

Numerical Solution and Analysis of Rectangular Plate Flutter Threshold in Supersonic Flow Considering the Effect of Aerodynamic Damping

Mehran Samadi Foroushani^a, Mostafa Nazemizadeh^{b*}, Mohammad Mehdi Mohammadi^c

^a MSc, Department of Mechanical Engineering, Faculty of Mechanics, Malek Ashtar University of Technology, Iran

^b Associate Professor, Department of Mechanical Engineering, Faculty of Mechanics, Malek Ashtar University of Technology, Iran


^c Assistant Professor, Department of Mechanical Engineering, Faculty of Mechanics, Malek Ashtar University of Technology, Iran

Original Article

Use your device to scan
and read the article online



Citation: Samadi Foroushani M., Nazemizadeh M., Mohammadi M.M., Numerical Solution and Analysis of Rectangular Plate Flutter Threshold in Supersonic Flow Considering the Effect of Aerodynamic Damping. *Mechanics of Advanced and Smart Materials*. 2025;5(1):113-131

 [https:// 10.61186/masm.2026.2072190.1169](https://10.61186/masm.2026.2072190.1169)

KEY WORDS

Flutter speed
Ultrasonic flow
Piston theory
DQM numerical method
CFCF boundary conditions

ABSTRACT

This paper investigates the effect of aerodynamic damping on the flutter threshold of a rectangular aluminum sheet in supersonic flow. Using matrix form of DQM and the first-order piston theory, this paper increases the accuracy and speed of the solution. Using the difference of squares method (DQM), two different scenarios of the first-order piston theory are analyzed: a simplified case without damping and a full case with damping. The results show that the flutter threshold occurs at Mach 3.395 in both cases, indicating that aerodynamic damping has no effect on the flutter velocity. This finding is confirmed by parametric sensitivity analysis. Accordingly, the simplified formulation of the piston theory is proposed as a computational basis for future studies. This method has computational advantages such as reduced computational time and is suitable for practical applications in the design of aerospace panels.

Extended Abstract

1. Introduction

The Flutter is a combination of the interaction of aerodynamic forces, elastic forces, and inertial forces that can lead to the failure of structures such as aircraft wings. If this phenomenon is not analyzed carefully, aerial structures, which are usually lighter in weight, may become unstable and collapse. For this reason, flutter analysis is of particular importance in the design and engineering of these structures. Flutter is classified into two general types: first, flutter caused by the coupling of the natural frequency of the structure with frequencies caused by the airflow (such as resonance), and second, flutter caused by the coupling of structural frequencies. The second case occurs when structural frequencies under the influence of aerodynamic forces become so close to each other that they couple together at a certain speed of the airflow, resulting in unstable behavior of the structure. For example, in aircraft wings, bending and torsional frequencies can interact simultaneously, leading to flutter.

2. Mathematical Formulation

The equation of motion of the sheet and its boundary conditions are extracted from reference [18] based on the use of Kirchhoff sheet assumptions and neutral wire assumptions and are written as follows:

* Corresponding author. Tel.: +989132725342;

E-mail address: nazemizadeh@aut.ac.ir

DOI: [https:// 10.61186/masm.2026.2072190.1169](https://10.61186/masm.2026.2072190.1169)

Received: 19 September 2025; Received in revised form: 23 December 2025; Accepted: 02 May 2026

2022 Published by Arak University Press. All rights reserved.



$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p(x, y, t) \tag{1}$$

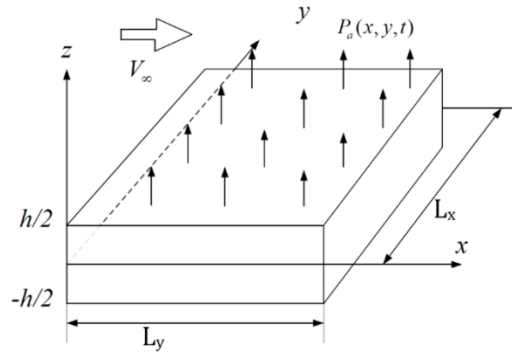


Figure 1:View of a rectangular sheet in a supersonic air flow.

In a freely supported edge (Free or F), the shear force and bending moment at the plate boundary points are zero, in a simply supported edge (Simple or S), the plate deflection and bending moment at the plate boundary points are zero, and in a rigidly supported edge (Simple or C), the plate deflection and slope at the plate boundary points are zero. These conditions are written as:

$$x = 0 \text{ \& } x = L_x \rightarrow \text{Free} \quad M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \tag{2}$$

$$V_x = Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x} \right) = 0$$

$$x = 0 \text{ \& } x = L_x \rightarrow \text{Simple} \quad M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \tag{3}$$

$$x = 0 \text{ \& } x = L_x \rightarrow \text{clamped} \quad \begin{aligned} w &= 0 \\ \frac{\partial w}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

Piston theory, also known as linear potential flow theory, is a fundamental framework in aerodynamics that models airflow around objects. In this theory, airflow is considered to be an inviscid and incompressible fluid, meaning that the air density remains constant and pressure changes are only due to differences in velocity at different points on the surface. This theory has an important place among aerodynamic theories due to its simplicity and computational speed, and is particularly useful for optimizing design and solving complex aerodynamic problems. In this study, the first-order piston theory is used, and it is assumed that the flow only passes over the sheet and that there is only static air pressure on the other side of the sheet. With this assumption, the external pressure acting on the sheet is expressed as the difference between the dynamic and static air pressures. This theory is valid for $M_\infty > \sqrt{2}$. This external pressure is formulated as:

$$p_a(x, y, t) = - \frac{\rho_a V_\infty^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \left\{ \frac{\partial w}{\partial x} + \left(\frac{M_\infty^2 - 2}{M_\infty^2 - 1} \right) \frac{1}{V_\infty} \frac{\partial w}{\partial t} \right\} \tag{5}$$

In the following, the final equation of motion of the plate, assuming the use of a first-order piston aerodynamic loading model, is expressed as the "coupled structure-fluid equation" as follows:

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\rho_a V_\infty^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \left\{ \frac{\partial w}{\partial x} + \left(\frac{M_\infty^2 - 2}{M_\infty^2 - 1} \right) \frac{1}{V_\infty} \frac{\partial w}{\partial t} \right\} = 0 \tag{6}$$

In the above equation, the parameters ρ , h , ρ_a , V_∞ and M_∞ represent the density of the sheet, the thickness of the sheet, the density of the air flow, the speed of the air flow and the Mach number of the air flow, respectively. In this regard, it is assumed that the air flow enters the sheet in the x direction. To solve this equation in the frequency domain, the method of

separation of variables is used as follows. The variable of these equations is the sheet deflection variable. The separation of this variable is done as follows:

$$w(x, y, t) = W(x, y)e^{i\omega t} \quad (7)$$

And since the function $p(x, y, t)$ in the first-order piston theory is written in terms of the function $w(x, y, t)$, the separation of variables in this function can be shown as follows:

$$p(x, y, t) = P(x, y)e^{i\omega t} \quad (8)$$

Now, using equations 7 and 8, the coupled equation of the fluid structure is separated as follows:

$$D \left(\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} \right) e^{i\omega t} + \rho h W (i\omega)^2 e^{i\omega t} = P(x, y) e^{i\omega t} \quad (9)$$

$$\rightarrow \left(\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} \right) - \frac{1}{D} P(x, y) = \frac{\rho h \omega^2}{D} W \quad (10)$$

The following relations are used to make the above equation dimensionless:

$$\left(\begin{array}{l} \frac{x}{X} = L_x \\ \frac{y}{Y} = L_y \\ \frac{Lx}{Ly} = \phi \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{l} d^r x = L_x^r (d^r X) \\ d^r y = L_y^r (d^r Y) \end{array} \right) \quad (11)$$

The following relations are used to make the above equation dimensionless:

$$\left(\frac{\partial^4 W}{\partial X^4} + 2\phi^2 \frac{\partial^4 W}{\partial X^2 \partial Y^2} + \phi^4 \frac{\partial^4 W}{\partial Y^4} \right) - \left(\frac{L_x^4}{D} \right) P(x, y) = \left(\frac{L_x^4 \rho h \omega^2}{D} \right) W \quad (12)$$

Also, the first-order piston equation becomes dimensionless as follows:

$$P(x, y) = - \frac{\rho_a V_\infty^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \left\{ \frac{\partial W}{\partial x} + i\omega \left(\frac{M_\infty^2 - 2}{M_\infty^2 - 1} \right) \frac{1}{V_\infty} W \right\} \quad (13)$$

By defining the Mach number as follows, the first-order piston equation is rewritten as follows:

$$M_\infty = \frac{V_\infty}{C_a} \rightarrow P(x, y) = \left[- \frac{\rho_a C_a^2 M_\infty^2}{L_x \sqrt{M_\infty^2 - 1}} \frac{\partial W}{\partial X} \right] + i\omega \left[- \frac{\rho_a C_a M_\infty (M_\infty^2 - 2)}{(M_\infty^2 - 1)^{1.5}} W \right] \quad (14)$$

The imaginary term in the above equation represents the damping effect of the sheet by the airflow. To evaluate the effect of the damping parameter on the determination of the flutter speed, two scenarios for the first-order piston theory are considered. In the first scenario, the imaginary term is removed from the theory, and in the second scenario, this term is retained in the theory. The piston theory in these two cases is expressed as follows:

$$\text{Piston theory in the first case: } P_1(x, y) = \left[- \frac{\rho_a C_a^2 M_\infty^2}{L_x \sqrt{M_\infty^2 - 1}} \frac{\partial W}{\partial X} \right] \quad (15)$$

$$\text{Piston theory in the second case: } P_2(x, y) = \left[- \frac{\rho_a C_a^2 M_\infty^2}{L_x \sqrt{M_\infty^2 - 1}} \frac{\partial W}{\partial X} \right] + i\omega \left[- \frac{\rho_a C_a M_\infty (M_\infty^2 - 2)}{(M_\infty^2 - 1)^{1.5}} W \right] \quad (16)$$

