیرخطی - که با مدل ویسکوالاستیک کسری غیرخطی مدل‌سازی شده و با صفحات گرافنی تقویت گردیده و بر بستر وینکلر غیرخطی قرار دارد - انجام نشده است. افزون بر این، اکثر تحقیقات موجود در این حوزه صرفاً بر میکرو لوله‌های حاوی سیال روی بسترهای ویسکوالاستیک تمرکز داشته‌اند. از این رو، در پژوهش حاضر تمرکز بر بررسی اثر وزن صفحات گرافنی با الگوهای توزیع متفاوت و همچنین مرتبه کسری ویسکوالاستیک بر پاسخ فرکانسی میکرو لوله حاوی سیال قرار گرفته است. در ادامه به بررسی یک میکرو لوله‌ی حاوی سیال یک سر گیردار - یک سر آزاد ویسکوالاستیک مدل شده با مدل کسری غیرخطی تقویت شده که بر روی بستر ویسکوالاستیک غیرخطی و تحت اثر بار متحرک می‌باشد، پرداخته شد. با استفاده از اصل همپلتون در چارچوب تئوری تیر اویلر-برنولی و تئوری تنش زوج اصلاح شده، معادله‌ی حاکم بر حرکت میکرو لوله استخراج شد و با استفاده از روش گالرکین معادله‌ی حرکت گسسته-سازی شد. معادله‌ی حرکت با به‌کارگیری روش مقیاس چندگانه در حوزه زمان حل شد. در نهایت، اثر پارامتر کسر وزنی صفحات گرافنی، پارامتر مشتق ویسکوالاستیک کسری و میرایی بر روی پاسخ میکرو لوله‌ی حامل سیال نشان داده شد.

۲- تئوری

یک لوله حاوی سیال کانتیلور را که با صفحات گرافن (GPL) تقویت شده و با استفاده از یک مدل ویسکوالاستیک کسری

مدل‌سازی شده است، طبق شکل (۱) در نظر بگیرید. این لوله بر روی یک بستر ویسکوالاستیک غیرخطی محیطی قرار گرفته است. از آنجایی که میکروکانتیلور در بستر وینکلر خطی و غیرخطی غوطه‌ور است، بستر به صورت شعاعی و در تمامی جهات بر میکرو لوله اعمال شده است. یک سیال ویسکوز تراکم‌ناپذیر که در آن جرم سیال بر واحد طول است برای استخراج معادله حرکت در نظر گرفته شده است. علاوه بر این، انرژی پتانسیل جریان صفر است [۴۱]. طول لوله، شعاع داخلی و شعاع بیرونی به ترتیب با L ، r_i و r_o نمایش داده شده است. همچنین سرعت جریان متوسط با v نشان داده می‌شود.

از طریق روابط زیر مدول یانگ هسته‌ی تقویت شده‌ی صفحات گرافنی توسط الگوریتم هالپین - تسای محاسبه می‌شود [۴۲].

$$E_{nc} = E_M \left[\frac{3}{8} \left(\frac{1+2\xi_L \eta_L V_G}{1-\eta_L V_G} \right) + \frac{5}{8} \left(\frac{1+2\xi_B \eta_B V_G}{1-\eta_B V_G} \right) \right] \quad (۱)$$

که در آن

$$\xi_L = \frac{l_G}{t_G}, \xi_B = \frac{b_G}{t_G}, \eta_L = \frac{E_G/E_M - 1}{E_G/E_M + 2\xi_L}, \eta_B = \frac{E_G/E_M - 1}{E_G/E_M + 2\xi_B} \quad (۲)$$

در این رابطه l_G و b_G و t_G به ترتیب طول، عرض و ضخامت میانگین را نشان می‌دهند. E_G و E_M نیز مدول الاستیسیته ماتریس و هسته‌ی صفحات گرافنی را نشان می‌دهد. علاوه بر این نسبت پواسون و چگالی ماتریس و هسته‌ی صفحات گرافنی به شکل زیر تعریف می‌شود.

$$v_{nc} = v_G V_G + v_M (1 - V_G), \rho_{nc} = \rho_G V_G + \rho_M (1 - V_G) \quad (۳)$$

v_G و v_M نسبت پواسون ماتریس و هسته‌ی (نانو فیله‌های) صفحات گرافنی را نشان می‌دهد.

روابط الگوهای مختلف توزیع گرافن در راستای ضخامت میکرو لوله که به صورت شماتیک در شکل (۱) نشان داده شده است، به صورت زیر استخراج می‌گردد.

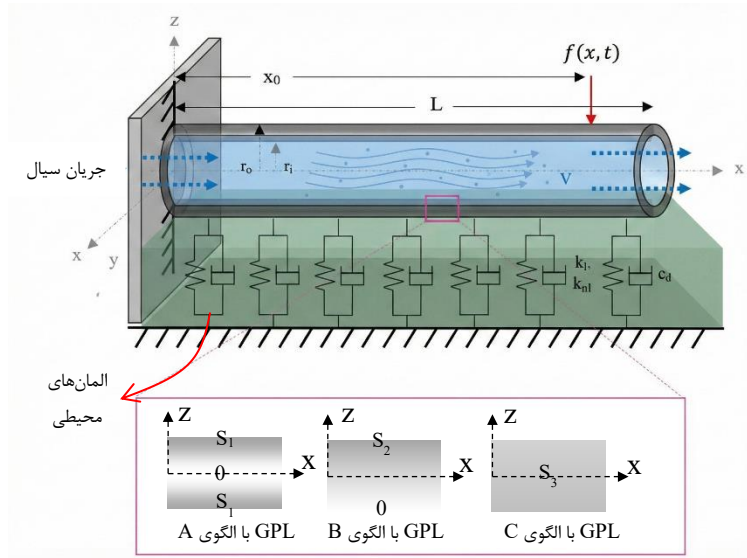
$$V_G = A_j Q_j(z) = S_j \times \begin{cases} \left[1 - \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right] & ; \text{(الگوی A)} \\ \left[1 - \cos\left(\frac{\pi z}{2h} + \frac{\pi}{4}\right) \right] & ; \text{(الگوی B)} \\ 1 & ; \text{(الگوی C)} \end{cases} \quad (۴)$$

در این رابطه $Q_j(z)$ و A_j ($j = 1, 2, 3$) به ترتیب توابع تقویت گرافن و مقادیرهای کسر حجمی صفحات گرافنی را نشان می‌دهد.

$$V_G = \frac{W_G}{W_G + (1 - W_G)\rho_G/\rho_M} \quad (۵)$$

که در آن W_G ، ρ_G و ρ_M به ترتیب کسر وزنی صفحات گرافنی، چگالی جرمی و ماتریس صفحات گرافنی می‌باشند.

