



## Dynamic Modeling and Simulation of a Fluid-Conveying Robotic Manipulator Using the Gibbs-Appell Formulation

Siavash Fathollahi Dehkordi <sup>a\*</sup>

<sup>a</sup> Department of Mechanical Engineering, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran

### Original Article

Use your device to scan  
and read the article online



**Citation:** Fathollahi Dehkordi S. Dynamic Modeling and Simulation of a Fluid-Conveying Robotic Manipulator Using the Gibbs-Appell Formulation. *Mechanics of Advanced and Smart Materials*. 2025;5(2):190-211.

 <https://10.66224/masm.5.2.190>

### KEYWORDS

Fluid-conveying robots,  
Gibbs-Appell formulation,  
Non-material control volume,  
Computed Torque Control.

### ABSTRACT

This paper presents the dynamic modeling of a robotic manipulator capable of fluid conveyance using the Gibbs-Appell formulation. The primary objective is to derive efficient recursive equations for systems with non-material control volumes, where constant-velocity fluid flow induces complex inertial and Coriolis forces. First, the kinematic relations are derived using a material approach and the Denavit-Hartenberg convention. Subsequently, the equations of motion are formulated by calculating the Gibbs function (acceleration energy) for the rigid links, the conveyed fluid, and the concentrated masses of the actuators. This approach significantly reduces computational complexity, providing an ideal framework for real-time control. To validate the model, a 5-DOF manipulator was simulated under a Computed Torque Control scheme in two scenarios: "No-Fluid" and "Fluid-Conveying." The results demonstrate that fluid flow increases joint torques by up to 18% and alters transient responses. The proposed model successfully maintained the tracking error within 15 mrad despite hydrodynamic disturbances, proving its high fidelity in analyzing fluid-structure interaction.

### Extended Abstract

#### 1. Introduction

In recent decades, the growing application of robotic manipulators in diverse industries has significantly increased the demand for multifunctional robotic systems. One of the advanced novel applications is the fluid-conveying robotic manipulator, which covers a wide range of uses. In the medical and biomedical industries, these systems are used for precise transfer of pharmaceutical substances, blood sera, and biological solutions in minimally invasive surgical processes and automated injection systems [1-3]. In chemical and petrochemical industries, these arms are employed for the safe handling of hazardous, toxic, and corrosive materials in high-risk environments [4]. In precision agriculture, robotic irrigation systems with fluid-conveying capability have attracted attention for optimal distribution of water and liquid fertilizers [5, 6].

The dynamic analysis of fluid-conveying robotic arms presents specific challenges from a mathematical and computational modeling perspective. Unlike conventional robotic arms that deal only with the fixed and distributed mass of links and an end load, in these systems the moving fluid inside the arms exerts a significant and nonlinear

\* Corresponding author. Tel.: 989124891075

E-mail address: sfdehkordi@scu.ac.ir

DOI: <https://10.66224/masm.5.2.190>

Received: June 26, 2025; Received in revised form: August 13, 2025; Accepted: September 15, 2025.

© Author



effect on the overall system dynamics. The relative motion of the fluid generates inertial forces, complex Coriolis forces, and nonlinear hydrodynamic interactions, which substantially increase modeling complexity [7, 8]. Furthermore, the effects of fluid viscosity, pressure drops along the flow path, and fluid-structure interaction (FSI) phenomena can also influence the dynamic behavior of the system [9].

Extensive research has been carried out on the dynamics of fluid flowing through tubes, pipes, and various channels [10, 11]. However, most of these studies have focused on fixed pipes or structures with specific motion constraints [12, 13], without fully considering the rigid-body motion of multi-body systems with multiple degrees of freedom such as robotic arms. In the robotics literature, various methods have been developed for dynamic modeling of robotic systems. The Lagrange method is suitable for systems with holonomic constraints [14], while the Newton-Euler method is efficient for recursive algorithms and real-time computation. Kane's method has advantages for systems with non-holonomic constraints [15].

For complex systems with a high number of degrees of freedom and internal dynamic interactions such as fluid flow, the Gibbs-Appell formulation offers notable and unique advantages. Introduced by Gibbs in 1879 and further developed by Appell in 1900, this formulation uses the concept of the Gibbs function (acceleration energy) to derive equations of motion directly and recursively, without requiring explicit calculation of the total kinetic energy. This unique feature significantly enhances computational efficiency, reducing complexity from  $O(n^4)$  in the Lagrange method to  $O(n^2)$  [16-18]. Korayem et al. applied the Gibbs-Appell formulation for dynamic analysis of flexible robotic arms and systems with variable loads [19, 20].

The primary objective of this research is to present a complete, systematic, and generalizable framework for the dynamic modeling of N-link fluid-conveying robotic manipulators with constant-velocity fluid flow. In this regard, complete kinematic relations for the differential elements of the arm as rigid moving bodies and the fluid as a non-material control volume are derived recursively using the material approach and standard Denavit-Hartenberg coordinate systems. Then, utilizing the updated Gibbs-Appell formulation for systems with variable control volumes, the Gibbs function is calculated for the three main components: rigid links, conveyed fluid, and concentrated components including motors and the end-effector.

## 2. Dynamic Modeling of Fluid-Conveying Robotic Manipulator

### 2.1 Kinematics

To express the motion of the robotic system, reference and local coordinate systems attached to the robotic arms must be selected. The generalized coordinates for an N-link robotic arm are defined as  $\theta = [\theta_1, \dots, \theta_n]^T$ . The Denavit-Hartenberg naming convention is used for coordinate systems attached to each link. For computing the position, velocity, and acceleration vectors of differential elements  $Q^B$  on the link and  $Q^F$  on the fluid, the position vectors relative to the local coordinate system ( $O_i$ ) are expressed as:

$${}^i r_{Q^B/O_i}^B = \eta^i x_i \quad (1)$$

$${}^i r_{Q^F/O_i}^F = {}^i r_{Q^B/O_i}^B + {}^i r_{Q^F/B}^{F/B} \quad (2)$$

where  ${}^i x_i$  is the unit vector along the  $x_i$  axis,  $\eta$  is the distance from the origin ( $O_i$ ) to the differential elements, and  ${}^i r_{Q^F/B}^{F/B}$  represents the relative position of the fluid with respect to link  $i$ . Using recursive equations, the absolute position vectors are obtained. The acceleration vectors of the differential elements are:

$${}^i \ddot{r}_{Q^B}^B = {}^i \ddot{r}_{O_i} + {}^i \dot{\omega}_i \times {}^i r_{Q^B/O_i}^B + {}^i \omega_i \times ({}^i \omega_i \times {}^i r_{Q^B/O_i}^B) \quad (3)$$

$${}^i \ddot{r}_{Q^F}^F = {}^i \ddot{r}_{O_i} + {}^i \dot{\omega}_i \times {}^i r_{Q^B/O_i}^B + {}^i \omega_i \times {}^i \dot{r}_{Q^F/B}^{F/B} + {}^i \omega_i \times ({}^i \omega_i \times {}^i r_{Q^B/O_i}^B) \quad (4)$$

The acceleration vectors of differential elements  $Q^B$  and  $Q^F$  account for the angular acceleration of link  $i$  and the Coriolis effects due to fluid velocity  $v_f$  relative to the arm.

### 2.2 Gibbs Function and Equations of Motion

The total Gibbs function of the fluid-conveying robotic arm consists of three components: (1) Gibbs function of links ( $S_L$ ), (2) Gibbs function of the fluid ( $S_F$ ), and (3) Gibbs function due to concentrated masses of motors and end-effector ( $S_p$ ). The differential Gibbs functions are:

$$dS_i^B = \frac{1}{2} \mu_i^B(\eta) \left( i\dot{r}_Q^{BT} \cdot i\dot{r}_Q^B \right) d\eta \tag{5}$$

$$dS_i^F = \frac{1}{2} \mu_i^F(\eta) \left( i\dot{r}_Q^{FT} \cdot i\dot{r}_Q^F \right) d\eta \tag{6}$$

$$S_i^P = \frac{1}{2} M_i^m \left( i\ddot{\mathbf{r}}_{O_{i+1}}^T \cdot i\ddot{\mathbf{r}}_{O_{i+1}} \right) \tag{7}$$

where  $\mu_i^B$  is the mass per unit length of link  $i$ ,  $\mu_i^F$  is the fluid mass per unit length, and  $M_i^m$  is the motor mass. The total Gibbs function is obtained by integrating over each link and summing. By differentiating the Gibbs function with respect to quasi-accelerations and the potential energy with respect to generalized coordinates, the inverse dynamics equations (yielding joint torques from the desired trajectory) and the forward dynamics equations (determining joint accelerations from applied torques) are extracted. The final equation of motion is:

$$S = \sum_{i=1}^n \left( \int_0^{L_i} dS_i^B + \int_0^{L_i} dS_i^F + S_{i+1}^P \right) \tag{8}$$

The final motion equation is:

$$\begin{bmatrix} I_{11} & \cdots & I_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ I_{n1} & \cdots & I_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \vdots \\ \ddot{\theta}_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Re_1 \\ \vdots \\ Re_n \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \Gamma_1 \\ \vdots \\ \Gamma_n \end{Bmatrix} \tag{9}$$

### 2.3 Computed Torque Control

Due to the nonlinear nature of the equations and the dynamic coupling between fluid and links, the Computed Torque Control (CTC) method was selected as the control strategy. The control law is:

$$\tau = I(\theta) [\ddot{\theta}_{ref} + K_d \dot{e} + K_p e + K_I \int e] + h(\theta, \dot{\theta}) \tag{10}$$

where  $K_p$ ,  $K_I$ , and  $K_d$  are the proportional, integral, and derivative gain matrices,  $e$  is the position error, and  $h(\theta, \dot{\theta})$  is the compensator term. For stability, it is sufficient that  $K_{Ii} > 0$ ,  $K_{pi} > 0$ , and  $K_{di} > 0$  for all  $i$ . Gains are selected based on pole placement with a damping ratio  $\xi = 0.7$ . Two types of trajectories were designed: (a) point-to-point motion using a 5th-order polynomial, and (b) zigzag motion for spraying applications.