Finally, the coupled structure-fluid equation is written as follows:

$$\rightarrow \left(\frac{\partial^4 W}{\partial X^4} + 2\phi^2 \frac{\partial^4 W}{\partial X^2 \partial Y^2} + \phi^4 \frac{\partial^4 W}{\partial Y^4} \right) + P_u \frac{\partial W}{\partial X} = \lambda^4 W \quad (17)$$

In the above equation, ϕ and P_u are the dimensionless frequency and dimensionless dynamic pressure of the air, respectively:

$$P_u = \left(\frac{L_x^3}{D}\right) \frac{\rho_a C_a^2 M_\infty^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \tag{18}$$

$$\lambda = \begin{cases} \lambda_1 = \left(\left(\frac{L_x^4}{D}\right) (\rho h \omega^2)\right)^{\frac{1}{4}} \\ \lambda_2 = \left(\left(\frac{L_x^4}{D}\right) \left(\rho h \omega^2 - i \frac{\rho_a C_a M_\infty (M_\infty^2 - 2)}{(M_\infty^2 - 1)^{1.5}} \omega\right)\right)^{\frac{1}{4}} \end{cases} \tag{19}$$

According to the above equation, given the values of λ , the values of the sheet frequency (ω) are obtained as follows:

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \left(\frac{\lambda}{L_x}\right)^2 \tag{20}$$

Using the DQM solution method, the coupled structure-fluid equation is written in the following form:

$$\begin{aligned} [A^x]^4_{n \times n} [W]_{n \times m} + 2\phi^2 [A^x]^2_{n \times n} [W]_{n \times m} [A^y]^2_{m \times m}^T \\ + \phi^4 [W]_{n \times m} [A^y]^2_{m \times m}^T + P_u [A^x]_{n \times n} [W]_{n \times m} \\ = \lambda^4 [W]_{n \times m} \end{aligned} \tag{21}$$

In this equation, the sheet deflection (W) is expressed in matrix form after applying the DQM numerical solution method, and in order to factor the matrix $[W]_{(n \times m)}$ from the equation and write the equation in the form of a standard eigenvalue problem, Kronecker multiplication must be used.

$$[W]_{n \times m} = \begin{bmatrix} w_{1.1} & \dots & w_{1.m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{n.1} & \dots & w_{n.m} \\ \underbrace{u_1} & & \underbrace{u_m} \end{bmatrix} = [u_1, u_2, \dots, u_m], \{u\}_{nm \times 1} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{m-1} \\ u_m \end{Bmatrix}_{nm \times 1} \tag{22}$$

Finally, the coupled structure-fluid equation is written in the following form:

$$\begin{aligned} ([I]_{m \times m} \otimes [D^x]_{n \times n})_{nm \times nm} \{u\}_{nm \times 1} \\ + 2\phi^2 ([B^y]_{m \times m} \otimes [B^x]_{n \times n})_{nm \times nm} \{u\}_{nm \times 1} \\ + \phi^4 ([D^y]_{m \times m} \otimes [I]_{n \times n})_{nm \times nm} \{u\}_{nm \times 1} \\ + P_u ([I]_{m \times m} \otimes [A^x]_{n \times n})_{nm \times nm} \{u\}_{nm \times 1} \\ = \lambda^4 ([I]_{m \times m} \otimes [I]_{n \times n})_{nm \times nm} \{u\}_{nm \times 1} \end{aligned} \tag{23}$$

In Equation 23, $([I]_{m \times m} \otimes [I]_{n \times n})_{nm \times nm} = [I]$. Then, Equation 23 is rewritten as follows by factoring $\{u\}_{nm \times 1}$:

$$[I]_{m \times m} \otimes [D^x]_{n \times n} + 2\phi^2 [B^y]_{m \times m} \otimes [B^x]_{n \times n} + \phi^4 [D^y]_{m \times m} \otimes [I]_{n \times n} \\ + P_u [I]_{m \times m} \otimes [A^x]_{n \times n} \}_{nm \times nm} \{u\}_{nm \times 1} = \lambda^4 \{u\}_{nm \times 1} \tag{24}$$

By observing the above relationship, it is clear that an eigenvalue problem has been formed. In this way:

$$[Z]_{nm \times nm} \{u\}_{nm \times 1} = \lambda^4 \{u\}_{nm \times 1} \tag{25}$$

$$[Z]_{nm \times nm} = [I]_{m \times m} \otimes [D^x]_{n \times n} + 2\phi^2 [B^y]_{m \times m} \otimes [B^x]_{n \times n} \\ + \phi^4 [D^y]_{m \times m} \otimes [I]_{n \times n} + P_u [I]_{m \times m} \otimes [A^x]_{n \times n} \tag{26}$$

The boundary conditions of the problem are also converted into a boundary condition matrix, as in the aforementioned method, which must be integrated with Equation 34 to finally solve the problem.

3. Results and discussion

In this section, two different cases of the first-order piston theory are analyzed. In the first case, the damping term is not considered in the aerodynamic model, while in the second case, the aerodynamic model is considered in its entirety with two real and imaginary components, the imaginary component being related to the damping due to aerodynamic loading. In order to more accurately evaluate the flutter velocity and the factors affecting it, some specifications for the sheet are defined. For this purpose, an aluminum sheet with a Young's modulus of 70 GPa, a density of 2700 kg/m³ and a Poisson's ratio of 0.35, with dimensions of 1 m x 1 m and a thickness of 5 mm, is investigated under CFCF boundary conditions and free sea surface atmospheric conditions with an air flow density of 1.225 kg/m³ and a sound speed of 343 m/s. These specifications were selected due to the easy availability of sheets with these characteristics in the market and the possibility of facilitating

atmospheric conditions for flutter speed tests by other researchers. Assuming the selection of the aforementioned specifications as the specifications of the sheet under study, the flutter boundary in terms of the dimensionless Mach number for the first and second cases of the first-order piston theory is determined as follows:

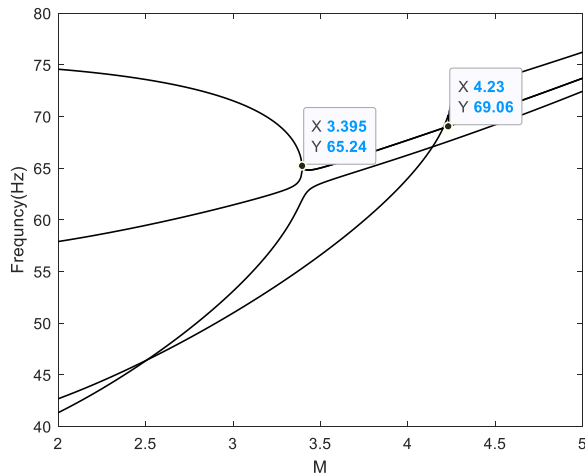


Figure 3: Frequency diagram in terms of Mach number for the first case of the first-order piston theory

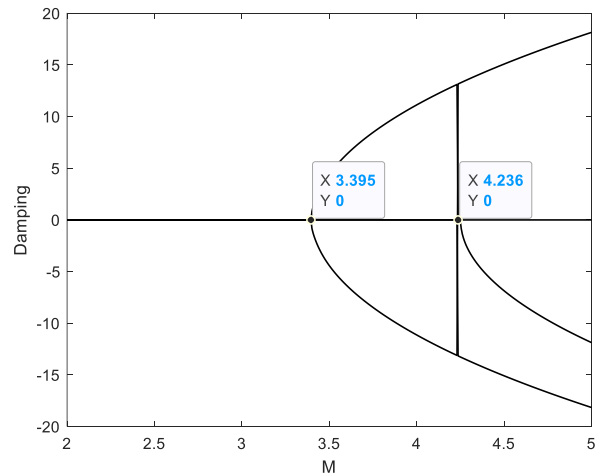


Figure 2: Damping diagram in terms of Mach number for the first case of the first-order piston theory

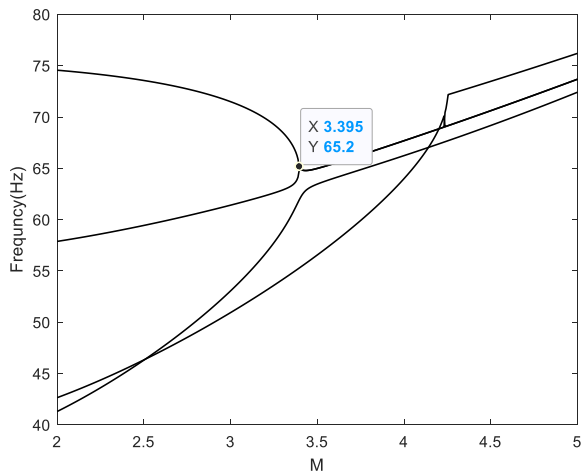


Figure 5: Frequency diagram in terms of Mach number for the second case of the first-order piston theory

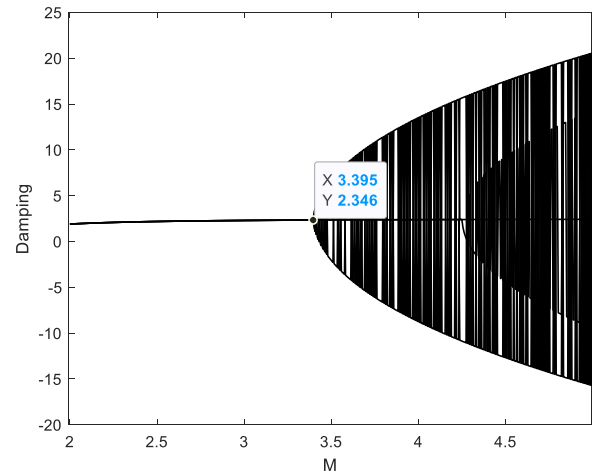


Figure 4: Damping diagram in terms of Mach number for the second case of the first-order piston theory

According to the presented graphs, it is clear that flutter occurs at Mach number 3.395 and this value is the same in both cases of piston theory. Also, the results show that considering the damping due to aerodynamic loading does not affect the value of flutter speed.