مطابق شکل (۱) در الگوی A، که توزیع متقارن را نشان می‌دهد، نسبت حجمی GPLها در راستای ضخامت بر اساس تابع کسینوس متفاوت است. هر دو سطح داخلی و خارجی لوله در این الگو غنی از GPL هستند. در الگوی B یک کسر حجمی یکنواخت کاهشی GPLها از سطح بیرونی به سطح داخلی دیواره لوله نشان داده شده است که در نتیجه نسبت حجمی یکنواخت GPL در سراسر ضخامت ایجاد می‌شود. الگوی C دارای توزیع یکنواخت صفحات گرافن در سراسر میکرو لوله است که کسر حجمی ثابتی را در امتداد محور z حفظ می‌کند.



شکل ۱ نمای شماتیک از میکرو لوله حاوی سیال تقویت شده با صفحات گرافنی غوطه‌ور در بستر ویسکوالاستیک غیرخطی

با در نظر گرفتن اثرات میرایی ساختاری و رابطه‌ی تنش- کرنش با مدل ویسکوالاستیک کسری و نیز در نظر گرفتن مؤلفه‌های جابجایی برای یک تیر اوپلر برنولی، معادلات حرکت در چارچوب تئوری تنش کوپل اصلاح شده با استفاده از اصل همپلتون استخراج می‌شود [۴۳].

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(\Pi_k - \Pi_s + W_{ff} + W_{ve} + \bar{W}) dt = 0, \quad (6)$$

با Π_k , Π_s , W_{ff} , W_{ve} و \bar{W} به ترتیب انرژی جنبشی، انرژی کرنشی، کار انجام شده توسط جریان سیال، کار انجام شده توسط بستر ویسکوالاستیک غیرخطی و کار انجام شده توسط نیروی هارمونیک هستند.

$$\Pi_k = \frac{1}{2} \int_0^L m_{eq} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (7)$$

$$\Pi_s = \frac{1}{2} \int_0^L (\int (\sigma_{xx} \delta \epsilon_{xx} + m_{xy} \delta \chi_{xy}) dA) dx,$$

که در آن σ_{xx} ، تنش محوری، ϵ_{xx} کرنش محوری، χ_{xy} بخش متقارن تانسور خمیدگی و m_{xy} قسمت انحرافی تانسور تنش کوپل شده می‌باشد. لازم به ذکر است که کار نیروی خارجی اعمال شده توسط جریان سیال ویسکوز به صورت زیر است.

$$W_{ff} = - \int_0^L m_f \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2v \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + v^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad (8)$$

که در آن m_f جرم سیال بر واحد طول و v سرعت متوسط جریان آن می‌باشد. همچنین کار نیروی بستر ویسکوالاستیک غیرخطی به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$f_{ve} = \left(k_l w + k_{nl} w^3 + c_d \frac{\partial w}{\partial t} \right), \quad (9)$$

که در آن ضریب سختی وینکلر، مدول غیرخطی وینکلر و ضریب میرایی بستر غیرخطی به ترتیب با k_l ، k_{nl} و c_d نمایش داده شده است. لازم به ذکر است که کار کلی انجام شده توسط بستر غیرخطی سیال به صورت $W_{ve} = - \int_0^L f_{ve} w dx$ است. علاوه بر این، کار انجام شده توسط نیروی هارمونیک به صورت $\bar{W} = \int_0^L f(x, t) w dx$ می‌باشد. اثر لغزش نیز مطابق رابطه‌ی $v = v_s = VCF \times v_{ns}$ تعریف شده است و رابطه‌ی (۱۰) با فرض شرایط مرزی غیرلغزشی استفاده می‌شود [۴۴].

$$VCF = \left(1 + \frac{128 \tan^{-1}(4Kn^{0.04})}{30\pi^2} Kn \right) \left[1 + 4 \left(\frac{2-\chi}{\chi} \right) \left(\frac{Kn}{1+Kn} \right) \right] \quad (10)$$

که در آن Kn ، عدد نادسن مربوط به ویسکوزیته‌ی سیال است. با جایگذاری معادلات (۷-۱۰) در رابطه‌ی (۶)، معادله‌ی حاکم بر حرکت مطابق رابطه‌ی زیر استخراج می‌شود.

$$\begin{aligned} \ddot{\eta}_d(EI + GAL^2) \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right) + (EI + GAL^2) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + m_f(VCF \times v_{ns})^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + k_l w + k_{nl} w^3 + \\ 2m_f(VCF \times v_{ns}) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + c_d \frac{\partial w}{\partial t} + (m_{eq} + m_f) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f \cos \bar{\omega} t \delta(x - x_0) \end{aligned} \quad (11)$$

که در آن $\bar{\omega}$ فرکانس تحریک نیروی هارمونیک می‌باشد. با توجه به اصل همپلتون، شرایط مرزی برای میکرو لوله‌ی کانتیلور به صورت زیر خواهد بود.

$$x = 0: w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad x = L: \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0 \quad (12)$$

که در آن m_{eq} جرم معادل لوله بر واحد طول میکرو لوله است و EI_{eq} سفتی خمشی معادل لوله می‌باشد که با استفاده از رابطه‌ی (۱۳) تعریف می‌شود.

$$\begin{aligned} EI_{eq} = \int E(r) z^2 dA = \int_0^{2\pi} \int_{r_i}^{r_o} E(r) r^2 \sin^2(\theta) r dr d\theta, \\ m_{eq} = \int \rho(r) dA = \int_0^{2\pi} \int_{r_i}^{r_o} \rho(r) r dr d\theta. \end{aligned} \quad (13)$$

پارامترهای بی بعد معادله‌ی حاکم بر حرکت به صورت زیر تعریف شده‌اند.

$$\begin{aligned} X = \frac{x}{L}, W = \frac{w}{L}, T = \frac{t}{L^2} \sqrt{\frac{EI_0}{(m_0 + m_f)}}, V = Lv_{ns} \sqrt{m_f/EI_0}, \beta_0 = \frac{m_f}{m_0 + m_f}, \\ \eta_d = \frac{\ddot{\eta}_d}{L^2} \left(\frac{EI_0}{(m_0 + m_f)} \right)^{\frac{\alpha}{2}}, C_d = \frac{c_d L^2}{EI_0(m_0 + m_f)}, \theta = \frac{GAL^2}{EI_0}, \bar{\Omega} = \bar{\omega} L^2 \sqrt{\frac{(m_0 + m_f)}{EI_0}}, \\ K_l = \frac{k_l L^2}{EI_0}, K_{nl} = \frac{k_{nl} L^6}{EI_0}, \bar{EI} = \frac{EI_{eq}}{EI_0}, \bar{\beta} = \frac{m_0 + m_f}{m_{eq} + m_f}, F = \frac{fL^3}{EI_0}. \end{aligned} \quad (14)$$