### 3. Numerical Simulation and Results

To validate the proposed dynamic model and evaluate the performance of the computed torque controller, simulations were conducted for a 5-DOF robotic arm containing fluid flow, using MATLAB software. The mechanical specifications of the robot are given in Table 1. The simulation is conducted in two modes: (a) no-fluid and (b) fluid-conveying, allowing direct comparison of system behavior under hydrodynamic loading.

Table 1. Mechanical specifications of the 5-DOF robotic arm

Parameter	Value	Definition	Unit
$L_i$	[0 0.35 0.35 0.12 0.08]	Link lengths	m
$\mu_i^B$	2.8	Mass per unit length of link	Kg/m
$\mu_i^f$	850	Fluid density per unit length	Kg/m
$D_{in}$	0.02	Inner pipe diameter	m
$V_f$	3.0	Fluid flow velocity	m/s
$t$	5	Simulation time	s
$g$	10	Gravitational acceleration	m/s <sup>2</sup>

#### 3.1 Point-to-Point Motion Simulation

In this scenario, the robot moves between two predetermined points. The error analysis reveals that the minimum tracking error corresponds to joint 5, while the maximum error occurs at intermediate joints. This demonstrates the influence of initial fluid inertia and Coriolis torques on robot performance. The end-effector error is approximately 45 mm, confirming that the designed controller provides stable motion despite the nonlinearity of the model.

Comparison of the fluid-conveying and no-fluid cases shows that fluid presence increases joint tracking errors by approximately 20% (18 mm versus 15 mm in Cartesian space) and extends the settling time from approximately

0.45 s to 0.62 s. Joints 2 through 4 are identified as the most sensitive joints, due to the reduced link-to-fluid mass ratio in distal links and increased Coriolis force effects at the end of the kinematic chain.

### 3.2 Zigzag (Spraying) Motion Simulation

In this scenario, a zigzag trajectory was programmed for spraying operations on surfaces. Due to the increased path complexity and nonlinear system behavior, tracking errors are higher than in the point-to-point case. Steady-state errors appear at joints 2 and 3, while other joints converge toward zero in an oscillatory manner. The initial motion shock caused by fluid flow induces transient instability in the robot joints, though the system quickly recovers and remains bounded.

The torque analysis shows that applied torques at all joints, particularly the main joints, are smooth and without severe oscillations. The maximum torque recorded at joint 2 is approximately 4.22 N·m. The Sat: 0% indicator in most joints confirms that the Gibbs-Appell model accurately predicts dynamic requirements, preventing motor saturation. The total joint torque consumption demonstrates the efficiency of the proposed computational structure.

## 4. Conclusions

In this paper, a systematic and efficient framework for dynamic modeling and control of multi-link fluid-conveying robotic manipulators was presented. Using the updated Gibbs-Appell formulation for systems with variable control volumes, the complexities arising from relative fluid motion, Coriolis forces, and hydrodynamic interactions were accurately incorporated into the equations of motion.

The key results obtained from simulation and comparison of the "no-fluid" and "fluid-conveying" cases are: (1) Fluid Effect on Torque: the presence of constant-velocity fluid flow, acting not only as an additional mass but as an active dynamic agent, leads to a 15–18% increase in joint torques at peak acceleration moments. (2) Tracking Accuracy: the computed torque controller, relying on the extracted model, maintained tracking error within 15 mrad (joint space) and less than 20 mm (Cartesian space) in the presence of fluid. (3) System Stability: despite hydrodynamic disturbance forces at distal joints, the system rapidly achieved asymptotic stability and motor torque saturation was prevented. (4) Computational Efficiency: using the Gibbs-Appell method instead of Lagrange reduces computational complexity, enabling real-time control implementation for high-DOF robots.

Future research directions include: analysis of water hammer effects due to sudden fluid flow changes; modeling of flexible links in combination with fluid dynamics; extension of the model to time-varying fluid velocities; application of adaptive and intelligent controllers for online estimation of unknown fluid parameters; and experimental validation on a physical laboratory prototype.



## مدل سازی و شبیه سازی دینامیکی بازوی رباتیکی با قابلیت انتقال سیال با استفاده از فرمولاسیون گیبس - اپل

سیاوش فتح الهی دهکردی الف\*

الف: استادیار، مهندسی مکانیک، فنی و مهندسی، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز، ایران. [sfdehkordi@scu.ac.ir](mailto:sfdehkordi@scu.ac.ir)

چکیده	واژگان کلیدی
<p>در این مقاله، مدل سازی دینامیکی بازوی رباتیکی با قابلیت انتقال سیال با استفاده از فرمولاسیون گیبس-اپل ارائه شده است. هدف، استخراج روابط بازگشتی کارآمد برای سیستم های با حجم کنترل غیرمادی است که در آن جریان سیال با سرعت ثابت، نیروهای اینرسی و کوریولیس پیچیده ای ایجاد می کند. در این پژوهش، ابتدا روابط سینماتیکی با رویکرد مادی و روش دناویت-هارتنبرگ استخراج و سپس معادلات حرکت با محاسبه تابع گیبس برای لینک ها، سیال و موتورها تدوین گردید. این روش با کاهش پیچیدگی محاسباتی، بستری مناسب برای کنترل زمان-واقعی فراهم می کند. به منظور اعتبارسنجی، یک بازوی ۵ درجه آزادی در دو حالت «بدون سیال» و «حامل سیال» تحت کنترل گشتاور محاسبه شده شبیه سازی شد. نتایج نشان داد که حضور سیال منجر به افزایش ۱۸ درصدی گشتاور مفاصل و تغییر در پاسخ های گذرا می شود. مدل پیشنهادی موفق شد خطای ردیابی را در حضور اغتشاشات هیدرودینامیکی در محدوده ۱۵ میلی رادیان تثبیت کند که نشان دهنده دقت بالای مدل در تحلیل برهم کنش سیال-سازه است. نتایج این پژوهش، ابزاری مناسب برای طراحی کنترل کننده ها و شبیه سازی سیستم های رباتیکی با قابلیت انتقال سیال ارائه می دهد.</p>	<p>ربات انتقال سیال، فرمولاسیون گیبس-اپل، حجم کنترل غیرمادی، کنترل گشتاور محاسبه شده.</p> <p>تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۰۴/۰۵</p> <p>تاریخ بازنگری: ۱۴۰۴/۰۵/۲۲</p> <p>تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۰۶/۲۴</p>

### ۱- مقدمه

در دهه های اخیر، گسترش کاربردهای بازوهای رباتیکی در صنایع مختلف، نیاز به طراحی سیستم های رباتیکی چند عملکردی را به طور قابل ملاحظه ای افزایش داده است. یکی از این کاربردهای نوین و پیشرفته، بازوهای رباتیکی با قابلیت انتقال سیال است که طیف گسترده ای از کاربردها را پوشش می دهند. در صنایع پزشکی و بیومدیکال، این سیستم ها برای انتقال دقیق مواد دارویی، سرم های خونی، و محلول های بیولوژیکی در فرآیندهای جراحی کم تهاجمی و سیستم های تزریق خودکار مورد استفاده قرار می گیرند [۱-۳]. در صنایع شیمیایی و پتروشیمی، این بازوها برای جابجایی ایمن مواد خطرناک، سمی و خورنده در محیط های با ریسک بالا به کار می روند که نه تنها ایمنی پرسنل را تضمین می کنند، بلکه دقت و تکرارپذیری فرآیند را نیز افزایش می دهند [۴]. در بخش کشاورزی دقیق و هوشمند، سیستم های آبیاری رباتیک دارای قابلیت انتقال سیال برای توزیع بهینه آب و کودهای مایع با هدف افزایش بهره وری و کاهش مصرف منابع آبی مورد توجه قرار گرفته اند [۵، ۶]. همچنین در صنایع غذایی و نوشیدنی، این فناوری برای انتقال استریل مواد مایع، دوزینگ دقیق مواد افزودنی، و فرآیندهای بسته بندی اتوماتیک کاربرد دارد. این سیستم ها ترکیبی منحصربه فرد از مزایای رباتیک صنعتی شامل دقت بالا، تکرارپذیری، و انعطاف پذیری را با قابلیت های سیستم های هیدرولیکی نظیر انتقال توان و مواد به صورت همزمان ارائه می دهند و امکان انجام عملیات های پیچیده چندگانه با

دقت میکرومتری را فراهم می‌آورند.

تحلیل دینامیکی بازوهای رباتیکی محتوی سیال، چالش‌های خاصی را از منظر مدل‌سازی ریاضی و محاسباتی به همراه دارد. برخلاف بازوهای رباتیکی معمولی که تنها با جرم ثابت و توزیع شده لینک‌ها و بار انتهایی سروکار دارند، در این سیستم‌ها، سیال متحرک داخل بازوها تأثیر قابل توجه و غیرخطی بر دینامیک کلی سیستم می‌گذارد. حرکت نسبی سیال، که می‌تواند با سرعت‌های متغیر و رژیم‌های جریان مختلف (آرام یا آشفته) اتفاق بیفتد، نیروهای اینرسی، نیروهای کوریولیس پیچیده، و برهمکنش‌های هیدرو-دینامیکی غیرخطی ایجاد می‌کند که پیچیدگی مدل‌سازی را به‌طور محسوسی افزایش می‌دهند [۷، ۸]. علاوه بر این، اثرات ویسکوزیته سیال، افت فشار در طول مسیر جریان، تغییرات دمایی، و پدیده‌های برهمکنش سیال-سازه<sup>۱</sup> نیز می‌توانند بر رفتار دینامیکی سیستم تأثیرگذار باشند [۹]. بنابراین، استخراج معادلات حرکت دقیق و کامل برای این سیستم‌ها، نیازمند رویکردی جامع و یکپارچه است که هم دینامیک بازوی رباتیکی به‌عنوان یک سیستم چندجسمی و هم دینامیک سیال به‌عنوان یک حجم کنترل متحرک را به‌طور همزمان و با در نظر گرفتن کوپلینگ دوطرفه میان آن‌ها را در نظر بگیرد. این موضوع در عمل نیازمند روزرسانی و توسعه فرمولاسیون‌های مرسوم مورد استفاده در استخراج معادلات دینامیکی سیستم‌های کلاسیک است تا بتوانند به‌طور همزمان حرکت سیال را به صورت نسبی در رفتار کلی بازوی رباتیکی منعکس کنند.