4. Conclusion

This research presents a new and comprehensive analysis of the flutter phenomenon in sheets. Using the matrix form in the DQM method and the first-order piston theory, this study not only provides the accuracy and speed of the solution, but also provides a better understanding of the flutter phenomenon. The motion equation of the sheet is based on Kirchhoff's assumptions and the piston theory is used as the aerodynamic model. The results show that considering the damping of the aerodynamic loading does not affect the flutter velocity. As a sheet with a size of 1 meter and a thickness of 5 mm, under free sea surface conditions and CFCF boundary conditions, the first flutter phenomenon occurs at a dynamic pressure after 615 (equivalent to Mach 3.395). This research serves as a fundamental foundation for future research in this field, but also provides an important step in advancing engineering knowledge in the analysis of aerodynamic phenomena by providing an efficient and accurate.



حل عددی و تحلیل فلاتر ورق مستطیلی در جریان مافوق صوت با در نظر گرفتن اثر میرایی آیرودینامیکی

مهران صمدی فروشانی^{الف}، مصطفی ناظمی زاده^{ب*}، محمدمهدی محمدی^پ

^{الف} کارشناس ارشد، مجتمع دانشگاهی مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، ایران، Mehransamadiforoushani@yahoo.com

^ب دانشیار، مجتمع دانشگاهی مکانیک، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، ایران، nazemi@mut.ac.ir

^پ استادیار، مجتمع دانشگاهی مکانیک، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، ایران

واژگان کلیدی	چکیده
سرعت فلاتر جریان مافوق صوت نظریه پیستون روش عددی DQM شرایط مرزی CFCF	این مقاله به بررسی اثر میرایی آیرودینامیکی بر آستانه فلاتر ورق مستطیلی آلومینیومی در جریان مافوق صوت می‌پردازد. با استفاده از قالب ماتریسی در روش DQM و نظریه پیستون مرتبه اول، این مطالعه نه تنها دقت و سرعت حل را ارتقا می‌دهد، بلکه درک عمیق‌تری از پدیده فلاتر به دست می‌دهد. معادله حرکت ورق بر اساس فرضیات کیرششف استخراج شده و نظریه پیستون به عنوان مدل آیرودینامیکی به کار گرفته شده است. با استفاده از روش تفاضل مربعات (DQM)، دو سناریوی مختلف از نظریه پیستون مرتبه اول تحلیل شده است: حالت ساده‌شده بدون میرایی و حالت کامل با در نظرگیری میرایی. نتایج نشان می‌دهد که آستانه فلاتر در هر دو حالت در ماخ ۳.۳۹۵ اتفاق می‌افتد، که بیانگر تأثیر ناچیز میرایی آیرودینامیکی بر سرعت فلاتر است. این یافته با تحلیل حساسیت پارامتری تأیید شده است. بر این اساس، فرمولاسیون ساده‌شده نظریه پیستون به‌عنوان پایه محاسباتی برای مطالعات آتی پیشنهاد می‌شود. این روش مزایای محاسباتی از جمله کاهش زمان محاسبات را دارد و برای کاربردهای عملی در طراحی پنل‌های هوافضایی مناسب است.
تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۰۶/۰۸	
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۴/۱۰/۰۲	
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۵/۰۲/۱۲	

۱- مقدمه

پدیده فلاتر ترکیبی از تعامل نیروهای آیرودینامیکی، نیروهای الاستیک و نیروهای اینرسی است که می‌تواند منجر به گسیختگی سازه‌هایی همچون بال‌های هواپیما شود. در صورت عدم تحلیل دقیق این پدیده، سازه‌های هوایی که معمولاً دارای وزن سبک‌تری هستند، ممکن است دستخوش ناپایداری و تخریب شوند. به همین علت، بررسی و تحلیل فلاتر در طراحی و مهندسی این سازه‌ها اهمیت ویژه‌ای دارد. فلاتر به دو حالت کلی طبقه‌بندی می‌شود: اول، فلاتر ناشی از جفت شدن فرکانس طبیعی سازه با فرکانس‌های ناشی از جریان هوا (مانند پدیده تشدید)، و دوم، فلاتر ناشی از جفت شدن فرکانس‌های سازه‌ای. مورد دوم زمانی اتفاق می‌افتد که فرکانس‌های سازه‌ای تحت تأثیر نیروهای آیرودینامیکی آن‌قدر به هم نزدیک شوند که در یک سرعت خاص از جریان هوا، به هم کوپل شوند و در نتیجه منجر به رفتار ناپایدار سازه گردند. به‌عنوان مثال، در بال‌های هواپیما، فرکانس‌های خمشی و پیچشی می‌توانند به طور همزمان با یکدیگر تعامل داشته باشند و به پدیده فلاتر منجر شوند.

در این باره محققان تلاش‌های فراوانی را برای مطالعه این پدیده انجام داده‌اند. امیرزادگان و داوول [۱] با استفاده از روش

گالرکین^۱ و مدل آیرودینامیکی تئوری پیستون، ارتعاشات غیرخطی یک پوسته منحنی و نازک مستطیلی و همسانگرد را در جریان هوای مافوق صوت مورد بررسی قرار دادند. آنها نتایج تجربی را با نتایج تئوری مقایسه کردند و ویژگی‌های فلاتر و پس فلاتر پانل را مورد بررسی قرار دادند. ژانگ و همکاران [۲] یک مدل تحلیلی از یک پانل دوزنقه‌ای دارای انحنا را با استفاده از تکنیک همگن‌سازی و تئوری لایه‌ای و نظریه پیستون برای تحلیل مودال و آیرولاستیک ورق ارائه دادند. نظریه لایه‌ای پیشنهادی که برای یک صفحه ساندویچی توسعه داده شده بود، میدان جابجایی مرتبه بالاتر را برای لایه هسته و میدان جابجایی مرتبه اول را برای لایه‌های بالا و پایین فرض می‌کرد. آنها دقت این روش را با نتایج حاصل از نرم‌افزارهای مطرح مقایسه کردند و نشان داده شد که روش پیشنهادی از دقت کافی برخوردار است و به تلاش محاسباتی کمتری نیاز دارد، در نتیجه می‌تواند مبنایی نظری برای استفاده از پانل ساندویچ هسته دارای انحنا و دوزنقه‌ای در طراحی هواپیما باشد. بقایی و همکاران [۳] یک رویکرد جدید برای تحلیل فلاتر پانل آیرولاستیک صفحات کامپوزیت مستطیلی توسعه دادند. این پانل هوشمند، که توسط دو کامپوزیت ماکرو فیبر ساندویچ شده است، دارای توالی‌های کلی انباشته است و در معرض محدودیت‌های لبه الاستیک قرار دارد. بررسی اثرات جهت‌گیری در این کامپوزیت‌ها بر روی مرزهای فلاتر این پانل هوشمند انجام شد. قابلیت و اعتبار این رویکرد با تطبیق نتایج با نتایج المان محدود تایید شده است. حسین و ملائب [۴] به بررسی پاسخ‌های غیرخطی پس از ناپایداری پانل‌های نازک با درجه‌بندی عملکردی دو جهته درون صفحه پرداختند. در این مطالعه، پاسخ‌های پس از فلاتر پانل‌هایی که در معرض جریان هوای مافوق صوت قرار می‌گیرند به عنوان مورد دینامیکی و پاسخ‌های پس‌گمانش به عنوان مورد استاتیک در نظر گرفته شده است. همچنین، تأثیر بارگذاری‌های حرارتی و مکانیکی درون صفحه بر روی پایداری پانل‌ها مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته است. در این مطالعه، تئوری پیستون مرتبه اول برای مدل‌سازی آیرودینامیکی و نظریه صفحه کلاسیک همراه با کرنش‌های غیرخطی فون کارمن برای مدل‌سازی سازه استفاده شده است. برای تحلیل، از روش المان محدود استفاده شده است. فرسادی و همکاران [۵] به بررسی فلاتر غیرخطی و رفتار پس از فلاتر صفحه بال مانند با سختی متغیر پرداخته‌اند. در این مطالعه، تئوری پیستون خطی مرتبه اول برای مدل‌سازی آیرودینامیک استفاده شده است و روش حل تفاضل مربعات دیفرانسیل برای حل معادلات حاکم مورد استفاده قرار گرفته است. از تئوری کرنش غیرخطی فون کارمن برای محاسبه غیرخطی‌های هندسی استفاده می‌شود و تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول برای در نظر گرفتن اثرات برشی عرضی در مدل‌سازی ساختار استفاده می‌شود. نتایج نشان می‌دهد که جهت الیاف تأثیر قابل توجهی بر رفتار دینامیکی صفحه و خواص نامتقارن و همچنین رفتار نوسان سیکل حدی دارد. امیرزادگان و داوول [۶] مطالعه‌ای درباره ناپایداری و نوسانات سیکل حدی پوسته‌های الاستیک کم عمق در جریان گاز مافوق صوت انجام دادند. آنها با تجزیه و تحلیل آیرولاستیک غیرخطی صفحات منحنی مربعی در جهت جریان، نتایج تجربی را مقایسه کردند. همچنین امیرزادگان و همکاران [۷] به مطالعه پایداری صفحه الاستیک در جریان گاز مافوق صوت پرداختند. این مطالعه برای درک بیشتر فلاتر پانل، گمانش و ارتعاش ساختارهای نازک هواپیما و موشک در پرواز با سرعت بالا انجام شد. هدف اصلی این تحقیق افزایش طول عمر سازه بود و بررسی کردن تأثیر تنش‌های طولی و جانبی بر روی سرعت فلاتر و ویژگی‌های پانل بود. این تحقیق می‌تواند به تعیین مناطق پایدار و ناپایدار در سازه‌های هواپیما کمک کند. مجیدی و همکاران [۸]، یک مطالعه جامع در مورد تجزیه و تحلیل فلاتر مافوق صوت صفحات دوزنقه‌ای کنسول نانولوله کربنی با درجه بندی عملکردی ارائه دادند. در این مطالعه از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول برای مدل‌سازی سازه استفاده شده است، فشار آیرودینامیکی بر اساس تئوری پیستون تخمین زده می‌شود و مجموعه معادلات حاکم و شرایط مرزی با استفاده از آن استخراج می‌شود. نتایج این مقاله می‌تواند به عنوان ابزاری مفید در طراحی و تحلیل وسایل نقلیه هوایی که با سرعت مافوق صوت پرواز می‌کنند، مورد توجه قرار گیرد. هوانگ [۹] به بررسی ویژگی‌های فلاتر صفحات چهار ضلعی کامپوزیتی تقویت‌شده با نانوپلاکت گرافن پرداختند. از روش ریتز برای مدل‌سازی و از مدل هالپین-تسای^۲ برای پیش‌بینی خواص ماده استفاده کردند. توابع انرژی براساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و تئوری پیستون مرتبه اول بدست آمدند. معادله دینامیکی گسسته صفحات چهار ضلعی با استفاده از تقریب روش ریتز حل شد.