با جایگذاری رابطه‌ی (۱۴) در روابط (۱۱-۱۲)، معادله‌ی بی بعد حاکم بر حرکت و نیز شرایط مرزی بی بعد استخراج می‌گردد.

$$\begin{aligned} \eta_d \bar{EI} (1 + \theta) \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \left(\frac{\partial^4 W}{\partial X^4} \right) + \bar{EI} (1 + \theta) \frac{\partial^4 W}{\partial X^4} + (VCF \times V)^2 \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + 2(VCF \times V) \sqrt{\beta_0} \frac{\partial^3 W}{\partial X \partial T^2} + K_l W + \\ K_{nl} W^3 + C_d \frac{\partial W}{\partial T} + \frac{1}{\bar{\beta}} \frac{\partial^2 W}{\partial T^2} = F \cos \bar{\Omega} T \delta(X - X_0) \\ W = \frac{\partial W}{\partial X} = 0 \text{ at } X = 0; \quad \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} = \frac{\partial^3 W}{\partial X^3} = 0 \text{ at } X = 1 \end{aligned} \quad (15)$$

۳- روش حل

روش گالرکین و فرم بسته‌ی $W(X, T) = \sum_{r=1}^N \varphi_r(X) q_r(T)$ برای گسسته‌سازی رابطه‌ی (۱۵) استفاده می‌شود که در آن $\varphi_r(X)$ ، $q_r(T)$ و N به ترتیب توابع بی بعد شکل مد، مختصات کلی و تعداد مد میکرو لوله کانتیلور می‌باشند [۴۴، ۴۵].

$$\varphi_r(X) = \text{Cosh}(\lambda_r X) - \text{Cos}(\lambda_r X) - \left(\frac{\text{Sinh} \lambda_r - \text{Sin} \lambda_r}{\text{Cosh} \lambda_r + \text{Cos} \lambda_r} \right) (\text{Sinh}(\lambda_r X) - \text{Sin}(\lambda_r X)) \quad (16)$$

که در رابطه‌ی (۱۶) λ_r - r امین مقدار ویژه‌ی بی بعد r -امین مد است که می‌تواند توسط معادله $\text{Cosh}(\lambda_r) * \text{Cos}(\lambda_r) + 1 = 0$ محاسبه شود. لازم به ذکر است که با در نظر گرفتن مد اصلی و جایگذاری مد شکل در رابطه‌ی (۱۸) بعد از انجام عملیات اصلی، رابطه‌ی زیر به دست خواهد آمد.

$$c_0 \frac{d^2 q(T)}{dT^2} + c_1 q(T) + c_2 q(T)^3 + c_3 D^r q(T) + c_4 \frac{dq(T)}{dT} = f^* \cos(\bar{\Omega} T), \quad (17)$$

که در آن $f^* = F \varphi(X_0)$ می‌باشد و ضرایب به صورت زیر به دست خواهد آمد.

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{\bar{\beta}} \int_0^1 \varphi^2 dX \\ c_1 &= \bar{EI} (1 + \theta) \int_0^1 \varphi^{(4)} \varphi dX + (VCF \times V)^2 \int_0^1 \varphi'' \varphi dX + K_l \int_0^1 \varphi^2 dX, \\ c_2 &= K_{nl} \int_0^1 \varphi^4 dX, \\ c_3 &= \eta_d \bar{EI} (1 + \theta) \int_0^1 \varphi^{(4)} \varphi dX, \\ c_4 &= 2(VCF \times V) \sqrt{\beta_0} \int_0^1 \varphi' \varphi dX + C_d \int_0^1 \varphi^2 dX. \end{aligned} \quad (18)$$

برای تحلیل فرکانسی سیستم خطی، قسمت غیر خطی و نیروی هارمونیک در نظر گرفته نمی شوند. با فرض حرکت هارمونیک در فرم $q(T) = qe^{i\Omega T}$ و جایگذاری در رابطه (۱۷)، معادله مشخصه سیستم که دارای دو ریشه مزدوج است به دست خواهد آمد.

$$\det(-c_0 \Omega^2 + ic_4 \Omega + c_1) = 0 \quad (۱۹)$$

با فرض $\bar{\Omega} = \Omega_{ex} = \Omega + \epsilon \sigma$ برای ارتعاشات اجباری غیر خطی، که در آن σ پارامتر انحراف تشدید نامیده می شود و انحراف فرکانس تحریک Ω_{ex} از Ω فرکانس میکرو لوله می باشد. سپس روش مقیاس چندگانه برای تحلیل ارتعاشات اجباری میکرو لوله استفاده می شود.

روش حل بر اساس مقیاس بندی زمانی معادله غیر خطی انجام می پذیرد. در این روش عموماً معادلات در مقیاس کند ($T_0 = T$)، تند ($T_1 = \epsilon T$) و تندتر ($T_1 = \epsilon^2 T$) تفکیک می شوند و جواب نهایی به صورت حاصل جمع پاسخ های مقیاس های سه گانه حاصل می گردد ($q_0(T_0, T_1), q_1(T_0, T_1)$). بر مبنای روش مقیاس چندگانه، پاسخ زمانی سیستم را می توان حول ϵ که پارامتر کوچک اغتشاش نامیده می شود، به صورت معادله ی زیر بسط داد [۴۶].

$$q(T) = q_0(T_0, T_1) + \epsilon q_1(T_0, T_1), \quad (۲۰)$$

که در رابطه (۲۰)، $T_1 = \epsilon T, T_0 = T$ ، مشتقات نسبت به هر یک از این مقیاس های زمانی به صورت زیر به دست می آیند که در آن $D_n = \partial/\partial T_n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$)

$$\frac{d}{dT} = D_0 + \epsilon D_1 \text{ and } \frac{d^2}{dT^2} = D_0^2 + 2\epsilon D_0 D_1 + \epsilon^2 D_1^2 \quad (۲۱)$$

جایگذاری رابطه (۲۰) در رابطه (۱۹) و انجام عملیات ریاضی منجر به رابطه (۲۲) خواهد شد.