تحقیقات گسترده‌ای در زمینه دینامیک سیالات عبوری از تیوب‌ها، لوله‌ها و کانال‌های مختلف انجام شده است. در خصوص ارتعاشات و پایداری لوله‌های حاوی جریان سیال مطالعات صورت گرفته، نشان داد که سرعت جریان می‌تواند بر فرکانس‌های طبیعی و رفتار دینامیکی سازه تأثیر قابل توجهی داشته باشد [۱۰]. همچنین پدیده ناپایداری دینامیکی در لوله‌های انعطاف‌پذیر حامل سیال مورد بررسی قرار گرفته است. در تحقیقات چن [۱۱]، اثرات مختلف پارامترهای سیال از جمله دبی، چگالی، و ویسکوزیته بر رفتار ارتعاشی لوله‌ها تحلیل شده است. با این حال، بیشتر این مطالعات بر لوله‌های ثابت یا ساختارهای با محدودیت‌های حرکتی خاص متمرکز بوده‌اند [۱۲، ۱۳] و برای سازه‌های چندجسمی متحرک با درجات آزادی متعدد نظیر بازوهای رباتیکی، حرکت صلب سازه در فضای کاری به‌صورت کامل در نظر گرفته نشده است. این خلأ تحقیقاتی، ضرورت توسعه مدل‌های جدید که قادر به لحاظ کردن همزمان حرکت پیچیده بازوی رباتیکی و جریان سیال داخلی باشند را نمایان می‌سازد.

در ادبیات فنی و تخصصی علم رباتیک، روش‌های متنوعی برای مدل‌سازی دینامیکی سیستم‌های رباتیکی توسعه یافته و ارائه شده است. روش لاگرانژ که بر اساس اصل کمترین کنش و انرژی است، برای سیستم‌های با قیود هولونومیک مناسب می‌باشد و به‌طور گسترده در تحلیل رباتیک استفاده می‌شود [۱۴]. روش نیوتن-اولر که مبتنی بر اصول مکانیک نیوتنی و قوانین حرکت است، به‌ویژه برای الگوریتم‌های بازگشتی و محاسبات زمان واقعی کارآمد است. روش کین که بر مفهوم سرعت‌های تعمیم‌یافته استوار است، برای سیستم‌های با قیود غیرهولونومیک مزایای خاصی دارد [۱۵]. با این حال، برای سیستم‌های پیچیده با تعداد درجات آزادی بالا، ساختار کوپل شده، و وجود برهمکنش‌های دینامیکی داخلی نظیر جریان سیال، فرمولاسیون گیبس-اپل مزایای قابل توجه و منحصربه‌فردی ارائه می‌دهد. این روش که توسط گیبس در سال ۱۸۷۹ معرفی و سپس توسط اپل در سال ۱۹۰۰ توسعه یافت، با استفاده از مفهوم تابع گیبس یا انرژی شتاب که برابر است با نصف مجموع حاصل ضرب جرم‌ها در مربع شتاب‌های متناظرشان، امکان استخراج معادلات حرکت را به‌صورت مستقیم، بازگشتی و بدون نیاز به محاسبه صریح انرژی جنبشی کل سیستم یا انتگرال‌گیری‌های پیچیده فراهم می‌آورد. این ویژگی منحصربه‌فرد، کارایی محاسباتی را به‌ویژه برای سیستم‌های با تعداد لینک بالا (بیش از ۵-۶ لینک) به‌طور چشمگیری افزایش می‌دهد و پیچیدگی محاسباتی را از مرتبه  $O(n^4)$  در روش لاگرانژ به  $O(n^2)$  کاهش می‌دهد [۱۶-۱۸]. کورایم و همکاران از فرمولاسیون گیبس-اپل برای تحلیل دینامیکی بازوهای رباتیکی انعطاف‌پذیر و سیستم‌های با بار متغیر استفاده کردند. همچنین با استفاده از این روش برهمکنش میان بازوهای رباتیکی در محیط سیال بررسی و معادلات بازوها استخراج گردیده است [۱۹، ۲۰].

<sup>1</sup> Fluid Structure Interaction (FSI)

برای استفاده از فرمولاسیون گیبس-اپل در سیستم‌های دینامیکی که دارای حجم کنترل غیرمادی هستند، همانند بازوهای رباتیکی حاوی سیال، لازم است روش‌های مرسوم مورد اشاره بروزآوری و توسعه یابند. فرمولاسیون گیبس-اپل برای تحلیل ربات‌های موازی با در نظر گرفتن قیود سینماتیکی توسعه یافته است [۲۱]. همچنین، مطالعاتی در زمینه سیستم‌های با جرم متغیر توسط محققین با استفاده از فرمولاسیون لاگرانژ انجام شده است [۲۲-۲۴]. در زمینه کاربرد فرمولاسیون گیبس اپل برای سیستم‌هایی با جرم متغیر نیز تحقیقات دهکردی موجب توسعه این فرمولاسیون برای سیستم‌های سیال و استخراج معادلات دینامیکی آن شده است [۲۵]. این در حالی است که با این وجود، کاربرد مستقیم و سیستماتیک این فرمولاسیون برای استخراج معادلات دینامیکی بازوهای رباتیکی چندلینکی با سیال عبوری از آن با سرعت دلخواه، به‌ویژه با در نظر گرفتن اثرات هیدرودینامیکی و کوپلینگ دوطرفه سیال-سازه، هنوز به‌طور کامل مورد بررسی قرار نگرفته است.

هدف اصلی این پژوهش، ارائه یک چارچوب کامل، سیستماتیک و قابل تعمیم برای مدل‌سازی دینامیکی بازوهای رباتیکی  $N$  لینکی با قابلیت انتقال سیال با سرعت ثابت است. در این راستا، ابتدا روابط سینماتیکی کامل برای المان‌های دیفرانسیلی بازو به‌عنوان اجسام صلب متحرک و سیال به‌عنوان حجم کنترل غیرمادی، با استفاده از رویکرد مادی و دستگاه‌های مختصات استاندارد دناویت-هارتنبرگ به‌صورت بازگشتی استخراج می‌شوند. این روابط شامل بردارهای موقعیت، سرعت، و شتاب هر المان در دستگاه مختصات محلی و مرجع می‌باشند. سپس، با بهره‌گیری از فرمولاسیون گیبس-اپل بروزرسانی‌شده برای سیستم‌های با حجم کنترل متغیر، تابع گیبس برای سه جزء اصلی سیستم - یعنی لینک‌های صلب بازوی رباتیکی، سیال عبوری از داخل لینک‌ها، و اجزای متمرکز شامل موتورها و پنجه انتهایی - محاسبه می‌گردد. در نهایت، با مشتق‌گیری از تابع گیبس نسبت به شبه‌شتاب‌های تعمیم‌یافته و انرژی پتانسیل نسبت به مختصات تعمیم‌یافته، معادلات دینامیک معکوس که گشتاورهای مفصلی را بر اساس مسیر حرکتی مطلوب محاسبه می‌کنند، معادلات دینامیک مستقیم که شتاب‌های مفصلی را بر حسب گشتاورهای اعمالی تعیین می‌نمایند، استخراج می‌شوند. معادلات به‌دست‌آمده، اثرات برهمکنش پیچیده و غیرخطی سیال و بازو، نیروهای اینرسی ناشی از حرکت نسبی سیال، نیروهای کوریولیس و گریز از مرکز، و تأثیرات گرانشی را به‌طور کامل و دقیق لحاظ می‌کنند پس از این بخش مقدمه، در بخش دوم (سینماتیک)، استخراج کامل و تفصیلی روابط سینماتیکی برای بازوی رباتیکی  $N$  لینکی و سیال عبوری از داخل لینک‌ها با استفاده از روش دناویت-هارتنبرگ و رویکرد مادی ارائه می‌شود. در ادامه، ابتدا تابع گیبس برای اجزای مختلف سیستم شامل لینک‌های بازو، سیال متحرک، و اجزای متمرکز به‌صورت جداگانه محاسبه شده و سپس با یکپارچه‌سازی آن‌ها، معادلات دینامیک معکوس و مستقیم به همراه ماتریس اینرسی استخراج می‌گردند. در بخش سوم، به‌منظور اعتبارسنجی مدل ریاضی و بررسی رفتار دینامیکی سیستم، شبیه‌سازی‌های عددی برای بازوهای رباتیکی نمونه تحت شرایط مختلف عملیاتی انجام می‌شود. نتایج این تحقیق از منظر کاربردی می‌تواند مبنای محکمی برای طراحی کنترل‌کننده‌های پیشرفته و هوشمند، بهینه‌سازی مسیر و برنامه‌ریزی حرکت با در نظر گرفتن قیود دینامیکی و شبیه‌سازی دقیق سیستم‌های رباتیکی با قابلیت انتقال سیال باشد.