¹ Galerkin Method

² Halpin-Tsai model

دقت نتایج از طریق مقایسه فرکانس‌های طبیعی با مقادیر منتشر شده بررسی شد. موک [۱۰] بررسی تأثیر اثرات برشی عرضی بر ویژگی‌های فلاتر را برای صفحات کامپوزیتی چند لایه مستطیلی نشان داد. فرمول تغییرات مختصر برای انواع مختلف تئوری‌های صفحه (کلاسیک، مرتبه اول و مرتبه بالاتر) نشان داده شده است. روش ارزیابی شده حل را می‌توان به عنوان معیاری برای تحلیل عددی در نظر گرفت، زیرا نتایج تحلیلی را می‌توان مستقیماً با استفاده از بسته‌های نرم‌افزاری مهندسی به دست آورد. بهرامی و همکاران [۱۱]، یک روش عددی برای مطالعه رفتار دینامیکی یک صفحه مستطیلی همسانگرد تحت بارهای آیرودینامیکی ناشی از جریان هوای مافوق صوت موازی ارائه دادند. یک مدل اجزای محدود، بر اساس توابع جابجایی چند جمله‌ای دو بعدی و تئوری پیستون خطی، برای مطالعه رفتار دینامیکی صفحه جامد همراه با بارهای آیرودینامیکی استفاده می‌شود. رویکرد توسعه‌یافته قادر به مدل‌سازی صفحات مسطح و پوسته‌های کم‌عمق است که در آن جفت‌شدگی ساختار سیال در سطح مشترک به طور همزمان با استفاده از روش یکپارچه اعمال می‌شود. مدل جامد بر اساس نظریه پوسته سندرز^۳ است. ماتریس‌های سختی و میرایی که از اعمال بار آیرودینامیکی حاصل می‌شوند با ماتریس‌های به‌دست‌آمده از یک مدل ساختاری همراه می‌شوند و با استفاده از ادغام تحلیلی محاسبه می‌شوند. با جمع آوری ماتریس‌ها، ماتریس‌های جرم کلی، میرایی و سختی صفحه به دست می‌آید و سپس معادلات دینامیکی مسئله حاکم به دست می‌آید. مقادیر ویژه سیستم با استفاده از تکنیک کاهش معادله محاسبه می‌شود. فشار آیرودینامیکی بی‌بعد بحرانی جریان هوا که باعث بال زدن سازه می‌شود برای شرایط مرزی و هندسه‌های مختلف تعیین می‌شود. نتایج به دست آمده با سایر آثار تحقیقاتی منتشر شده مقایسه شده و تطابق بسیار خوبی مشاهده می‌شود. اویانگ و لیو [۱۲] رفتار فلاتر حرارتی غیرخطی ورقه‌های کامپوزیتی با سختی متغیر با الیاف منحنی در جریان مافوق صوت بالا را بررسی کردند. در این مطالعه نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول با ترکیب روابط کرنش-جابجایی انحراف بزرگ فون کارمن، آیرودینامیک تئوری پیستون مرتبه اول شبه پایدار و نظریه تنش حرارتی شبه پایدار برای فرمول‌بندی معادلات المان محدود حرکت پانل فلوتر غیرخطی استفاده شده است. نتایج نشان می‌دهد که فشار دینامیکی بحرانی و دامنه سیکل حد هر دو با افزایش گرادیان دما در امتداد ضخامت پانل افزایش می‌یابند. گوآ [۱۳]، تجزیه و تحلیل فلاتر یک تیغه کامپوزیت تقویت‌شده با نانوپلاکت‌های گرافن درجه‌بندی شده عملکردی در حال چرخش تحت جریان هوای مافوق صوت را بررسی کردند. دقت این روش برای این مشکل توسط مطالعات همگرایی جامع و مطالعات مقایسه دقیق تایید شده است. خلفی و فضیلتی [۱۴] یک فرمول تجزیه و تحلیل ایزوهندسی همراه با تکنیک Nitsche بر اساس تئوری صفحه تغییر شکل برشی مرتبه اول برای بررسی رفتار فلاتر پانل آیرو-ترمو-الاستیک یک صفحه دارای درجه بندی عملکردی حاوی ترک استخراج کردند. دقت و کیفیت فرمول ایزوهندسی حاضر در مقایسه با موارد موجود در ادبیات نشان داده شده است. سلام و همکاران [۱۵] به بررسی اثر تعدیل نیروهای اینرسی و الاستیک بر فلاتر و پایداری پانل‌های کامپوزیت نازک چند لایه پرداختند. معادلات حرکت پانل بر اساس اصل همپلتون به دست آمده است. تئوری پیستون مرتبه اول برای محاسبه بارگذاری آیرودینامیکی استفاده می‌شود. عنصر صفحه مستطیلی بوگتر-فاکس-اشمیت در فرمول بندی معادلات اجزای محدود در نظر گرفته شده است. نتایج اثر قابل توجه روش پیشنهادی را نشان می‌دهد. باغدساریان [۱۶]، پایداری یک صفحه مستطیلی در جریان مافوق صوت را در حضور میدان دمایی ناهمگن در ضخامت بررسی کردند. نشان داده شده است که میدان دما و سرعت جریان وابستگی متقابل دارند و فرآیند پایداری را تنظیم می‌کنند. همچنین نشان داده شده است که میدان دما معنادار است به شدت بر سرعت بحرانی فلاتر تأثیر می‌گذارد. فرهادی [۱۷]، با بررسی معادلات حاکم و به کارگیری روش SOF (فیدبک خروجی استاتیک)، سعی کردند حسگرهای ارتعاش را برای نزدیک‌ترین عملکرد به کنترل‌کننده LQR جایابی کنند. آنها برای این کار، از یک ورق مستطیلی که در معرض جریان سوپرسونیک قرار دارد و همچنین برای کنترل ارتعاشات ورق از یک وصله پیزوالکتریک استفاده کردند. همچنین برای شبیه سازی ورق از تئوری ون کارمن^۴ و تئوری ورق نسبتاً ضخیم میندلین^۵، و برای مدل‌سازی جریان هوا تئوری مرتبه اول پیستون^۶ استفاده شده است. معادلات حرکت را با استفاده از روش لاگرانژ و تقریب میدان جابجایی توسط سری‌های توانی محدود بدست آوردند. سپس معیاری برای یافتن نقاطی که ترکیب فیدبک جابجایی آنها

³ Sanders shell theory

⁴ Von Karman theory

⁵ Mindlin

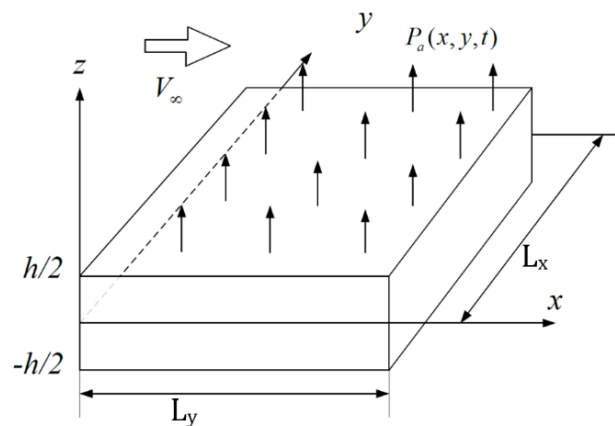
⁶ First order theory of the piston

می تواند نزدیکترین عملکرد کنترلی را در مقایسه با کنترلر LQR ایجاد نماید، ارائه دادند. در نهایت با شبیه سازی عددی کارایی معیار بدست آمده مورد ارزیابی و تأیید قرار گرفته شد. ناظمی زاده و همکارانش [۱۷۸] بررسی پدیده فلاتر در یک ورق مستطیلی-شکل در جریان هوای مافوق صوت پرداختند. آنها با استفاده از فرضیات ورق کیرششف، معادله حرکت ورق استخراج شده و با مدل آیرودینامیکی پیستون مرتبه اول معادلات حاکم بر فلاتر ورق را بدست آوردند. فرمول بندی ارائه شده توسط آنها به عنوان یک پایه برای حل و محاسبه سرعت فلاتر اجسام مختلف در جریان هوای مافوق صوت مورد استفاده قرار گرفت.

در این تحقیق، اثر میرایی آیرودینامیکی بر آستانه فلاتر ورق مستطیلی آلومینیومی در جریان مافوق صوت با استفاده از روش DQM بررسی شده است. تاکنون در مطالعات مربوط به سرعت فلاتر با استفاده از DQM، این روش به صورت قالب ماتریسی به کار گرفته نشده است. یکی از نوآوری های این مطالعه، استفاده از قالب ماتریسی برای حل DQM مسئله فلاتر است که مزیت اصلی آن سرعت و دقت حل است. این تحقیق دو سناریوی مختلف از نظریه پیستون مرتبه اول را تحلیل می کند: حالت ساده شده بدون میرایی و حالت کامل با در نظر گیری میرایی. در این مطالعه، معادله ورق با استفاده از فرضیات کرششف استخراج شده است. همچنین از نظریه پیستون مرتبه اول به عنوان مدل آیرودینامیکی برای تحلیل جریان هوا و تعیین سرعت فلاتر استفاده شده است.