$$\epsilon^0: D_0^2 q_0(T_0, T_1) + c_1 q_0(T_0, T_1) = 0 \quad (۲۲-الف)$$

$$\epsilon^1: c_0 D_0^2 q_1 + \Omega^2 q_1 = -2[i\Omega A'(T_1)e^{i\Omega T_0} - i\Omega \bar{A}'(T_1)e^{i\Omega T_0}] - c_2[A^3(T_1)e^{3i\Omega T_0} + 3A^2(T_1)\bar{A}(T_1)e^{i\Omega T_0} + 3\bar{A}^2(T_1)A(T_1)e^{-i\Omega T_0} + A^3(T_1)e^{-3i\Omega T_0}] - c_3[(i\Omega)^\tau A(T_1)e^{i\Omega T_0} + (i\Omega)^\tau \bar{A}(T_1)e^{-i\Omega T_0}] - c_4[i\Omega A(T_1)e^{i\Omega T_0} - i\Omega \bar{A}(T_1)e^{-i\Omega T_0}] + \frac{f^*}{2}(e^{i\Omega T} + e^{-i\Omega T}) \quad (۲۲-ب)$$

حل کلی (۲۲-الف) به صورت زیر می باشد.

$$q_0(T_0, T_1) = A(T_1)e^{i\Omega T_0} + \bar{A}(T_1)e^{-i\Omega T_0} \quad (۲۳)$$

که در آن A ، یک تابع مختلط و \bar{A} بیانگر مزدوج آن است. با جایگذاری رابطه (۲۳) در رابطه (۲۲) برای حذف ترم های سکولار و کوچک، خواهیم داشت.

$$2i\Omega A'(T_1) + 3c_2 A^2(T_1)\bar{A}(T_1) + [c_3(i\Omega)^\tau + c_4(i\Omega)]A(T_1) + f^*/2 = 0. \quad (۲۴)$$

رابطه (۲۴)، در فرم قطبی آن به صورت $A(T_1) = \frac{1}{2}a(T_1)e^{ib(T_1)}$ است که در آن a دامنه و b فاز، توابعی حقیقی بر حسب T_1 هستند. با جایگذاری فرم قطبی در رابطه (۲۴) خواهیم داشت.

$$i\Omega e^{ib(T_1)}[a'(T_1) + iab'(T_1)] + \frac{3c_2}{8}a^3(T_1)e^{ib(T_1)} + \frac{1}{2}[c_3(i\Omega)^\tau + c_4(i\Omega)]a(T_1)e^{ib(T_1)} + \frac{1}{2}f^*e^{i\sigma(T_1)} = 0 \quad (۲۵)$$

با معرفی $\gamma(T_1) = \sigma T_1 - b(T_1)$ در رابطه بالا و جداسازی ترم های حقیقی و مختلط و با در نظر گرفتن $\frac{d}{dT_1}a = 0$ ؛ $\frac{d}{dT_1}\gamma = 0$ ، برای وجود ارتعاشات پایدار و حذف γ ، پاسخ فرکانسی به صورت زیر خواهد بود.

$$\left(\frac{c_4 + c_3 \Omega^\tau - 1 \operatorname{Im}(i^\tau)}{2}\right)^2 + \left[\sigma - \frac{3c_2}{8\Omega}a^2 - \frac{c_3 \Omega^\tau - 1 \operatorname{Re}(i^\tau)}{2}\right]^2 = \frac{f^{*2}}{4a^2 \Omega^2} \quad (۲۶)$$

۴- نتایج

در این بخش اثر تغییرات وزنی صفحات گرافن، سرعت سیال، عدد نادسن، پارامتر اندازه و ثابت های بستر ویسکوالاستیک غیر خطی بر روی ارتعاشات میکرو لوله ی حامل سیال مورد بررسی قرار می گیرد. خصوصیات مکانیکی و هندسی صفحات گرافنی

و عناصر ماتریس پلیمری مطابق با جداول (۱) و (۲) است.

جدول ۱ مشخصات فیزیکی میکرو لوله [۴۷]

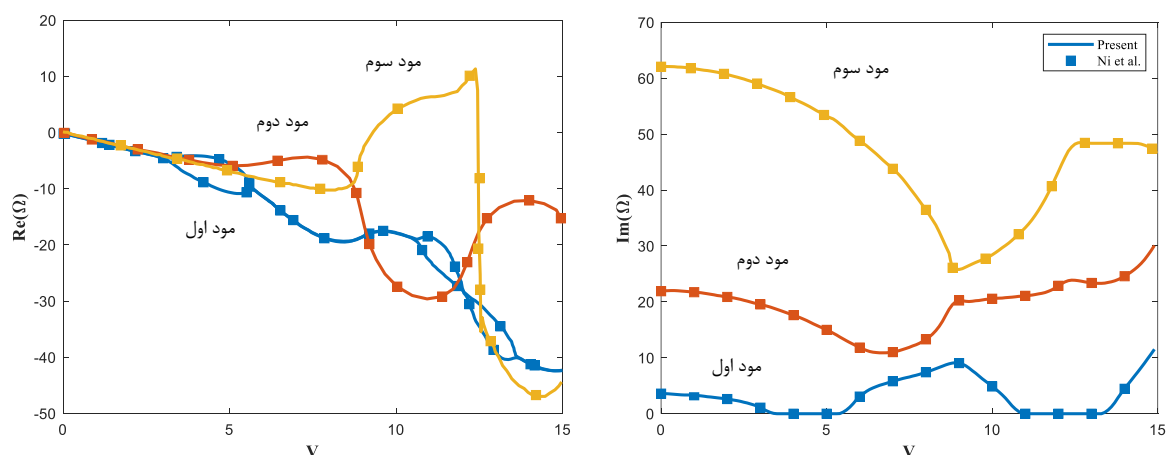
پارامترها و خواص فیزیکی	علامت (واحد)	مقدار
طول لوله	$L(\mu m)$	۲۵۰
شعاع داخلی	$r_i(\mu m)$	۱۱۰
شعاع خارجی	$r_o(\mu m)$	۱۲۵
چگالی سیال	$\rho_f(kg/m^3)$	۱۰۰۰

جدول ۲ مشخصات هندسی و مکانیکی صفحات گرافنی و ماتریس [۴۸-۴۲]

پارامترها و خواص فیزیکی	علامت (واحد)	مقدار
مدول یانگ ماده‌ی زمینه	$E_m(GPa)$	۳
چگالی ماده‌ی زمینه	$\rho_m(kg/m^3)$	۱۲۰۰
ضریب پواسون ماده‌ی زمینه	ν_m	۰/۳۴
مدول یانگ صفحات گرافن	$E_{GPL}(GPa)$	۱/۰۱
چگالی صفحات گرافن	$\rho_{GPL}(kg/m^3)$	۱۰۶۲
ضریب پواسون صفحات گرافن	ν_{GPL}	۰/۱۸۶
طول صفحات گرافن	$L_{GPL}(\mu m)$	۲/۵
عرض صفحات گرافن	$b_{GPL}(\mu m)$	۱/۵
ضخامت صفحات گرافن	$t_{GPL}(nm)$	۱/۵