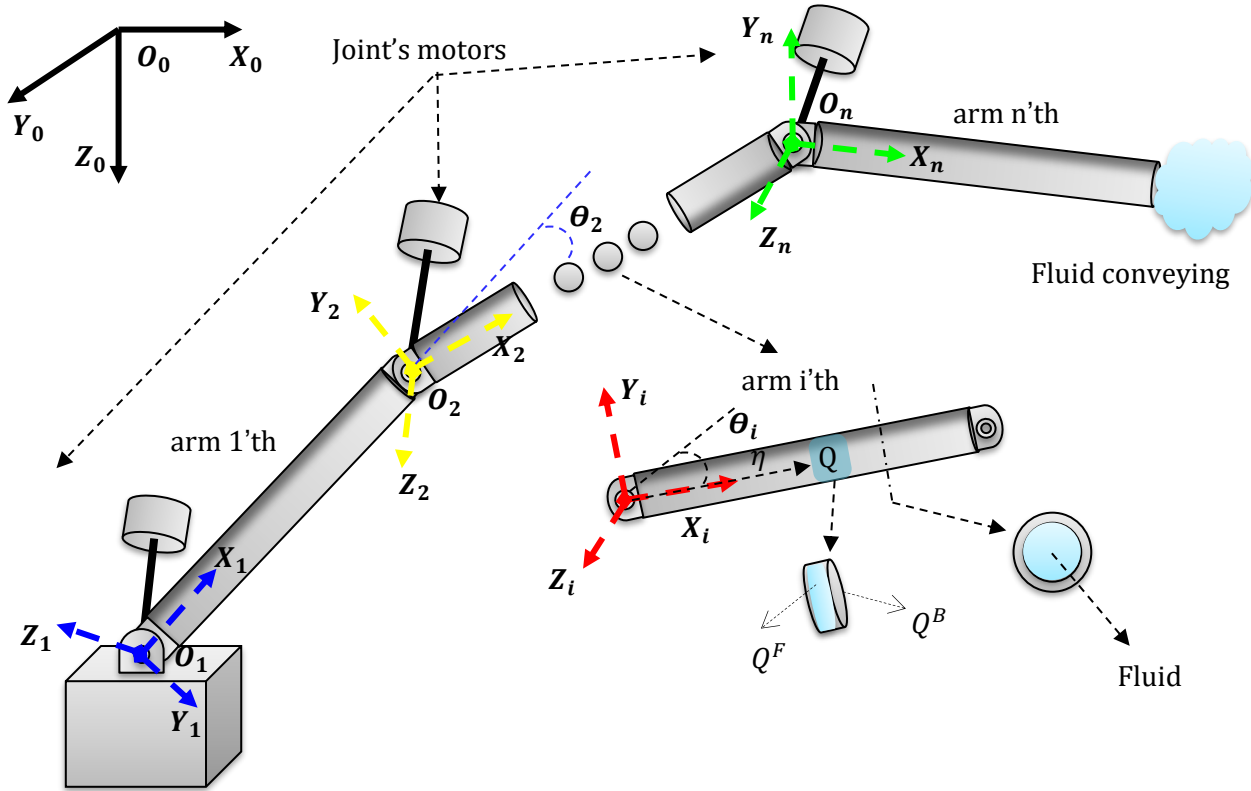
## ۲- مدل‌سازی دینامیکی بازوی رباتیکی با قابلیت انتقال سیال

در این بخش، در مرحله اول روابط سینماتیکی مرتبط با بازوهای رباتیکی و همچنین سیال داخل بازوها با نگاه مادی استخراج می‌شوند. با استفاده از روابط به دست آمده، استخراج معادلات حرکت زنجیره‌های رباتیکی با در نظر گرفتن برهمکنش میان سیال و لینک‌های ربات صورت می‌پذیرد.

### ۲-۱- استخراج معادلات سینماتیکی بازوی رباتیکی محتوی سیال با سرعت ثابت

برای بیان حرکت سیستم رباتیکی می‌بایست دستگاه‌های مختصات مرجع و محلی وابسته به بازوهای رباتیکی انتخاب و در ادامه روابط سینماتیکی مرتبط با حرکت بازو و سیال به صورت مستقل بر اساس دستگاه‌های مختصات ارائه شده، محاسبه گردند. در بررسی حرکت سیال عبوری از داخل بازوهای رباتیکی دو رویکرد کلی وجود دارد که در این بخش حرکت نسبی سیال در مقایسه با بازوی رباتیکی مورد نظر می‌باشد. از این رو لازم است دستگاه مختصاتی متصل به یک المان از سیال که در حال عبور با سرعت  $v_f$  نسبت به بازو است علاوه بر دستگاه‌های مختصاتی که برای بیان حرکت پنجه‌ی بازوی رباتیکی در فضا مورد استفاده

می‌باشد، بکار رود. برای این منظور، دستگاه مختصات مرجع  $X_0Y_0Z_0$  جهت بیان حرکت سیستم رباتیکی (دستگاه مختصات ثابت) تعیین می‌گردد. در نتیجه با توجه به عدم حرکت پایه‌ی بازوی رباتیکی، دستگاه مختصات اول بر روی آن قرار داده می‌شود. مختصات‌های تعمیم‌یافته برای یک بازوی رباتیکی  $N$  لینکی به صورت  $\theta = [\theta_1, \dots, \theta_n]^T$  تعریف می‌شوند. در نامگذاری دستگاه‌های مختصات متصل به هر یک از لینک‌ها از روش نامگذاری دناویت - هارتنبرگ استفاده می‌گردد. شکل (۱) نحوه‌ی قرارگیری دستگاه‌های مختصات بر اساس این روش را نمایش می‌دهد.



شکل ۱ بازوی رباتیکی  $N$  لینکی با قابلیت انتقال سیال

شکل (۱) همچنین  $i$  امین لینک بازوی رباتیکی  $N$  لینکی را که سیال از درون آن عبور می‌کند را نمایش می‌دهد. برای محاسبه‌ی بردار موقعیت، سرعت و همچنین بردار شتاب اجزاء سیستم رباتیکی، المان دیرانسیلی  $Q^B$  بر روی لینک  $i$  ام و المان دیرانسیلی  $Q^F$  بر روی سیال عبوری از همان محل لینک  $i$  ام به صورت آزاد انتخاب می‌گردند. همچنین  ${}^i\mathbf{r}_{Q^F/O_i}^F$  بردارهای موقعیت المان‌های دیرانسیلی را نسبت به دستگاه مختصات محلی متصل به لینک  $i$  ام ( $O_i$ ) به صورت معادلات (۱) و (۲) بیان می‌نمایند.

$${}^i\mathbf{r}_{Q^B/O_i}^B = \eta \mathbf{x}_i \tag{1}$$

$${}^i\mathbf{r}_{Q^F/O_i}^F = {}^i\mathbf{r}_{Q^B/O_i}^B + {}^i\mathbf{r}_{Q^F/B}^{F/B} \tag{2}$$

که در آن بردار  $\mathbf{x}_i$  بردار یکه در راستای محور  $x_i$  می‌باشد. همچنین  $\eta$  نیز فاصله فی ما بین مرکز دستگاه مختصات ( $O_i$ ) و المان‌های دیرانسیلی  $Q^F$  و  $Q^B$  را بیان می‌نماید. بردار  ${}^i\mathbf{r}_{Q^F/B}^{F/B}$  موقعیت نسبی سیال به لینک  $i$  ام را نمایش می‌دهد. برای بیان موقعیت المان‌های دیرانسیلی به صورت مطلق، از معادلات بازگشتی استفاده می‌شود.

$${}^i r_Q^B = {}^i r_{Q/O_i}^B + {}^i r_{O_i} \quad (۳)$$

$${}^i r_Q^F = {}^i r_{Q/O_i}^{F/B} + {}^i r_{Q/O_i}^B + {}^i r_{O_i} \quad (۴)$$

$${}^i r_{O_i} = {}^i R_{i-1} ({}^{i-1} r_{O_i/O_{i-1}} + {}^{i-1} r_{O_{i-1}}) \quad (۵)$$

برای محاسبه‌ی  ${}^{i-1} r_{O_i/O_{i-1}}$  کافی است المان دیفرانسیلی را در موقعیت انتهایی لینک  $i-1$  ام در نظر گرفته شود. با توجه به موقعیت بردار  ${}^i r_{Q/O_i}^{F/B}$  و چون المان‌های انتخاب شده در سیال و لینک بر هم منطبق هستند (در نقطه تماس بازو و سیال هستند) برابر صفر خواهد بود. این در حالی است که مشتق آن صفر نبوده و برابر  $v_f$  می‌باشد. ماتریس  ${}^i R_{i-1}$ ، ماتریس دوران بین مبدا مختصات مفصل  $i$  ام و  $i-1$  ام می‌باشد که به صورت  ${}^j R_i = {}^j R_{i-1} A_i$  می‌باشد. ماتریس  $A_i$ ، نیز ماتریس دوران مفصل  $i$  ام است. با استفاده از معادله‌ی (۴) و (۵)، بردار سرعت المان‌های دیفرانسیلی بدست می‌آیند.

$${}^i \dot{r}_Q^B = {}^i \omega_i \times {}^i r_{Q/O_i}^B + {}^i \dot{r}_{O_i} \quad (۶)$$

$${}^i \dot{r}_Q^F = {}^i \omega_i \times {}^i r_{Q/O_i}^B + {}^i \dot{r}_{Q/O_i}^{F/B} + {}^i \dot{r}_{O_i} \quad (۷)$$

بردار  ${}^i \omega_i$  نشان دهنده‌ی سرعت زاویه‌ای لینک  $i$  ام می‌باشد.

$${}^i \omega_i = {}^i z_i \dot{\theta}_i + {}^i R_{i-1} {}^{i-1} \omega_{i-1} \quad (۸)$$

$\dot{\theta}_i$  برابر سرعت زاویه‌های مفصل  $i$  ام می‌باشد. بردار شتاب المان‌های دیفرانسیلی  $Q^B$  و  $Q^F$  عبارتند از:

$${}^i \ddot{r}_Q^B = {}^i \ddot{r}_{O_i} + {}^i \dot{\omega}_i \times {}^i r_{Q/O_i}^B + {}^i \omega_i \times ({}^i \omega_i \times {}^i r_{Q/O_i}^B) \quad (۹)$$

$${}^i \ddot{r}_Q^F = {}^i \ddot{r}_{O_i} + {}^i \dot{\omega}_i \times {}^i r_{Q/O_i}^B + {}^i \omega_i \times {}^i \dot{r}_{Q/O_i}^{F/B} + {}^i \omega_i \times ({}^i \omega_i \times {}^i r_{Q/O_i}^B) \quad (۱۰)$$

بردار  ${}^i \dot{\omega}_i$  نشان دهنده‌ی شتاب زاویه‌ای لینک  $i$  ام می‌باشد.

$${}^i \dot{\omega}_i = {}^i z_i \ddot{\theta}_i + {}^i R_{i-1} {}^{i-1} \dot{\omega}_{i-1} + {}^i R_{i-1} ({}^{i-1} \omega_{i-1} \times {}^i z_i \dot{\theta}_i) \quad (۱۱)$$

## ۲-۲- استخراج معادلات دینامیکی بازوی رباتیکی محتوی سیال با سرعت ثابت

برای استخراج معادلات حرکت یک سیستم رباتیکی علاوه بر مشخص بودن بردارهای سینماتیکی، لازم است ورودی‌ها و خروجی‌ها به درستی شناسایی و مورد بهره‌برداری قرار گیرند. وجود یک سیال خارجی در حال عبور از بازوهای رباتیکی موجب می‌گردد عملکرد سیستم رباتیکی متفاوت از قبل باشد. در ادامه به بررسی اثرات دینامیکی بخش‌های مختلف یک سیستم رباتیکی با در نظر گرفتن برهمکنش آنها می‌پردازیم.