۲- استخراج معادلات حاکم

۲-۱- تعیین معادله حرکت ورق



شکل ۱ نمایی از ورق مستطیل شکل در جریان هوای مافوق صوت

معادله حرکت ورق و شرایط مرزی آن بر مبنای استفاده از فرضیات ورق کیرششف و فرضیات تار خنثی از مرجع [۱۷۹] استخراج شده اند و به صورت زیر نوشته می شود:

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p(x, y, t) \quad (1)$$

در لبه ای با تکیه گاه آزاد (Free or F)، نیروی برشی و ممان خمشی در نقاط مرزی ورق برابر صفر است، در لبه ای با تکیه گاه ساده (Simple or S)، خیز ورق و ممان خمشی در نقاط مرزی ورق برابر صفر است و در لبه ای با تکیه گاه یکسرگیردار (clamped or C)، خیز و شیب خیز ورق در نقاط مرزی ورق برابر صفر است. این شرایط به صورت زیر نوشته می شوند:

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (2)$$

$$V_x = Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x} \right) = 0$$

$x = 0$ یا $x = L_x \rightarrow$ Free

$$x = 0 \text{ یا } x = L_x \rightarrow \text{Simple} \quad M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (3)$$

$$x = 0 \text{ یا } x = L_x \rightarrow \text{clamped} \quad \begin{aligned} w &= 0 \\ \frac{\partial w}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

۲-۲- تعیین مدل بارگذاری آیرودینامیکی

نظریه پیستون، که به عنوان نظریه جریان پتانسیل خطی نیز شناخته می‌شود، یک چارچوب بنیادی در آیرودینامیک است که به مدل‌سازی جریان هوا در اطراف اجسام می‌پردازد. در این نظریه، جریان هوا به عنوان یک سیال غیرلزج و تراکم‌ناپذیر در نظر گرفته می‌شود، به این معنی که چگالی هوا ثابت باقی می‌ماند و تغییرات فشار تنها به دلیل تفاوت در سرعت نقاط مختلف سطح است. این نظریه به دلیل سادگی و سرعت محاسباتی مورد نیاز، جایگاه مهمی در میان نظریه‌های آیرودینامیکی دارد و به ویژه برای بهینه‌سازی طراحی و حل مسائل پیچیده آیرودینامیکی مفید است. در این مطالعه از تئوری پیستون مرتبه اول استفاده شده است و فرض شده است که جریان فقط از روی ورق عبور می‌کند و در طرف دیگر ورق تنها فشار استاتیک هوا وجود دارد. با این فرض، فشار خارجی وارد به ورق به صورت اختلاف فشار دینامیکی و استاتیکی هوا بیان می‌شود. این تئوری برای $M_\infty > \sqrt{2}$ اعتبار دارد. این فشار خارجی به صورت زیر فرمول‌بندی شده است:

$$p_a(x, y, t) = -\frac{\rho_a V_\infty^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \left\{ \frac{\partial w}{\partial x} + \left(\frac{M_\infty^2 - 2}{M_\infty^2 - 1} \right) \frac{1}{V_\infty} \frac{\partial w}{\partial t} \right\} \quad (5)$$

۲-۳- معادله کوپل شده سازه-سیال

در این قسمت معادله نهایی حرکت ورق با فرض استفاده از مدل بارگذاری آیرودینامیکی پیستون مرتبه اول تحت عنوان "معادله کوپل شده سازه-سیال" به صورت زیر بیان می‌شود:

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\rho_a V_\infty^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \left\{ \frac{\partial w}{\partial x} + \left(\frac{M_\infty^2 - 2}{M_\infty^2 - 1} \right) \frac{1}{V_\infty} \frac{\partial w}{\partial t} \right\} = 0 \quad (6)$$

در معادله بالا پارامترهای ρ ، h ، ρ_a و V_∞ و M_∞ به ترتیب معرف چگالی ورق، ضخامت ورق، چگالی جریان هوا، سرعت جریان هوا و عدد ماخ جریان هوا می‌باشند. در این رابطه فرض شده است که جریان هوا در راستای X به ورق وارد می‌شود. برای حل کردن این معادله در حوزه فرکانس، از روش جداسازی متغیرها به صورت زیر استفاده می‌شود. متغیر این معادلات همان متغیر خیز ورق است. جداسازی این متغیر به صورت زیر انجام می‌شود:

$$w(x, y, t) = W(x, y) e^{i\omega t} \quad (7)$$

و از آنجایی که تابع $p(x, y, t)$ در تئوری مرتبه اول پیستون برحسب تابع $w(x, y, t)$ نوشته شده است، میتوان جداسازی متغیرها در این تابع را به صورت زیر نشان داد:

$$p(x, y, t) = P(x, y) e^{i\omega t} \quad (8)$$

حال با استفاده از روابط γ و λ ، معادله کوپل شده سازه سیال به صورت زیر جداسازی می‌شود:

$$D \left(\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} \right) e^{i\omega t} + \rho h W (i\omega)^2 e^{i\omega t} = P(x, y) e^{i\omega t} \quad (9)$$

$$\rightarrow \left(\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} \right) - \frac{1}{D} P(x, y) = \frac{\rho h \omega^2}{D} W \quad (10)$$

روابط زیر برای بی‌بعد کردن معادله بالا به کار می‌روند:

$$\left(\begin{array}{l} \frac{x}{X} = L_x \\ \frac{y}{Y} = L_y \\ \frac{Lx}{Ly} = \emptyset \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{l} d^r x = L_x^r (d^r X) \\ d^r y = L_y^r (d^r Y) \end{array} \right) \quad (11)$$

با استفاده از روابط بالا، معادله کوپل شده سازه-سیال به صورت زیر بی بعد می شود:

$$\left(\frac{\partial^4 W}{\partial X^4} + 2\emptyset^2 \frac{\partial^4 W}{\partial X^2 \partial Y^2} + \emptyset^4 \frac{\partial^4 W}{\partial Y^4} \right) - \left(\frac{L_x^4}{D} \right) P(x, y) = \left(\frac{L_x^4 \rho h \omega^2}{D} \right) W \quad (12)$$

همچنین معادله پیستون مرتبه اول به صورت زیر بی بعد می شود:

$$P(x, y) = - \frac{\rho_a V_\infty^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \left\{ \frac{\partial W}{\partial x} + i\omega \left(\frac{M_\infty^2 - 2}{M_\infty^2 - 1} \right) \frac{1}{V_\infty} W \right\} \quad (13)$$

با تعریف عدد ماخ به صورت زیر، معادله پیستون مرتبه اول به شکل زیر بازنویسی می شود:

$$M_\infty = \frac{V_\infty}{C_a} \rightarrow P(x, y) = \left[- \frac{\rho_a C_a^2 M_\infty^2}{L_x \sqrt{M_\infty^2 - 1}} \frac{\partial W}{\partial X} \right] + i\omega \left[- \frac{\rho_a C_a M_\infty (M_\infty^2 - 2)}{(M_\infty^2 - 1)^{1.5}} W \right] \quad (14)$$

جمله موهومی در معادله بالا، نمایانگر اثر میراکننده ورق توسط جریان هوا است. برای ارزیابی تأثیر پارامتر میراکننده بر تعیین سرعت فلاتر، دو سناریو برای نظریه پیستون مرتبه اول در نظر گرفته شده است. در سناریوی اول، جمله موهومی از نظریه حذف می شود، و در سناریوی دوم، این جمله در نظریه حفظ می شود. نظریه پیستون در این دو حالت به صورت زیر بیان می شود:

$$P_1(x, y) = \left[- \frac{\rho_a C_a^2 M_\infty^2}{L_x \sqrt{M_\infty^2 - 1}} \frac{\partial W}{\partial X} \right] \quad (15)$$

نظریه پیستون در حالت اول

$$P_2(x, y) = \left[- \frac{\rho_a C_a^2 M_\infty^2}{L_x \sqrt{M_\infty^2 - 1}} \frac{\partial W}{\partial X} \right] + i\omega \left[- \frac{\rho_a C_a M_\infty (M_\infty^2 - 2)}{(M_\infty^2 - 1)^{1.5}} W \right] \quad (16)$$

نظریه پیستون در حالت دوم

در نهایت معادله کوپل شده سازه-سیال به صورت زیر نوشته می شود:

$$\rightarrow \left(\frac{\partial^4 W}{\partial X^4} + 2\emptyset^2 \frac{\partial^4 W}{\partial X^2 \partial Y^2} + \emptyset^4 \frac{\partial^4 W}{\partial Y^4} \right) + P_u \frac{\partial W}{\partial X} = \lambda^4 W \quad (17)$$

در رابطه بالا λ و P_u به ترتیب فرکانس بدون بعد و فشار دینامیکی بدون بعد هوا می باشند:

$$P_u = \left(\frac{L_x^3}{D} \right) \frac{\rho_a C_a^2 M_\infty^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \quad (18)$$

$$\lambda = \begin{cases} \lambda_1 = \left(\left(\frac{L_x^4}{D} \right) (\rho h \omega^2) \right)^{\frac{1}{4}} \\ \lambda_2 = \left(\left(\frac{L_x^4}{D} \right) \left(\rho h \omega^2 - i \frac{\rho_a C_a M_\infty (M_\infty^2 - 2)}{(M_\infty^2 - 1)^{1.5}} \omega \right) \right)^{\frac{1}{4}} \end{cases} \quad (19)$$

طبق رابطه بالا، با داشتن مقادیر λ ، مقادیر فرکانس ورق (ω) به صورت زیر بدست می آید:

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \left(\frac{\lambda}{L_x}\right)^2 \quad (20)$$