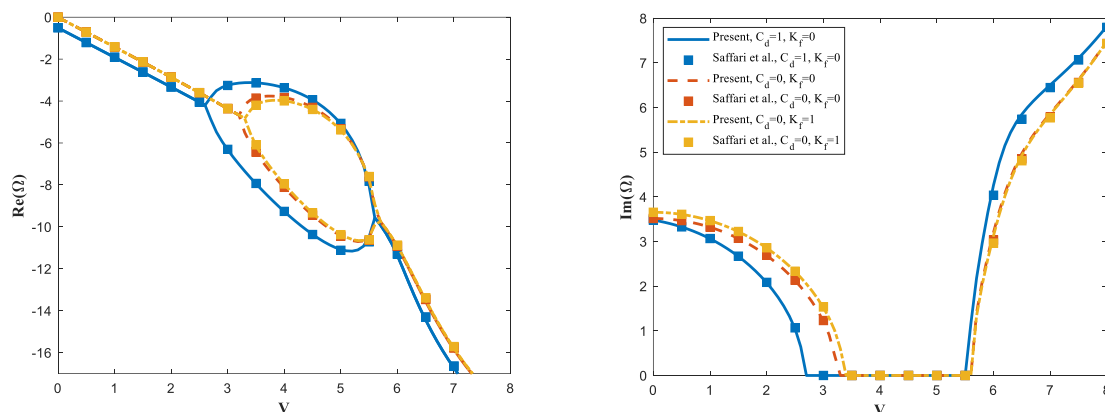
۴-۱- صحنه‌سنجی نتایج قسمت آنالیز خطی

به منظور بررسی صحت، اعتبار و دقت روش حل پیشنهاد شده و فرمولاسیون که با استفاده از تئوری زوج تنش اصلاح شده استخراج شده، نتایج با مقالات گذشته مقایسه می‌شود. در این بخش مشخصات هندسی و مکانیکی از جداول (۱) و (۲) تبعیت می‌کند. در این قسمت، سه مقادیر ویژه اول میکرو لوله‌ی کانتیلور حاوی سیال که در شکل (۲) آمده است، مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در شکل قسمت‌های موهومی و حقیقی سه مقادیر ویژه اول میکرو لوله نشان داده شده‌اند. $Re(\Omega)$ نشانگر پایداری سیستم است و هنگامی که $Re(\Omega) < 0$ سیستم پایدار می‌باشد. نتایج به‌دست‌آمده در شکل (۲) همبستگی بسیار خوبی با نتایج به‌دست‌آمده توسط نی و همکاران [۴۹] دارد.



شکل ۲ صحنه‌سنجی سه مقدار ویژه اول میکرو لوله در مقایسه با نی و همکاران [۴۹]

در شکل (۳) تغییرات بخش‌های حقیقی و موهومی مقدار ویژه اصلی برحسب سرعت سیال برای یک لوله‌ی الاستیک با بستر ویسکوالاستیک خطی، نشان داده شده است. مقاله‌ی حاضر در با نتایج صفری و همکاران [۵۰] صحنه‌سنجی شدند و در توافق بسیار خوبی با آن می‌باشد. لازم به ذکر است که سرعت سیال بحرانی برای سیستم با بستر الاستیک، بزرگ‌تر از بستر ویسکوالاستیک است.



شکل ۳ صحنه سنجی تغییرات بخش حقیقی و موهومی میکرو لوله بر حسب سرعت سیال [۵۰]

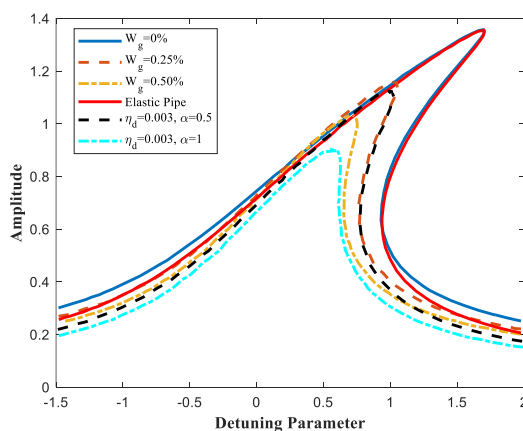
۴-۲ پاسخ رزونانس اصلی میکرو لوله

در این بخش، اثر پارامترهای مختلف بر روی پاسخ فرکانسی میکرو لوله‌ی حامل سیال تقویت شده با صفحات گرافن، بررسی شده است. در اینجا مقادیر بی بعد عبارت‌اند از:

$$W_G = 0.25\% (A \text{ الگوی}), K_L = 10, K_{nl} = 5, \eta = C_d = 0, F = 2, X_0 = 0.9, \beta_0 = 0.5 \quad (27)$$

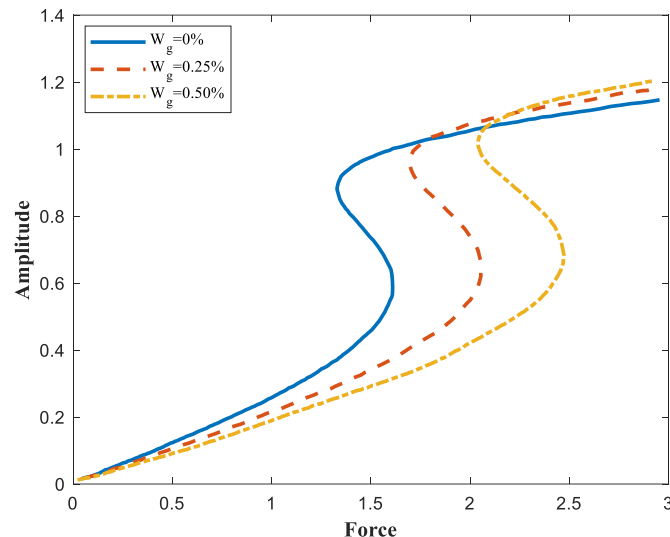
شکل (۴)، پاسخ فرکانسی میکرو لوله‌ی حامل سیال تقویت شده با صفحات گرافنی را به ازای مقادیر مختلف کسر وزنی از صفحات گرافنی و مقادیر مختلف مرتبه‌ی مشتق ویسکوالاستیک کسری و میرایی نشان می‌دهد. لازم به ذکر است با افزایش پارامتر حجم وزنی GPL، رفتار سخت‌شوندگی سیستم کاهش پیدا می‌کند. به وضوح مشخص است که برای یک مقدار مشخصی از پارامتر انحراف از تشدید (Detuning Parameter) و به ازای یک حجم وزنی با مقدار کمتر، دامنه‌ی پاسخ بیشترین مقدار را دارد. دامنه‌ی جابجایی نیز با افزایش پارامتر کسر وزنی صفحات گرافنی کاهش چشم‌گیری را به همراه دارد. دلیل فیزیکی کاهش پاسخ فرکانسی، افزایش سختی مؤثر میکرو لوله با افزایش پارامتر کسر وزنی می‌باشد و این منجر به کاهش سخت‌شوندگی و غیرخطی بودن می‌شود.