### ۲-۲-۱- تابع گیبس بازوی رباتیکی محتوی سیال

تابع گیبس بازوی رباتیکی که سیال از درون آن عبور می‌کند، عبارت است از:

۱- تابع گیبس لینک‌ها ( $S_L$ )، ۲- تابع گیبس سیال ( $S_F$ )، و ۳- تابع گیبس ناشی از جرم موتورها و جرم متمرکز پنجه ( $S_P$ ).

به منظور محاسبه‌ی تابع گیبس در لینک‌ها، المان‌های دیفرانسیلی انتخاب شده  $Q^B$  و  $Q^F$  بر روی لینک  $i$  ام بازوی رباتیکی مورد توجه می‌باشند. در نتیجه تابع گیبس برای هر یک از المان‌های دیفرانسیلی عبارت خواهد بود از

$$dS_i^B = \frac{1}{2} \mu_i^B(\eta) \left( {}^i \dot{r}_Q^B \cdot {}^i \dot{r}_Q^B \right) d\eta \quad (۱۲)$$

$$dS_i^F = \frac{1}{2} \mu_i^F(\eta) \left( i\ddot{\eta}_Q^{FT} \cdot i\ddot{\eta}_Q^F \right) d\eta \quad (13)$$

$$S_i^P = \frac{1}{2} M_i^m \left( i\ddot{\eta}_{O_{i+1}}^T \cdot i\ddot{\eta}_{O_{i+1}} \right) \quad (14)$$

که در آن،  $\mu_i^B$  مقدار جرم واحد طول لینک  $i$ ام،  $\mu_i^F$  نیز جرم حجمی واحد طول سیال عبوری از لینک  $i$ ام می‌باشند.  $M_i^m$  نیز جرم موتور  $i$ ام بازوی رباتیکی را بیان می‌نماید. در ادامه با انتگرال‌گیری در طول هر لینک و همچنین جمع مقادیر بدست آمده تابع گیبس کل سیستم محاسبه می‌شود.

$$S = \sum_{i=1}^n \left( \int_0^{L_i} dS_i^B + \int_0^{L_i} dS_i^F + S_{i+1}^P \right) \quad (15)$$

### ۲-۲-۲- انرژي پتانسیل بازوی رباتیکی محتوی سیال

برای محاسبه‌ی انرژي پتانسیل، با توجه به تقارن موجود در ساختار بازوهای رباتیکی، اثر گرانش با استفاده از اعمال شتاب به پایه ثابت ربات معادل  $g$ ، در نظر گرفته می‌شود.

### ۲-۲-۳- استخراج معادلات دینامیک معکوس بازوی رباتیکی محتوی سیال

فرم دینامیک معکوس فرمولاسیون گیبس- اپل بازگشتی مطابق معادله‌ی (۱۵) مورد استفاده قرار می‌گیرد.

$$\frac{\partial S}{\partial \theta_j} + \frac{\partial V}{\partial \theta_j} = \tau_j \quad j = 1, \dots, n \quad (15)$$

که در آن  $\tau$  بردار گشتاورهای موتور مفصل‌های ربات می‌باشند.

### ۲-۲-۴- استخراج معادلات دینامیک مستقیم بازوی رباتیکی محتوی سیال

در فرم کلی معادلات دینامیک مستقیم، با دسته‌بندی ترم‌های بدست آمده جملاتی که تابع مشتق دوم مختصات‌های تعمیم‌یافته هستند، در سمت چپ به همراه ضرایب متناظر آن‌ها قرار می‌گیرند و تشکیل ماتریس اینرسی  $I(\theta, \dot{\theta})$  را می‌دهند. سایر جملات تشکیل بردار نیروها و جملات باقی مانده را می‌دهند  $(Re(\theta, \dot{\theta}))$ .

$$I(\theta, \dot{\theta})\ddot{\theta} = Re(\theta, \dot{\theta}) + \Gamma \quad (16)$$

معادله‌ی نهایی حرکت بصورت معادله‌ی (۱۷) حاصل می‌شود.

$$\begin{bmatrix} I_{11} & \cdots & I_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ I_{n1} & \cdots & I_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \vdots \\ \ddot{\theta}_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Re_1 \\ \vdots \\ Re_n \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \Gamma_1 \\ \vdots \\ \Gamma_n \end{Bmatrix} \quad (17)$$

که در آن  $I_{ij}$  درایه‌های ماتریس اینرسی،  $Re_i$  درایه‌های ماتریس نیروها و مقادیر باقی مانده و  $\Gamma_i$  درایه‌های بردار گشتاور اعمالی توسط مفاصل ربات می‌باشند.

### ۳- طراحی سیستم کنترل

با استخراج معادلات دینامیکی بازوی رباتیکی حاوی سیال، اکنون به طراحی سیستم کنترل برای ردیابی مسیر مطلوب پرداخته می‌شود. با توجه به ماهیت غیرخطی معادلات و وجود کوپلینگ دینامیکی بین سیال و لینک‌ها، روش کنترل گشتاور محاسبه شده<sup>۱</sup> به عنوان استراتژی کنترلی انتخاب گردید. با استفاده از رابطه (۱۷)، قانون کنترل گشتاور محاسبه شده عبارت

<sup>۱</sup> Computed Torque

است از:

$$\tau = I(\theta) [\ddot{\theta}_{ref} + K_d \dot{e} + K_p e + K_I \int e] + h(\theta, \dot{\theta}) \quad (18)$$

که در آن  $K_d$  و  $K_I$ ،  $K_p$  ماتریس‌های بهره تناسبی،  $e$  خطای موقعیت و  $h$  جملات جبران‌ساز و مشتقی می‌باشند. با جایگذاری قانون کنترل در معادلات دینامیک، دینامیک حلقه بسته عبارت است از:

$$\ddot{e} + K_d \dot{e} + K_p e + K_I \int e = 0 \quad (19)$$

برای پایداری سیستم کافی است  $K_{di} > 0$  و  $K_{pi} > 0, K_{li} > 0$  برای همه  $i$  باشد. بهره‌ها بر اساس قطب‌گذاری با نسبت میرایی  $\xi = 0.7$  انتخاب می‌شوند. برای کاربرد پاشش، دو نوع مسیر طراحی شد:

الف) برای حرکت نقطه به نقطه، از چندجمله‌ای مرتبه ۵ استفاده گردید:

$$s(\tau) = 10\tau^3 - 15\tau^4 + 6\tau^5, \sqrt{\tau} = t/T \quad (20)$$

که شرایط مرزی  $s(0) = 0, s(1) = 1$  و مشتقات اول و دوم در ابتدا و انتها صفر را برآورده می‌کند.

ب) برای حرکت پاشش نیز یک الگوی زیگزاگ به صورت زیر تعریف شده است:

$$\theta_i(t) = \theta_{i0} + A_i \sin(\omega_i t) \quad (21)$$

که  $A_i$  دامنه نوسان و  $\omega_i$  فرکانس زاویه‌ای هر مفصل است.

پاشش سیال بر اساس سه شرط فعال می‌شود: (۱) قرارگیری پنجه در ناحیه هدف، (۲) سرعت کافی ( $\dot{\theta} > 0.1 \frac{rad}{s}$ )، و (۳) کیفیت ردیابی مناسب ( $|e| < 0.15 rad$ ). نرخ جریان بر اساس کیفیت ردیابی و سرعت پنجه تعدیل می‌شود:

$$m = \dot{m}_{max} (1 - 2|e|) \min\left(1, \frac{v_0}{|v_{ee}|}\right) \quad (22)$$

که در آن  $v_{ee}$  سرعت مطلوب را بیان می‌کند.

#### ۴- شبیه‌سازی عددی و تحلیل نتایج

در این بخش، به منظور اعتبارسنجی مدل دینامیکی پیشنهادی و ارزیابی عملکرد کنترلر گشتاور محاسبه شده، شبیه‌سازی برای یک بازوی رباتیکی ۵ درجه آزادی مطابق شکل (۲) حاوی جریان سیال انجام شده است. شبیه‌سازی با استفاده از نرم‌افزار متلب صورت می‌پذیرد. نتایج در دو سطح فضای مفصلی و فضای کارتزین مورد تحلیل قرار گرفته‌اند. همچنین مطابق معادلات (۲۰) و (۲۱) برای دو حالت مختلف: الف) حرکت نقطه به نقطه و ب) پوشش سطحی (حرکت زیگزاگ) شبیه‌سازی شده‌اند. به منظور ارزیابی نتایج به دست آمده شبیه‌سازی صورت گرفته در دو حالت بازوهای حاوی سیال و بدون سیال با یکدیگر مقایسه می‌شوند. همچنین با توجه به استفاده از الگوریتم کنترل گشتاور محاسبه شده و خطای نهایی میزان دقت مدل دینامیکی قابل ارزیابی می‌باشد. در جدول (۱) ویژگی‌های ساختاری ربات ارائه گردیده است.