۲-۴- حل معادله کوپل شده سازه-سیال به روش عددی DQM

روش تفاضل مربعات دیفرانسیل (DQM) یک تکنیک عددی قدرتمند است که برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی (PDEs^y) استفاده می‌شود. درون‌یابی با استفاده از چند جمله‌ای لاگرانژ، زیربنای ریاضیاتی در این روش می‌باشد. عبارتی که برای روش DQM مورد استفاده قرار می‌گیرد، مشتق چندجمله‌ای لاگرانژ است که به صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$f(x) = \sum_{j=1}^N \left(\frac{\prod_{k=1, k \neq j}^N (x - x_k)}{\prod_{k=1, k \neq j}^N (x_j - x_k)} \right) f_j = \sum_{j=1}^N L_j(x) f_j \quad (21)$$

$$\rightarrow \frac{d^r f}{dx^r} = \sum_{j=1}^N \frac{d^r L_j(x)}{dx^r} f_j \quad (22)$$

مشتق مرتبه اول $L_j(x)$ نسبت به x به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$A_{ij} = \left. \frac{dL_j(x)}{dx} \right|_{x_i} = \begin{cases} \frac{\prod_{k=1, k \neq j}^N (x_i - x_k)}{\prod_{k=1, k \neq j}^N (x_j - x_k)} & i \neq j \\ \sum_{k=1, k \neq i}^N \frac{1}{(x_i - x_k)} & i = j \end{cases} \quad (23)$$

$$\rightarrow \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x_i} = \sum_{j=1}^N A_{ij} f_j \quad (24)$$

فرم ماتریسی رابطه بالا به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\left\{ \frac{df}{dx} \right\} = [A]_{N \times N} \{f\}_{N \times 1} = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N1} & \cdots & A_{NN} \end{bmatrix} \{f_1, f_2, \dots, f_N\}^T \quad (25)$$

این فرم برای مشتقات بالاتر به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\left\{ \frac{d^r f}{dx^r} \right\} = [A] \left\{ \frac{d^{r-1} f}{dx^{r-1}} \right\} = [A]^r \{f\} \quad (26)$$

برای ایجاد ماتریس ضرایب وزنی ($[A]$) نیاز به تعریف و توزیع نقاط نمونه روی مدل می‌باشد. توزیع غیریکنواخت چبیشف و ماتریس‌های ضرایب وزنی برای حالتی که f تابعی از x و y باشد به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$x_i = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \cos \left(\frac{i-1}{n-1} \pi \right) \right\} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (27)$$

$$y_i = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \cos \left(\frac{i-1}{m-1} \pi \right) \right\} \quad i = 1, 2, 3, \dots, m \quad (28)$$

در نهایت روش DQM به صورت زیر برای جملات مختلف از معادله پیاده‌سازی می‌شود:

⁷ partial differential equations

$$\begin{cases} w_{ij} = w(x_i, y_j) \\ i = 1, 2, \dots, n \\ j = 1, 2, \dots, m \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{d^r w}{dx^r} = [A^x]_{n \times n}^{(r)} [w]_{n \times m} \\ \frac{d^s w}{dy^s} = [w]_{n \times m} ([A^y]_{m \times m}^{(s)})^T \\ \frac{d^{r+s} w}{dx^r dy^s} = [A^x]_{n \times n}^{(r)} [w]_{n \times m} ([A^y]_{m \times m}^{(s)})^T \end{cases} \quad (29)$$

با استفاده از این روش حل، معادله کوپل شده سازه-سیال به فرم زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} [A^x]_{n \times n}^4 [W]_{n \times m} + 2\phi^2 [A^x]_{n \times n}^2 [W]_{n \times m} [A^y]_{m \times m}^2 \\ + \phi^4 [W]_{n \times m} [A^y]_{m \times m}^2 + P_u [A^x]_{n \times n} [W]_{n \times m} \\ = \lambda^4 [W]_{n \times m} \end{aligned} \quad (30)$$

در این معادله، خیز ورق (W) پس از اعمال روش حل عددی DQM به فرم ماتریس بیان شده است و برای آنکه بتوان ماتریس $[W]_{n \times m}$ را از معادله فاکتور گرفت و معادله را به فرم مسئله مقدار ویژه استاندارد نوشت، باید از ضرب کرونیگر استفاده کرد.

$$[w]_{n \times m} = \begin{bmatrix} w_{1,1} & \dots & w_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{n,1} & \dots & w_{n,m} \\ u_1 & & u_m \end{bmatrix} = [u_1, u_2, \dots, u_m], \{u\}_{nm \times 1} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{m-1} \\ u_m \end{Bmatrix}_{nm \times 1} \quad (31)$$

در نهایت معادله کوپل شده سازه-سیال به فرم زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} ([I]_{m \times m} \otimes [D^x]_{n \times n})_{nm \times nm} \{u\}_{nm \times 1} \\ + 2\phi^2 ([B^y]_{m \times m} \otimes [B^x]_{n \times n})_{nm \times nm} \{u\}_{nm \times 1} \\ + \phi^4 ([D^y]_{m \times m} \otimes [I]_{n \times n})_{nm \times nm} \{u\}_{nm \times 1} \\ + P_u ([I]_{m \times m} \otimes [A^x]_{n \times n})_{nm \times nm} \{u\}_{nm \times 1} \\ = \lambda^4 ([I]_{m \times m} \otimes [I]_{n \times n})_{nm \times nm} \{u\}_{nm \times 1} \end{aligned} \quad (32)$$

در رابطه ۳۲، $[I]_m \otimes [I]_n = [I]$ است. در ادامه رابطه ۳۲ با فاکتور گرفتن $\{u\}_{nm \times 1}$ به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned} [I]_{m \times m} \otimes [D^x]_{n \times n} + 2\phi^2 [B^y]_{m \times m} \otimes [B^x]_{n \times n} + \phi^4 [D^y]_{m \times m} \otimes [I]_{n \times n} \\ + P_u [I]_{m \times m} \otimes [A^x]_{n \times n}]_{nm \times nm} \{u\}_{nm \times 1} = \lambda^4 \{u\}_{nm \times 1} \end{aligned} \quad (33)$$

با مشاهده رابطه بالا مشخص می‌شود که مسئله مقدار ویژه تشکیل شده است. به این صورت که:

$$[Z]_{nm \times nm} \{u\}_{nm \times 1} = \lambda^4 \{u\}_{nm \times 1} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} [Z]_{nm \times nm} = [I]_{m \times m} \otimes [D^x]_{n \times n} + 2\phi^2 [B^y]_{m \times m} \otimes [B^x]_{n \times n} \\ + \phi^4 [D^y]_{m \times m} \otimes [I]_{n \times n} + P_u [I]_{m \times m} \otimes [A^x]_{n \times n} \end{aligned} \quad (35)$$

شرایط مرزی مسئله نیز مانند روش یاد شده به یک ماتریس شرایط مرزی تبدیل می‌شوند که برای حل نهایی مسئله، این ماتریس شرایط مرزی باید با معادله ۳۴ ادغام شود.

۳- نتایج

در این قسمت، ابتدا نتایج بدست آمده با منابع موجود در ادبیات موضوع، مقایسه می‌شود تا صحت معادلات استخراج شده و

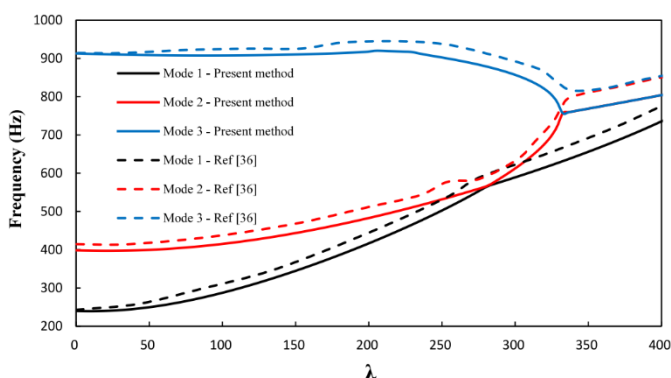
دقت روش عددی DQM در حل مسئله فلاتر تایید شود. سپس نتایج موردنظر برای شرایط مرزی CFCF^۸ ارائه می‌شود.

۳-۱- بررسی صحت نتایج

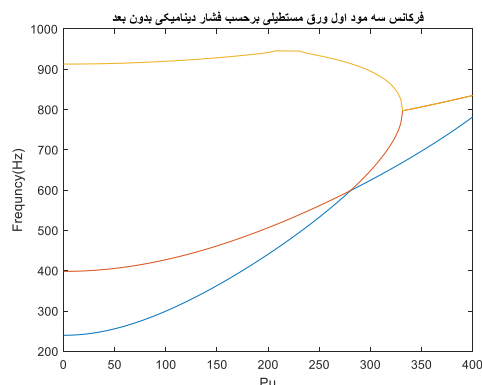
در این قسمت، نتایج حاصل از روش DQM برای پیدا کردن مرز فلاتر با نتایج موجود در مقالات مربوطه مقایسه می‌شود. در این مقالات به جای آنکه فرکانس مودها برحسب سرعت جریان هوا یا عدد ماخ رسم شود، برحسب فشار دینامیکی بدون بعد جریان هوا رسم شده‌است. این فشار از رابطه 3×10^3 معرفی می‌شود. برای مقایسه نتایج، از حالت اول نظریه پیستون مرتبه اول که از رابطه بخش قبل بدست می‌آید، استفاده شده‌است. در ادامه نتایج حاصل از روش DQM با نتایج مراجع [۱۱] و [۲۰] مقایسه می‌شود. این بررسی برای زاویه $\alpha=0$ انجام شده است.