به وضوح مشخص است که با کاهش مرتبه‌ی مشتق ویسکوالاستیک کسری و نیز میرایی سیستم، ماکزیمم دامنه‌ی میکرو لوله افزایش می‌یابد. لازم به ذکر است که با کاهش مرتبه‌ی مشتق ویسکوالاستیک کسری (که منجر به ماده‌ی الاستیک می‌شود)، دامنه‌ی ماکزیمم سیستم بسیار افزایش می‌یابد. اثر نرم‌شوندگی میکرو لوله با افزایش مرتبه‌ی مشتق ویسکوالاستیک کسری، شدت بیشتری پیدا می‌کند. قابل ذکر است که افزایش مرتبه‌ی مشتق ویسکوالاستیک کسری، باعث از دست رفتن انرژی سیستم به طور قابل توجهی می‌شود.



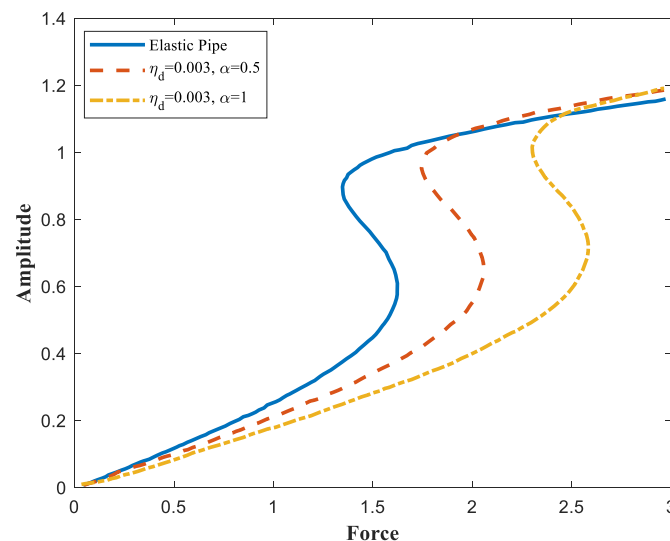
شکل ۴ اثر وزن صفحات گرافنی، مرتبه‌ی مشتق ویسکوالاستیک کسری و میرایی بر روی پاسخ فرکانسی میکرو لوله بر حسب پارامتر انحراف تشدید

شکل (۵)، اثر پارامتر کسر وزنی صفحات گرافنی را بر روی پاسخ دامنه‌ی میکرو لوله‌ی حامل سیال نشان می‌دهد. پدیده‌ی پرش، در شکل (۵) به وضوح نشان داده شده است. با افزایش دامنه‌ی نیروی مربوط به تحریک خارجی، دامنه‌ی ماکزیمم تا اولین نقطه‌ی دوشاخگی افزایش می‌یابد. سپس، با کاهش دامنه‌ی نیروی تحریک خارجی، دامنه‌ی سیستم تا دومین نقطه‌ی دوشاخگی افزایش می‌یابد. با افزایش پارامتر کسر وزنی، پاسخ دامنه مرتبط با نقاط دوشاخگی، افزایش می‌یابد.



شکل ۵ اثر وزن صفحات گرافنی بر روی پاسخ دامنه میکرو لوله بر حسب دامنه‌ی نیروی تحریک

شکل (۶) اثر مرتبه‌ی مشتق ویسکوالاستیک کسری و میرایی را بر روی پاسخ دامنه‌ی میکرو لوله‌ی حامل سیال نشان می‌دهد. با افزایش پارامترهای میرایی و نیز مرتبه‌ی مشتق کسری، نقاط دو شاخگی به سمت مقادیر بزرگ‌تری از دامنه‌های نیرو جابجا می‌شوند.



شکل ۶ اثر مرتبه‌ی مشتق ویسکوالاستیک کسری و میرایی بر روی پاسخ دامنه‌ی میکرو لوله‌ی حامل سیال

۵- جمع‌بندی و پیشنهادها

این مطالعه به تحلیل ارتعاش آزاد وابسته به اندازه و پاسخ حالت پایدار میکرولوله‌های ویسکوالاستیک کسری حامل سیال تقویت‌شده با صفحات گرافنی بر روی یک پایه ویسکوالاستیک غیرخطی، تحت نیروی هارمونیک، در چارچوب تئوری تنش کوپل اصلاح شده می‌پردازد. میکرولوله‌ها از یک ماتریس پلیمری اپوکسی با تقویت‌کننده‌های صفحات گرافنی تشکیل شده‌اند که پارامتر مقیاس طول را در نظر می‌گیرند. مدل ویسکوالاستیک کسری غیرخطی برای نشان دادن اثر ویسکوالاستیک سازه استفاده شد.

سپس معادله‌ی حاکم بر حرکت با استفاده از تئوری تیر اویلر برنولی ویسکوالاستیک، اصل همیلتون استخراج شد. فرض شد که میکرو لوله بر روی تکیه‌گاه یک سر گیردار قرار گرفته است. با استفاده از روش گالرکین و در نظر گرفتن شکل مد مربوط و شرایط مرزی یک سر گیردار، معادله حرکت گسسته‌سازی شد. به منظور حل معادله‌ی حاکم بر حرکت از روش مقیاس چندگانه استفاده شد و برای نشان دادن صحت و درستی فرمول‌بندی به کار رفته در این تحقیق اعتبارسنجی شد. نتایج عددی نشان داده‌اند که:

- مقادیر بالاتر ضریب خطی K_1 فونداسیون محدود فرکانس‌های طبیعی را بیشتر می‌کند.
- دامنه پاسخ میکرو لوله که توسط مدل ویسکوالاستیک کسری پیش‌بینی می‌شود، بسیار بزرگ‌تر از دامنه گزارش شده توسط مطالعات قبلی با استفاده از مدل ویسکوالاستیک کلون وویت است.
- افزایش پارامتر کسر وزنی صفحات گرافنی اثر سخت‌شوندگی را کاهش می‌دهد.
- افزایش پارامتر میرایی ساختاری و نیز مرتبه‌ی کسری، اثر سخت‌شوندگی را کاهش می‌دهد.
- افزایش پارامتر کسری وزنی باعث افزایش دامنه‌ی نیرو می‌شود.
- با افزایش پارامترهای میرایی و نیز مرتبه‌ی مشتق کسری، نقاط دو شاخگی به سمت مقادیر بزرگ‌تری از دامنه‌های نیرو جابجا می‌شوند.