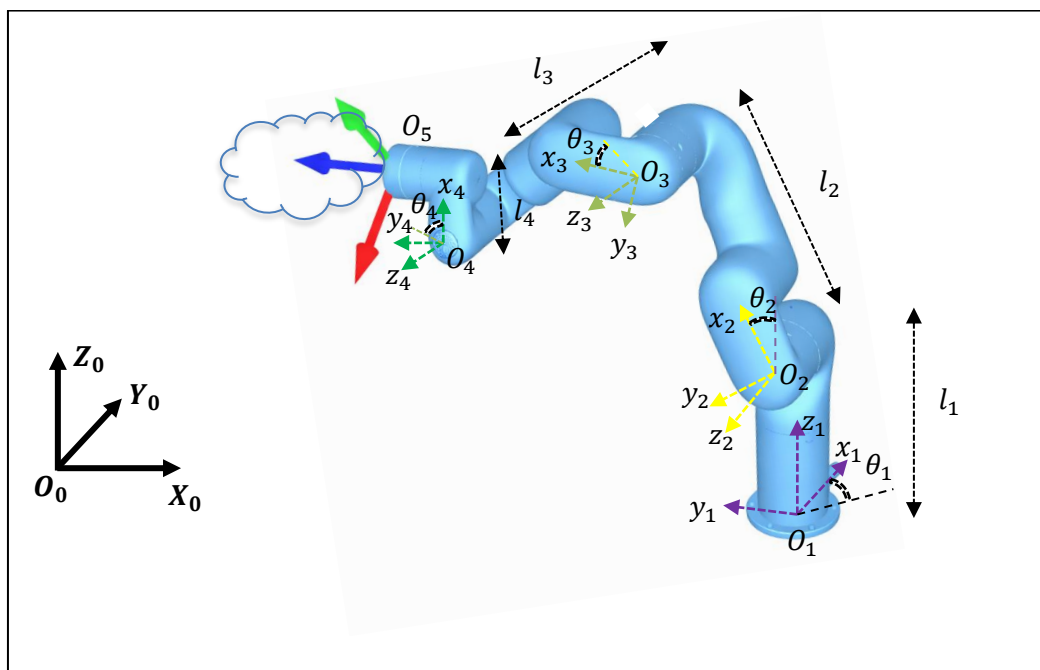
جدول ۱ مشخصات مکانیکی بازوی رباتیکی دو لینکی ساختار متغیر

پارامتر	تعریف	واحد	مقدار
$L_i$	طول لینک‌ها	m	[0 0.35 0.35 0.12 0.08]
$\mu_i^B$	جرم واحد طول لینک	Kg/m	2.8
$\mu_i^f$	چگالی بر واحد طول سیال	Kg/m	850
$D_{in}$	قطر داخلی لوله	m	0.02
$V_f$	سرعت جریان سیال	m/s	3.0

5	s	زمان شبیه‌سازی	t
10	m/s <sup>2</sup>	شتاب گرانش	g

بدین ترتیب، از نتایج بدست آمده جهت مقایسه دقت کنترلر و مدل ارائه شده و همچنین بررسی اثر سیال در حرکت ربات به منظور صحت سنجی نتایج استفاده می‌شود. شبیه‌سازی‌های به‌گونه‌ای برنامه‌ریزی شده‌اند که ربات از حالت سکون بر اساس مسیر از پیش تعیین شده شروع به حرکت کرده و به مدت ۵ ثانیه به حرکت خود ادامه خواهد داد. شرایط اولیه برای شبیه‌سازی از قرار زیر است:

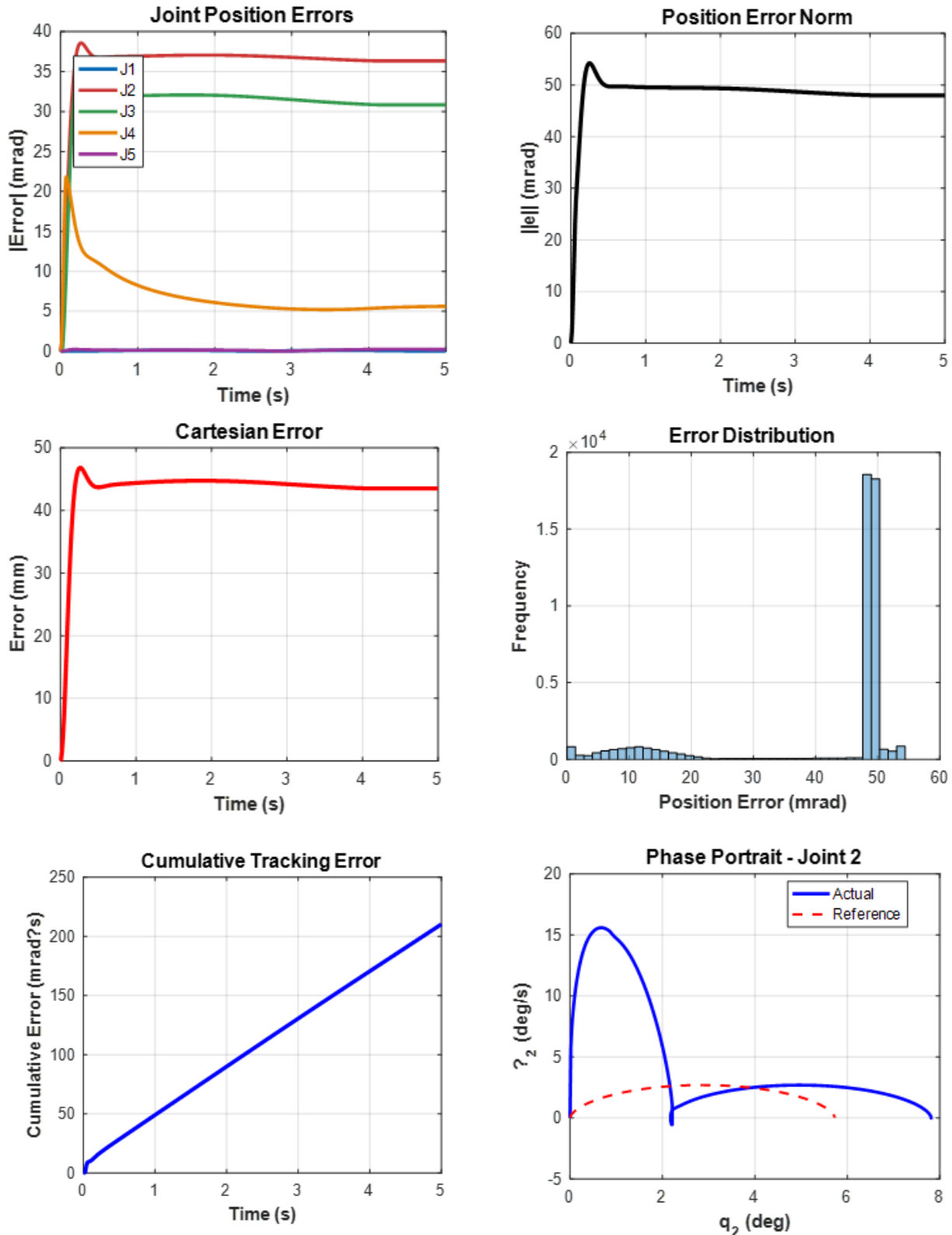
$$\theta_i(t) = \dot{\theta}_i(t) = 0. \quad (23)$$