جدول ۱ مشخصات ورق مورد مطالعه [۱۱] و [۲۰]

شرایط مرزی	ضخامت ورق	عرض ورق	طول ورق	ضریب پواسون ورق	چگالی ورق	مدول یانگ ورق
SFSF ^۹	0.001 m	0.1 m	0.1 m	0.33	7930 kg/m ³	210e+9 GPa
SCSC ^{۱۰}	0.001 m	1 m	1 m	0.33	7930 kg/m ³	210e+9 GPa
SSSS ^{۱۱}	0.001 m	1 m	1 m	0.33	7930 kg/m ³	210e+9 GPa
FCCF ^{۱۲}	0.01 m	0.1 m	0.1 m	0.33	7930 kg/m ³	210e+9 GPa



شکل ۳ نمودار فرکانس برحسب فشار دینامیکی بدون بعد از مقاله [۱۱] در شرایط مرزی SFSF



شکل ۴ نمودار فرکانس برحسب فشار دینامیکی بدون بعد از روش DQM در شرایط مرزی SFSF

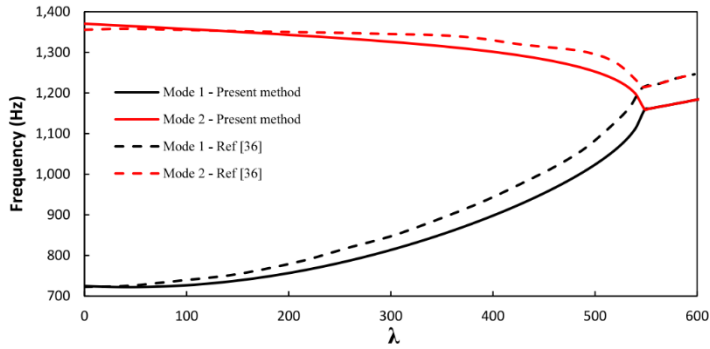
^۸ clamp-free-clamp-free

^۹ Simple-free-simple-free

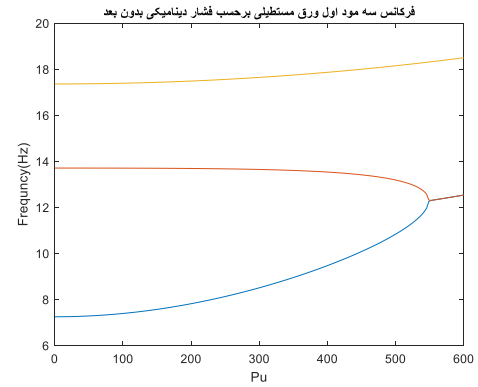
^{۱۰} Simple-clamp-simple-clamp

^{۱۱} Simple-simple-simple-simple

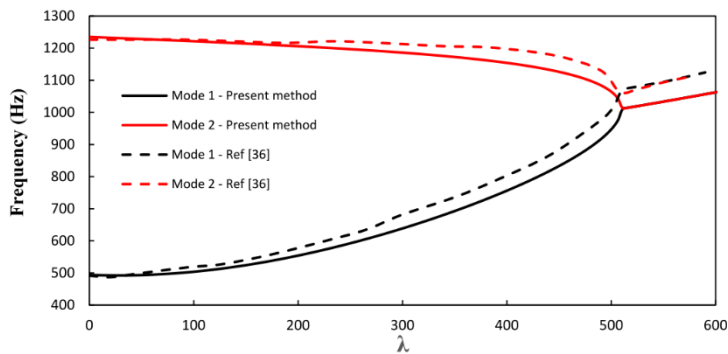
^{۱۲} Free-clamp-free-free



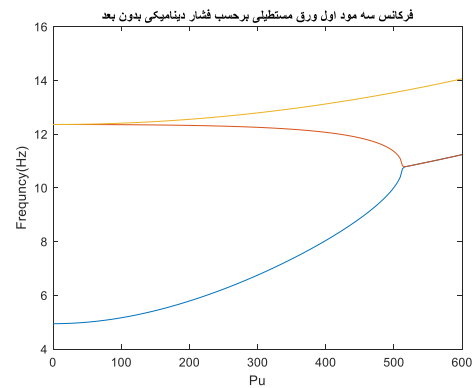
شکل ۵ نمودار فرکانس برحسب فشار دینامیکی بدون بعد از مقاله [۱۱] در شرایط مرزی SCSC



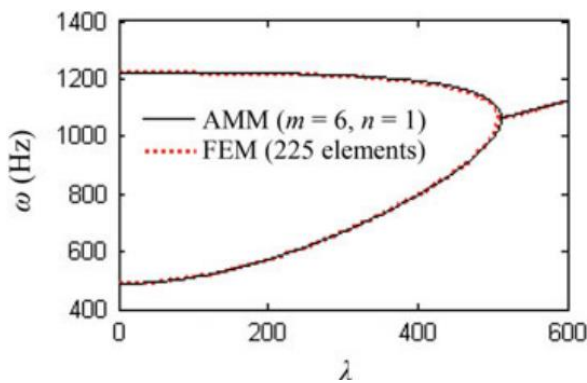
شکل ۴ نمودار فرکانس برحسب فشار دینامیکی بدون بعد از روش DQM در شرایط مرزی SFSF



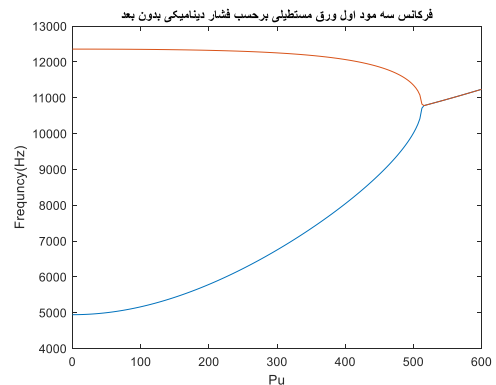
شکل ۷ نمودار فرکانس برحسب فشار دینامیکی بدون بعد از مقاله [۱۱] در شرایط مرزی SSSS



شکل ۶ نمودار فرکانس برحسب فشار دینامیکی بدون بعد از روش DQM در شرایط مرزی SSSS



شکل ۹ نمودار فرکانس برحسب فشار دینامیکی بدون بعد از مقاله [۲۰] در شرایط مرزی FCFF

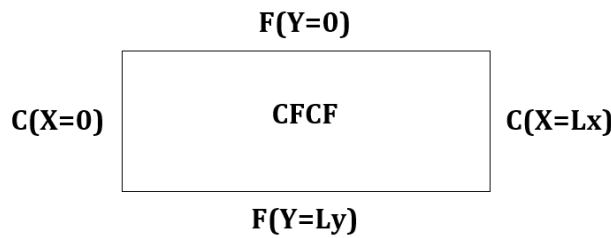


شکل ۸ نمودار فرکانس برحسب فشار دینامیکی بدون بعد از روش DQM در شرایط مرزی FCFF

مقایسه نمودارهای استخراج شده از مقالات با نمودارهای بدست آمده از کد متلب به روش DQM نشان دهنده صحت معادلات استخراج شده، انتخاب مناسب نظریه پیستون مرتبه اول به عنوان مدل آیرودینامیکی و دقت بالای روش عددی DQM برای حل این مسئله است.

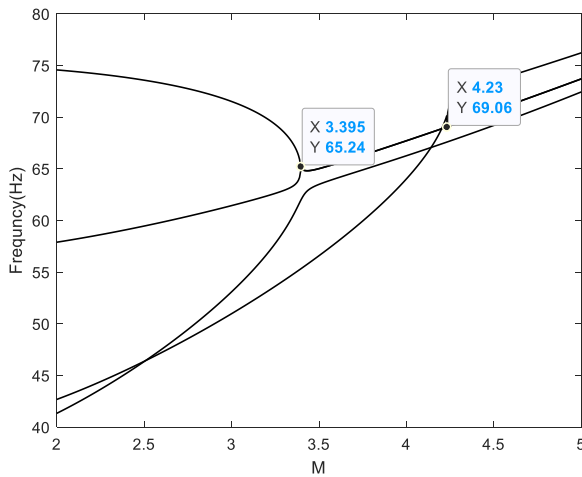
۳-۲- نتایج تحلیل حساسیت پارامتری میرایی آیرودینامیکی بر سرعت فلاتر

در این بخش، دو حالت متفاوت از نظریه پیستون مرتبه اول مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌گیرد. در حالت اول، جمله میراکننده در مدل آیرودینامیکی در نظر گرفته نشده است، در حالی که در حالت دوم، مدل آیرودینامیکی به صورت کامل با دو جزء حقیقی و موهومی در نظر گرفته می‌شود که جزء موهومی به میرایی ناشی از بارگذاری آیرودینامیکی مربوط می‌شود. به منظور ارزیابی دقیق تر سرعت فلاتر و عوامل مؤثر بر آن، مشخصاتی برای ورق تعریف می‌شود. برای این منظور، یک ورق آلومینیومی با مدول یانگ ۷۰ گیگاپاسکال، چگالی ۲۷۰۰ کیلوگرم بر متر مکعب و ضریب پواسون ۰.۳۵، با ابعاد ۱ متر در ۱ متر و ضخامت ۵ میلی‌متر، در شرایط مرزی CFCF و شرایط جوی سطح آزاد دریا با چگالی جریان هوا ۱.۲۲۵ کیلوگرم بر متر مکعب و سرعت صوت ۳۴۳ متر بر ثانیه، مورد بررسی قرار می‌گیرد. انتخاب این مشخصات به دلیل دسترسی آسان به ورق با این ویژگی‌ها در بازار و امکان تسهیل شرایط جوی برای آزمایش‌های سرعت فلاتر توسط سایر محققان صورت گرفته است.