Authorship Contribution Statement

Sina Ghahnavieh



Biography: He holds a Master's degree in Mechanical Engineering from Iran University of Science and Technology, with his research focused on vibrations and computational mechanics. His publications include investigations into exact solutions, nonlinear vibrations, and resonance characteristics.

Contribution Statement: Conceptualization, Methodology, Validation, Formal analysis, Writing – original draft.

Rouzbeh Nouhi Hefzabad



Biography: He received his Ph.D. in Mechanical Engineering from Iran University of Science and Technology. He is currently a faculty member in the School of Railway Engineering at the same university. He completed all three levels of his education—bachelor's, master's, and doctoral degrees—at Iran University of Science and Technology. His primary research areas include vibrations, finite element analysis, and contact mechanics. To date, he has published nearly 20 scientific articles in reputable international and domestic journals.

Contribution Statement: Conceptualization, Methodology, Investigation, Software, Visualization, Writing – review & editing.

Dr. Ahmad Homayooni



Biography: Assistant professor in Mechanical Engineering, Arak University of Technology.

Contribution Statement: Conceptualization, Methodology, Supervision, Writing – original draft, Writing – review & editing.

۶- مراجع

- [1] Korayem MH, Hefzabad RN. A quadrilateral non-classical microplate element considering the voltage effect. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*. 2024; 238:09544062241256481.
- [2] Foldvari M, Bagonluri M. Carbon nanotubes as functional excipients for nanomedicines: II. Drug delivery and biocompatibility issues. *Nanomedicine: Nanotechnology, Biology and Medicine*. 2008; 4:183–200.
- [3] Korayem MH, Hefzabad RN, Homayooni A, Aslani H. Investigation of geometrical effects in the carbon allotropes manipulation based on AFM: multiscale approach. *Journal of Nanoparticle Research*. 2017; 19:12.
- [4] Haneveld J, Lammerink TSJ, de Boer MJ, Sanders RGP, Mehendale A, Lötters JC, Dijkstra M, Wiegerink RJ. Modeling, design, fabrication and characterization of a micro Coriolis mass flow sensor. *Journal of Micromechanics and Microengineering*. 2010; 20:125001.
- [5] Pradiptya I, Ouakad HM. Size-dependent behavior of slacked carbon nanotube actuator based on the higher-order strain gradient theory. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*. 2018; 14:393–415.
- [6] Korayem MH, Reisi Z, Hefzabad RN. AFM-based manipulation modeling of bacillus subtilis bioparticles using finite element method. *Archive of Applied Mechanics*. 2023; 93:2891–2906.
- [7] Ghayesh MH, Farokhi H, Amabili M. Nonlinear dynamics of a microscale beam based on the modified couple stress theory. *Composites Part B: Engineering*. 2013; 50:318–324.
- [8] Korayem MH, Farid AA, Hefzabad RN. Nonclassical dynamic modeling of nano/microparticles during nanomanipulation processes. *Beilstein Journal of Nanotechnology*. 2020; 11:147–166.
- [9] Korayem MH, Hefzabad RN. Nonlinear modeling of nanoscale interaction forces between atomic force microscope and carbon nanotubes. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2024; 161:104690.
- [10] Korayem MH, Hefzabad RN. Non-linear non-classical modeling of microparticles manipulation based on finite element method. *International Journal of Applied Mechanics*. 2023; 15:2350093.
- [11] Ghahnavieh S, Hosseini-Hashemi S, Rajabi K, Ghahnavieh S. A higher-order nonlocal strain gradient mass sensor based on vibrating heterogeneous magneto-electro-elastic nanoplate via third-order shear deformation theory. *The European Physical Journal Plus*. 2018; 133:518.
- [12] Rajabi K, Khajehsaeid H, Li L, Ghahnavieh S. A new representation for viscoelastic behavior of materials in two-and three-dimensional problems. *International Journal of Applied Mechanics*. 2021; 13:2150081.
- [13] Xia W, Wang L. Microfluid-induced vibration and stability of structures modeled as microscale pipes conveying fluid based on non-classical Timoshenko beam theory. *Microfluidics and Nanofluidics*. 2010; 9:955–962.
- [14] Ghahnavieh S, Hefzabad PN, Rajabi K, Hosseini-Hashemi S. Nonlinear vibration and primary resonant characteristics of a fluid-conveying cantilever GPL-reinforced micropipe resting on a viscoelastic foundation. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*. 2024; 09544062241303196.
- [15] Mashrouteh S, Sadri M, Younesian D, Esmailzadeh E. Nonlinear vibration analysis of fluid-conveying microtubes. *Nonlinear Dynamics*. 2016; 85:1007–1021.
- [16] Ma T, Mu A. Analysis of nonlinear vibration of functionally graded simply supported fluid-conveying microtubes subjected to transverse excitation loads. *Micromachines*. 2022; 13:2114.
- [17] Oyelade AO, Ehigie JO, Oyediran AA. Nonlinear forced vibrations of a slightly curved nanotube conveying fluid based on the nonlocal strain gradient elasticity theory. *Microfluidics and Nanofluidics*. 2021; 25:95.