شکل ۲ بازوی رباتیکی پنج لینکی با قابلیت انتقال سیال

#### ۴-۱- شبیه‌سازی حرکت نقطه به نقطه

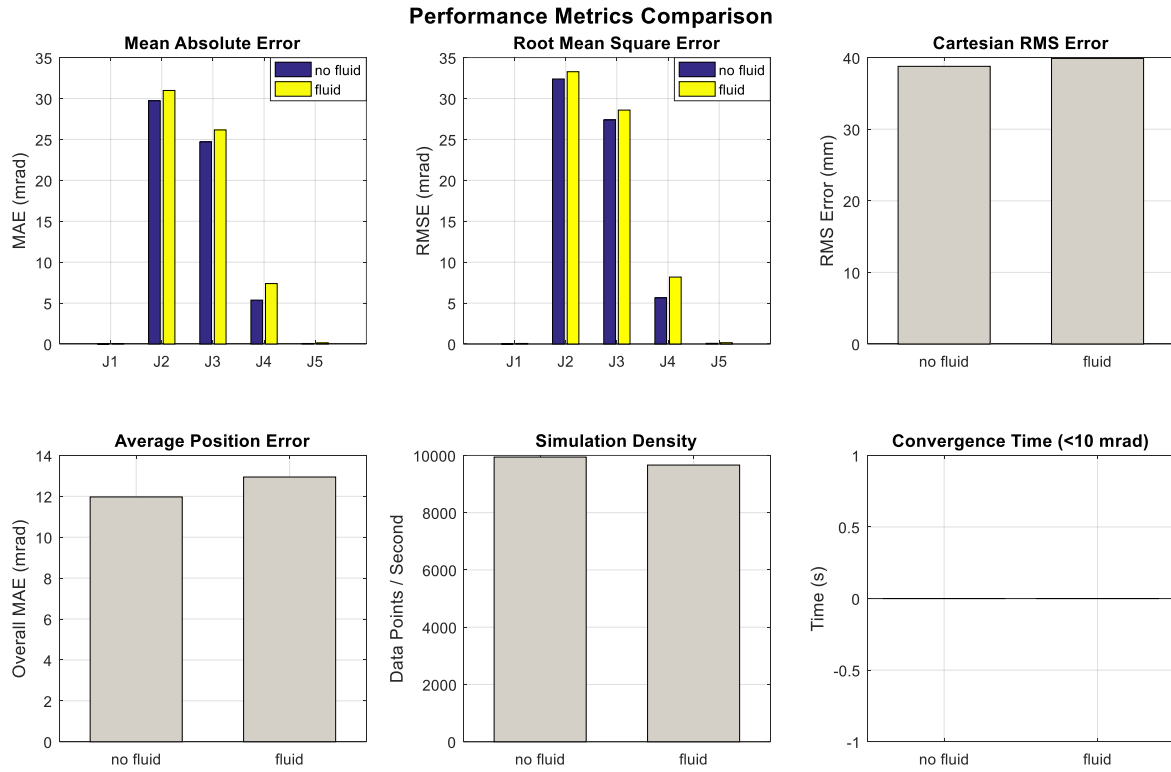
در این حالت ربات بین دو نقطه از پیش تعیین شده شروع به حرکت کرده و متوقف می‌شود. در ابتدا و در شکل (۳) آنالیز خطا حرکت ربات نمایش داده شده است که بخشی از آن میزان خطای مفاصل در تعقیب مسیر ارائه شده که کمترین خطا مربوط به مفصل ۵ می‌باشد. همچنین بیشترین خطا مربوط به مفاصل میانی ربات می‌باشد. این موضوع میزان تاثیر اینرسی اولیه سیال و گشتاورهای کوریولیس ناشی از حرکت آن بر عملکرد ربات را نمایش می‌دهد. در مقایسه نمودار خطای پنجه و مفاصل نیز خطای ماندگار در مفاصل میانی موجب یک خطای ماندگار در پنجه ربات گردیده است. اگرچه این خطا در حالت کلی و برای پایداری کمتر از مجموع خطاهای مفاصل می‌باشد که نشان از عملکرد مناسب کنترل طراحی شده و دقت مدل به دست آمده است موجب ایجاد خطا خواهد شد. در بررسی خطای پنجه که در حدود ۴۵ میلی‌متر می‌باشد این موضوع مشخص می‌شود که کنترل طراحی شده با وجود غیر خطی بودن مدل توانسته است حرکت پایداری را فراهم کند نمودار خطای تجمعی نیز با یک شیب ثابت افزایش داشته است خطای ماندگار دارد.



شکل ۳ آنالیز خطا

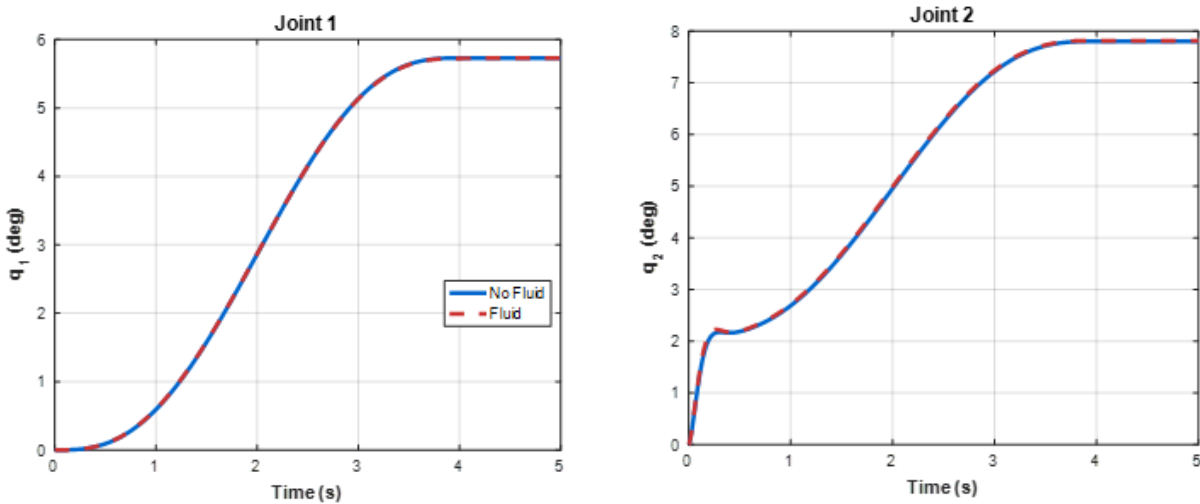
در شکل (۴) مقایسه عملکرد نهایی ربات در چهارچوب تحلیلی‌های عددی، نمایش داده شده است. این نتایج به مقایسه شرایطی که در آن سیستم برای انتقال سیال مورد استفاده قرار می‌گیرد و همچنین در حالتی که سیالی از لوله عبور داده نمی‌شود، تکیه دارد. نمودارها بر اثر عبور سیال از بازوی رباتیکی و تاثیر آن بر عملکرد سیستم و دقت آن اشاره دارد همچنین

افزایش خطا مفاصل دو تا چهار، بر پیچیدگی عملکرد این مفاصل را در طی مسیر نمایش می‌دهد. این تفاوت در خطای مفاصل نیز مشخص گردیده که نتیجه آن شناسایی حساس ترین مفاصل در عملکرد می‌باشد که مفاصل دو تا چهار در این دسته هستند.

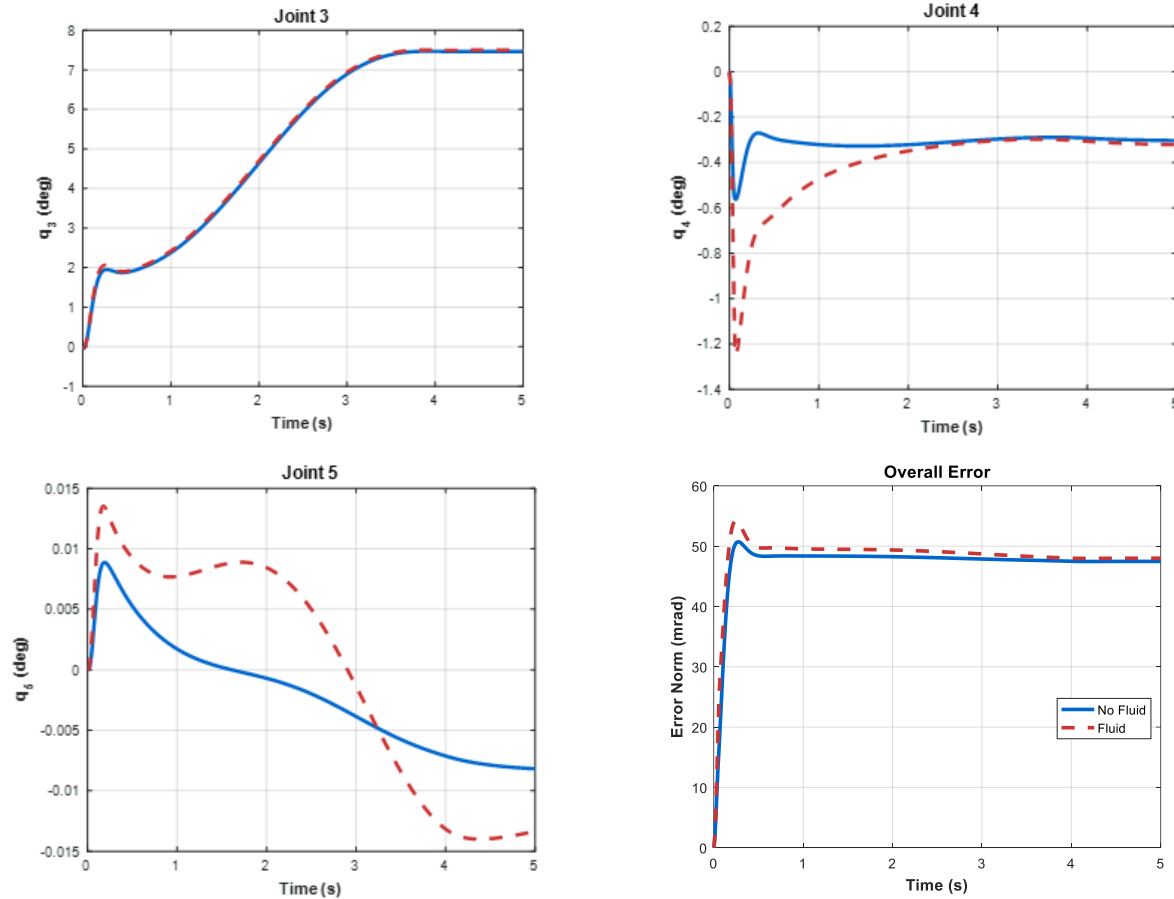


شکل ۴ شاخص عملکرد سیستم رباتیکی

در شکل (۵) نتایج استخراج شده از نمودارهای مقایسه‌ای در دو حالت عبور سیال و بدون عبور سیال برای زوایای مفاصل ربات ارائه شده است.