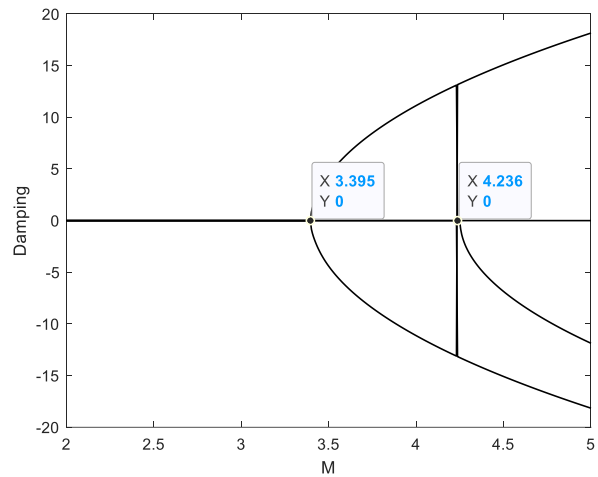


شکل ۱۰ نمایش شرایط مرزی CFCF روی لبه‌های ورق مستطیلی

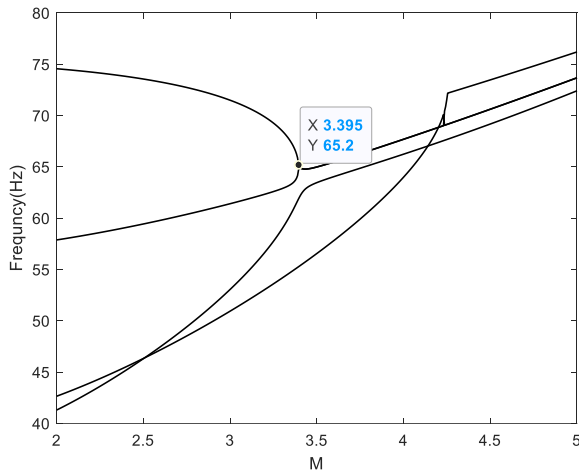
با فرض انتخاب مشخصات یاد شده به عنوان مشخصات ورق مورد بررسی، مرز فلاتر برحسب عدد بدون بعد ماخ برای دو حالت اول و دوم نظریه پیستون مرتبه اول به صورت زیر تعیین می‌شوند:



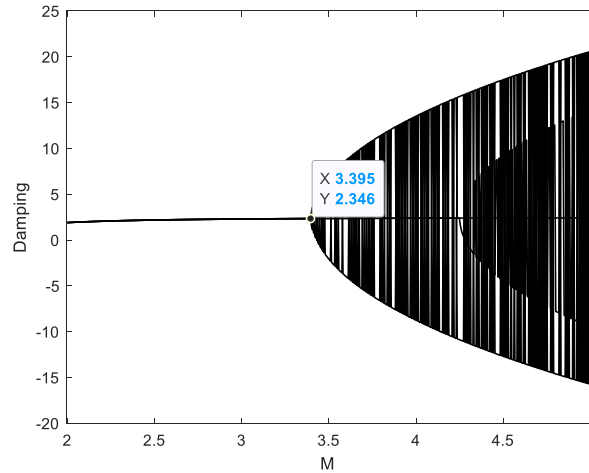
شکل ۱۲ نمودار فرکانس برحسب عدد ماخ برای حالت اول نظریه پیستون مرتبه اول



شکل ۱۱ نمودار میرایی برحسب عدد ماخ برای حالت اول نظریه پیستون مرتبه اول



شکل ۱۴ نمودار فرکانس بر حسب عدد ماخ برای حالت دوم نظریه پیستون مرتبه اول



شکل ۱۳ نمودار میرایی بر حسب عدد ماخ برای حالت دوم نظریه پیستون مرتبه اول

با توجه به نمودارهای ارائه شده، مشخص می‌شود که فلاتر در عدد ماخ ۳.۳۹۵ اتفاق می‌افتد و این مقدار در هر دو حالت نظریه پیستون یکسان است. همچنین، نتایج نشان می‌دهند که در نظر گرفتن میرایی ناشی از بارگذاری آیرودینامیکی تأثیری بر مقدار سرعت فلاتر ندارد.

۳-۳- نتیجه گیری

این تحقیق با ارائه یک رویکرد نوین و جامع، به تحلیل پدیده فلاتر در ورق‌ها پرداخته است. با استفاده از قالب ماتریسی در روش DQM و نظریه پیستون مرتبه اول، این مطالعه نه تنها دقت و سرعت حل را ارتقا می‌دهد، بلکه درک عمیق‌تری از پدیده فلاتر به دست می‌دهد. معادله حرکت ورق بر اساس فرضیات کیرشلف استخراج شده و نظریه پیستون به عنوان مدل آیرودینامیکی به کار گرفته شده است. نتایج نشان می‌دهند که در نظر گرفتن میرایی بارگذاری آیرودینامیکی تأثیری بر مقدار سرعت فلاتر ندارد. به عنوان مثال، برای یک ورق آلومینیومی با ابعاد ۱ متر در ۱ متر و ضخامت ۵ میلی‌متر، در شرایط سطح آزاد دریا و با شرایط مرزی CFCCF، اولین پدیده فلاتر در فشار دینامیکی بدون بعد ۶۱۵ (معادل ۳.۳۹۵ ماخ) رخ می‌دهد. این تحقیق نه تنها به عنوان یک پایه اساسی برای تحقیقات آینده در این زمینه عمل می‌کند، بلکه با ارائه یک رویکرد کارآمد و دقیق، گامی مهم در پیشبرد دانش مهندسی در تحلیل پدیده‌های آیرودینامیکی برداشته است.

Authorship Contribution Statement

Mehran Samadi



Biography: Mehran Samadi is the student of M.Sc. in Mechanical Engineering at Malek Ashtar University of Technology. His current research topics are robotics, nonlinear dynamics, and vibration and flutter analysis

Contribution Statement: Investigation, Formal analysis, Validation, Software, Visualization, Writing & editing

Dr. Mostafa Nazemizadeh



Biography: Mostafa Nazemizadeh received his PhD in Mechanical Engineering from Amirkabir University of Technology, in 2016. His current research interests are robotics, nonlinear dynamics, optimal control, micro-to-nano system modeling and nonlinear vibration

Contribution Statement: Conceptualization, Resources, Supervision, Methodology, Writing & editing

Dr. Mohammad
Mahdi Mohammadi



Biography: Mohammad Mahdi Mohammadi received his PhD in Mechanical Engineering from Iran University of Science and Technology, in 2017. His current research interests are aero-elastic problems, sloshing and structural vibration analysis

Contribution Statement: Conceptualization, Resources, Supervision, Project administration

۴- مراجع

- [1] Amirzadegan S, Dowell EH. Correlation of experimental and computational results for flutter of streamwise curved plate. *AIAA Journal*. 2019; 57: 3556-3561.
- [2] Zhuang W, Chao Y, Zhigang W. Modal and aeroelastic analysis of trapezoidal corrugated-core sandwich panels in supersonic flow. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2019; 157: 267-281.
- [3] Baghaee M, Farrokhbabadi A, Jafari-Talookolaei RA. Modeling, analysis, and control of MFC sandwiched laminate panel flutter with general layups and arbitrary boundary conditions. *Composite Structures*. 2019; 223: 110940.
- [4] Hussein OS, Sameer BM. Nonlinear aeroelastic stability analysis of in-plane functionally graded metal nanocomposite thin panels in supersonic flow. *Thin-Walled Structures*. 2019; 139: 398-411.
- [5] Farsadi T, Asadi D, Kurtaran H. Nonlinear flutter response of a composite plate applying curvilinear fiber paths. *Acta Mechanica*. 2020; 231: 715-731.
- [6] Amirzadegan S, Dowell EH. Nonlinear limit cycle oscillation and flutter analysis of clamped curved plates. *Journal of Aircraft*. 2020; 57: 368-376.
- [7] Amirzadegan S, Mousavi Safavi SM, Jafarzade A. Supersonic panel flutter analysis assuming effects of initial structural stresses. *Journal of The Institution of Engineers: Series C*. 2019; 100: 833-839.
- [8] Majidi MH, Azadi M, Fahham H. Effect of CNT reinforcements on the flutter boundaries of cantilever trapezoidal plates under yawed supersonic fluid flow. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*. 2022; 50: 630-650.
- [9] Huang K. Flutter analysis of laminated composite quadrilateral plates reinforced with graphene nanoplatelets using the element-free IMLS-Ritz method. *Aerospace Science and Technology*. 2020; 103: 105915.
- [10] Muc A. Transverse shear effects in supersonic flutter problems for composite multilayered rectangular plates—Benchmark for numerical analysis. *Composites Part C: Open Access*. 2020; 1: 100001.
- [11] Bahrami-Torabi H, Kerboua Y, Lakis AA. Finite element model to investigate the dynamic instability of rectangular plates subjected to supersonic airflow. *Journal of Fluids and Structures*. 2021; 103: 103267.
- [12] Ouyang X, Liu Y. Flutter of variable stiffness composite laminates in supersonic flow with temperature effects. *Journal of Composite Materials*. 2021; 55: 3253-3266.
- [13] Guo H. Meshless numerical approach to flutter analysis of rotating pre-twisted nanocomposite blades subjected to supersonic airflow. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2021; 132: 1-11.
- [14] Khalafi V, Fazilati J. Panel flutter analysis of cracked functionally graded plates in yawed supersonic flow with thermal effects. *Applied Mathematical Modelling*. 2022; 101: 259-275.
- [15] Sallam A., Elshabasy M. Tailoring the panel inertial and elastic forces for the flutter and stability characteristics enhancement using copper patches. *Composite Structures*. 2021; 274: 114311.

- [16] Baghdasaryan GY. Thermoelastic non-linear flutter oscillations of rectangular plate. *Journal of Thermal Stresses* 2021;44: 731-754.
- [17] Farhadi A. Optimum placement of sensors for static output feedback to control sheet flutter in supersonic flow. *Mechanics of Advanced and Smart Materials*. 2022; 2: 73-93.
- [18] Nazmizadeh M, Mohammadi M M, Samadi Foroushani M. Aerodynamic modeling and calculating the flutter speed of a rectangular plate in supersonic air flow. *Mechanics of Advanced and Smart Materials*. 2023;3(2):194-215.
- [19] Rao SS. *Vibration of Continuous Systems, Second Edition*. University of Miami. 2019.
- [20] Song Zh, Li F. Investigations on the flutter properties of supersonic panels with different boundary conditions. *Composite Structures*. 2013; 2: 215-228.