- [18] Li H, Wang A, Liu S, Zhang W, Li W, Chen H, Xiao B. Nonlinear dynamics and vibration suppression of graphene platelets reinforced pipes conveying fluid. *Journal of Vibration Engineering & Technologies*. 2024; 12:5705–5714.
- [19] Ebrahimi R, Ziaei-Rad S. Nonplanar vibration and flutter analysis of vertically spinning cantilevered piezoelectric pipes conveying fluid. *Ocean Engineering*. 2022; 261:112180.
- [20] Wu Q, Chen N, Yao M, Niu Y, Wang C. Nonlinear dynamic analysis of FG fluid conveying micropipes with initial imperfections. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. 2025; 25:2550017.
- [21] Askarian AR, Permoon MR, Rahmanian M. Stability analysis of fluid conveying Timoshenko pipes resting on fractional viscoelastic foundations. *Mechanics Research Communications*. 2025; 144:104369.
- [22] Sobhy M. Nonlinear bending and vibration of FGCNTs cylindrical microshells conveying microfluid under a 2D magnetic field. *Archives of Civil and Mechanical Engineering*. 2025; 25:174.
- [23] Moradi A, Ghanbarzadeh A, Shishesaz M, Sedighi HM. Nonlinear vibration and primary resonance analysis of porous FG/Lipid sandwich bionanoplates based on nonlocal strain gradient theory. *Acta Mechanica*. 2025; 236:1029–1059.
- [24] Tang M, Ni Q, Wang L, Luo Y, Wang Y. Nonlinear modeling and size-dependent vibration analysis of curved microtubes conveying fluid based on modified couple stress theory. *International Journal of Engineering Science*. 2014; 84:1–10.
- [25] Amiri A, Talebitooti R. Vibration and stability analysis of fluid-conveying sandwich micro-pipe with magnetorheological elastomer core, considering modified couple stress theory and geometrical nonlinearity. *The European Physical Journal Plus*. 2021; 136:1109.
- [26] Attia MA, Emam SA. Electrostatic nonlinear bending, buckling and free vibrations of viscoelastic microbeams based on the modified couple stress theory. *Acta Mechanica*. 2018; 229:3235–3255.
- [27] Atcı D. Nonlinear vibrations of cracked microbeams based on modified couple stress theory. *European Journal of Mechanics-A/Solids*. 2024; 106:105321.
- [28] Babaei A, Arabghahestani M. Free vibration analysis of rotating beams based on the modified couple stress theory and coupled displacement field. *Applied Mechanics*. 2021; 2:226–238.
- [29] Loghman E, Bakhtiari-Nejad F, Kamali A, Abbaszadeh M, Amabili M. Nonlinear vibration of fractional viscoelastic micro-beams. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2021; 137:103811.
- [30] Eltahaer MA, Shanab RA, Mohamed NA. Analytical solution of free vibration of viscoelastic perforated nanobeam. *Archive of Applied Mechanics*. 2023; 93:221–243.
- [31] Javadi M, Rahmanian M. Nonlinear vibration of fractional Kelvin–Voigt viscoelastic beam on nonlinear elastic foundation. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2021; 98:105784.
- [32] Youzera H, Meftah SA, Tounsi A, Salem MA, Khedher KM, Yaylacı M. Nonlinear forced vibration analysis of FG-CNTRC sandwich beams with viscoelastic core under various boundary conditions. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2025; 1–10.
- [33] Zhang Z, Yang H, Guo Z, Zhu L, Liu W. Nonlinear vibrations of an axially moving beam with fractional viscoelastic damping. *Advances in Civil Engineering*. 2022; 2022:4637716.
- [34] Mohamed SA, Eltahaer MA, Mohamed N, Abo-bakr RM. Nonlinear dynamics and forced vibrations of simply-supported fractional viscoelastic microbeams using a fractional differential quadrature method. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*. 2024; 52:1–20.

- [35] Wang L, Chong N, Lei D, Ou Z. Nonlinear vibration analysis of nonlocal fractional viscoelastic piezoelectric nanobeams incorporating surface effects. *European Journal of Mechanics-A/Solids*. 2025; 105840.
- [36] Eyvazian A, Zhang C, Musharavati F, Khan A, Alkhedher M. Free vibration analysis and post-critical free vibrations of nanocomposite rotating beams reinforced with graphene platelet. *Journal of Vibration and Control*. 2023; 29:636–648.
- [37] Qian Q, Wang Y, Zhu F, Feng C, Yang J, Wang S. Primary nonlinear damped natural frequency of dielectric composite beam reinforced with graphene platelets (GPLs). *Archives of Civil and Mechanical Engineering*. 2022; 22:53.
- [38] Guo M, Arvin H. Nonlinear thermal buckling instability analysis of a rotating nanocomposite beam reinforced with graphene platelet via the Chebyshev–Ritz scheme. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2023; 146:241–251.
- [39] Abbaspour F, Arvin H, Shahriari-Kahkeshi M. Active control of vibrations of piezoelectric rectangular nanocomposite micro plates reinforced with graphene platelet in thermal ambient considering the structural damping. *International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics*. 2022; 23:243–262.
- [40] Ansari R, Hassani R, Hasrati E, Rouhi H. Studying nonlinear vibrations of composite conical panels with arbitrary-shaped cutout reinforced with graphene platelets based on higher-order shear deformation theory. *Journal of Vibration and Control*. 2022; 28:3019–3041.
- [41] Amiri A, Pournaki IJ, Jafarzadeh E, Shabani R, Rezazadeh G. Vibration and instability of fluid-conveyed smart micro-tubes based on magneto-electro-elasticity beam model. *Microfluidics and Nanofluidics*. 2016; 20:1–10.
- [42] Rafiee MA, Rafiee J, Wang Z, Song H, Yu Z-Z, Koratkar N. Enhanced mechanical properties of nanocomposites at low graphene content. *ACS Nano*. 2009; 3:3884–3890.
- [43] Tang Y, Yang T, Fang B. Fractional dynamics of fluid-conveying pipes made of polymer-like materials. *Acta Mechanica Sinica*. 2018; 31:243–258.
- [44] Bahaadini R, Hosseini M. Effects of nonlocal elasticity and slip condition on vibration and stability analysis of viscoelastic cantilever carbon nanotubes conveying fluid. *Computational Materials Science*. 2016; 114:151–159.
- [45] Hosseini M, Fazlzadeh SA. Thermomechanical stability analysis of functionally graded thin-walled cantilever pipe with flowing fluid subjected to axial load. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. 2011; 11:513–534.
- [46] Nayfeh AH, Mook DT. *Nonlinear oscillations*; John Wiley & Sons, 2008.
- [47] Wang L. Size-dependent vibration characteristics of fluid-conveying microtubes. *Journal of Fluids and Structures*. 2010; 26:675–684.
- [48] Liu F, Ming P, Li J. Ab initio calculation of ideal strength and phonon instability of graphene under tension. *Physical Review B—Condensed Matter and Materials Physics*. 2007; 76:064120.
- [49] Ni Q, Zhang ZL, Wang L. Application of the differential transformation method to vibration analysis of pipes conveying fluid. *Applied Mathematics and Computation*. 2011; 217:7028–7038.
- [50] Saffari PR, Fakhraie M, Roudbari MA. Nonlinear vibration of fluid conveying cantilever nanotube resting on visco-pasternak foundation using non-local strain gradient theory. *Micro & Nano Letters*. 2020; 15:181–186.