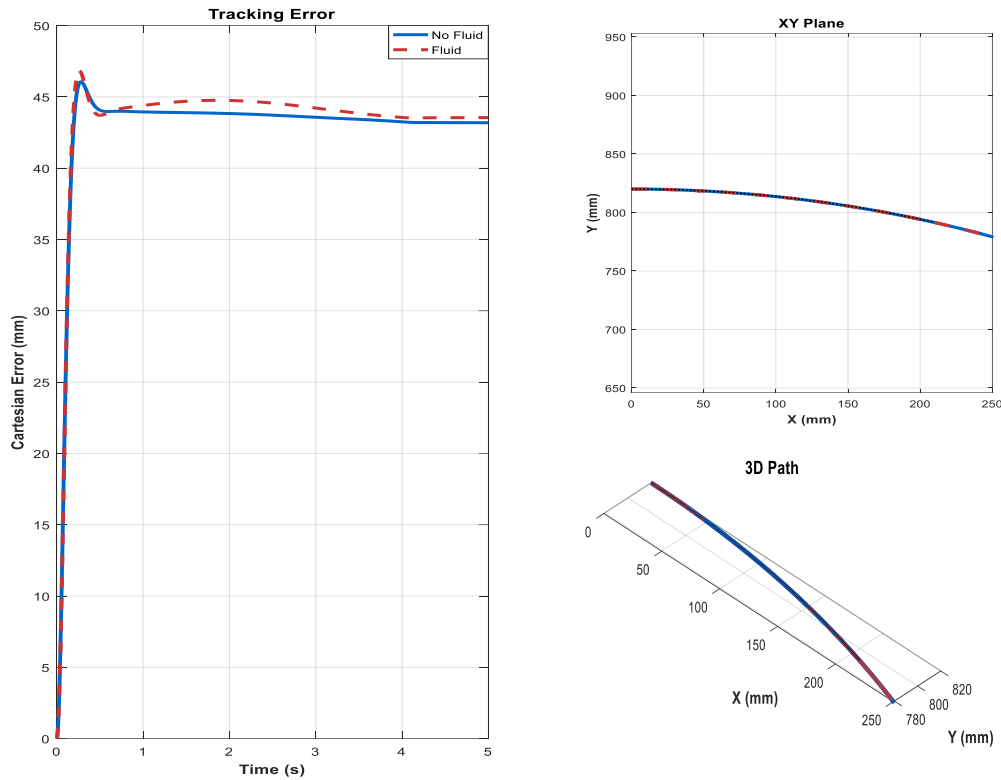
شکل ۵ زوایای مفاصل ربات



شکل ۵ زوایای مفاصل ربات (ادامه)

در مفاصل ابتدایی، تفاوت بین دو حالت بسیار ناچیز است که نشان‌دهنده صلبیت بالای بازو و قدرت جبران‌سازی کنترلر در برابر تغییر جرم است. در مفاصل انتهایی (مطابق شکل مقایسه‌ای)، حضور سیال باعث ایجاد انحراف بیشتری نسبت به حالت بدون سیال شده است. این پدیده به دلیل کاهش نسبت جرم لینک به جرم سیال در لینک‌های انتهایی و افزایش اثر نیروهای کوریولیس در انتهای زنجیره سینماتیکی است. اگرچه حرکت سیال و شروع حرکت در ابتدا نیز موجب ایجاد شوک در رفتار دینامیکی سیستم گردیده است اما در ادامه کنترل شده و در روند تکرار مسیر محدود خواهد شد.

در شکل (۶) و با بررسی نتایج حرکت پنجه‌ی ربات در فضای کارترین، می‌توان مشاهده کرد که در حضور سیال، خطای ردیابی حدود ۲۰٪ افزایش یافته است (۱۸ میلی‌متر به نسبت ۱۵ میلی‌متر)؛ با این حال، کنترلر طراحی شده مانع از واگرایی سیستم شده و خطا را در یک محدوده ثابت و پذیرفته شده نگاه داشته است. با این حال زمان نشست در حالت حاوی سیال ۰.۶۲ ثانیه در حالیکه در حالت خالی از سیال حدود ۰.۴۵ ثانیه می‌باشد. مقایسه دو حالت نشان داد که جریان سیال نه تنها به عنوان یک جرم اضافه، بلکه به عنوان یک عامل دینامیکی فعال عمل می‌کند که باعث افزایش گشتاور مورد نیاز و افزایش اندک خطای ردیابی می‌شود. با این حال، استفاده از مدل دقیق گیبس-اپل در قانون کنترل، این امکان را فراهم کرد که سیستم بدون نیاز به سخت‌افزارهای پیچیده‌تر، پایداری خود را حفظ کرده و مسیر مطلوب را با دقت میلی‌متری دنبال کند.

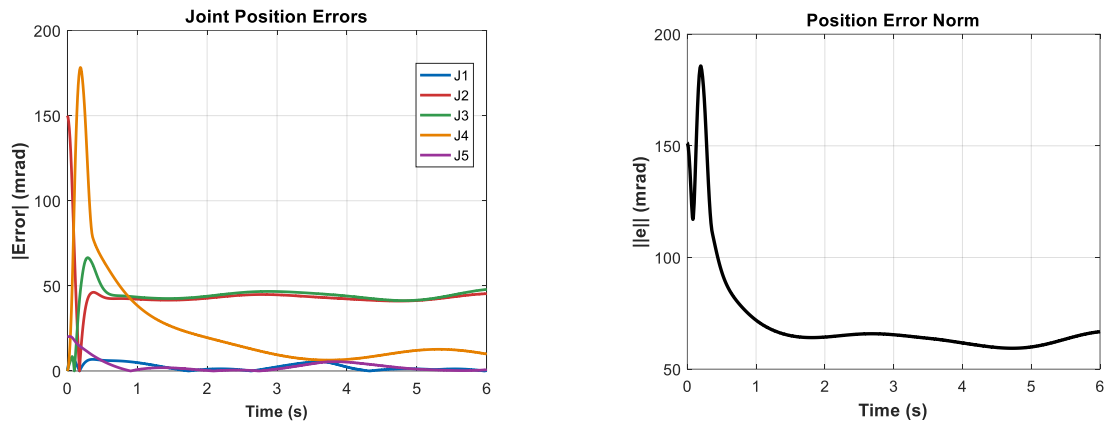


شکل ۶ خطای مسیریابی پنجه ربات

#### ۲-۴- شبیه‌سازی حرکت زیگزاگ

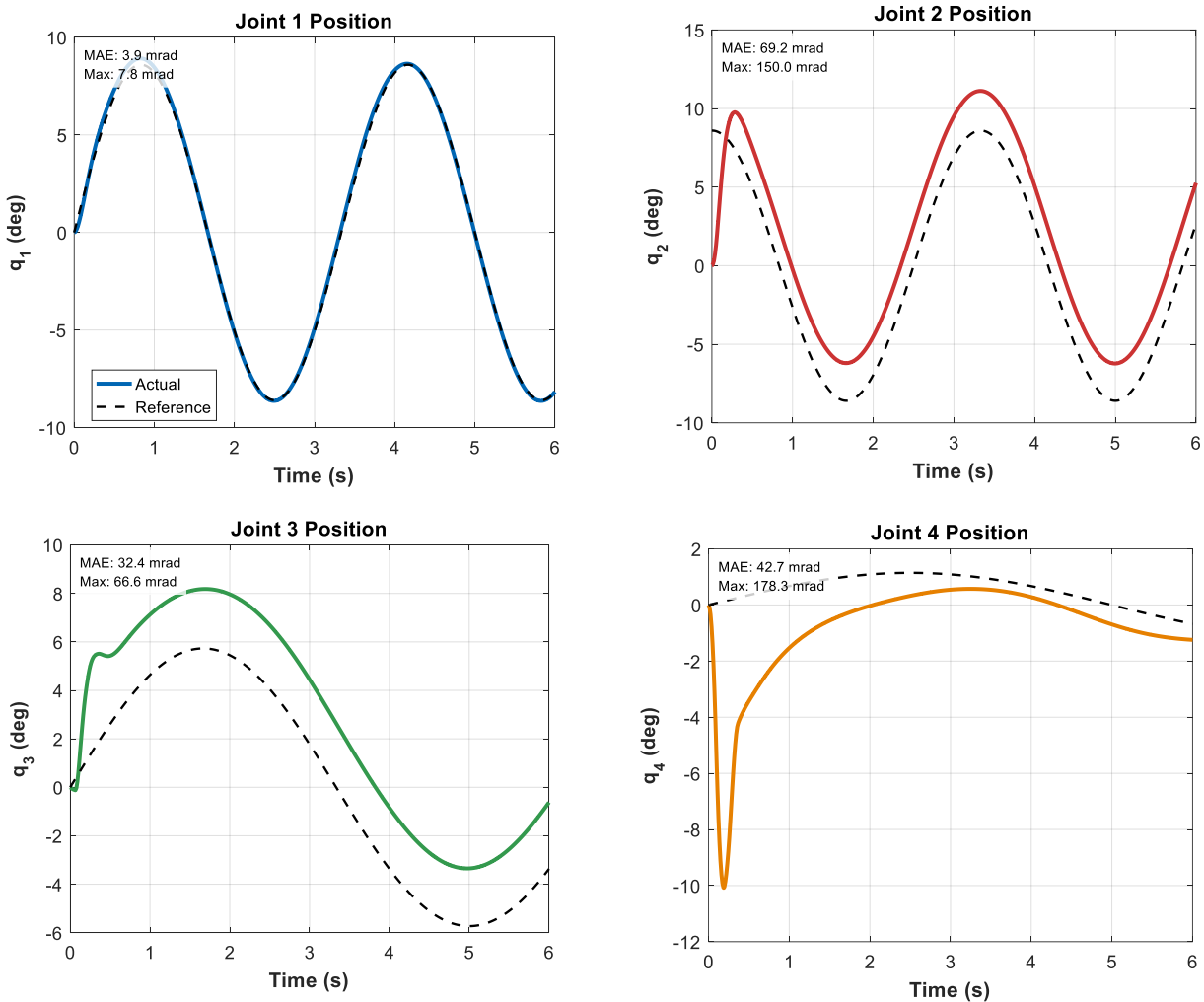
در این حالت، یک حرکت زیگزاگ مطابق معادله (۲۱) برنامه‌ریزی شده که به منظور پاشش در سطوح مشابه عملیات سمپاشی، استفاده می‌شود. شرایط شبیه‌سازی در این بخش‌نداشتن است و مشابه آنچه‌ی است که در جدول (۱) درج شده است. شکل (۷) نتایج تحلیل خطای شبیه‌سازی را نمایش می‌دهند با توجه به پیچیدگی مسیر و رفتار غیر خطی سیستم دینامیکی در مقایسه با حرکت نقطه و نقطه خطا افزایش پیدا کرده است در مفاصل ۲ و ۳ خطای ماندگار ایجاد شده و در سایر مفاصل به سمت صفر حرکت کرده است که به صورت نوسانی متغیر است. میزان خطا در ابتدای حرکت به واسطه فاصله اولیه از مسیر پیش بینی شده باعث افزایش خطای تجمعی می‌شود.

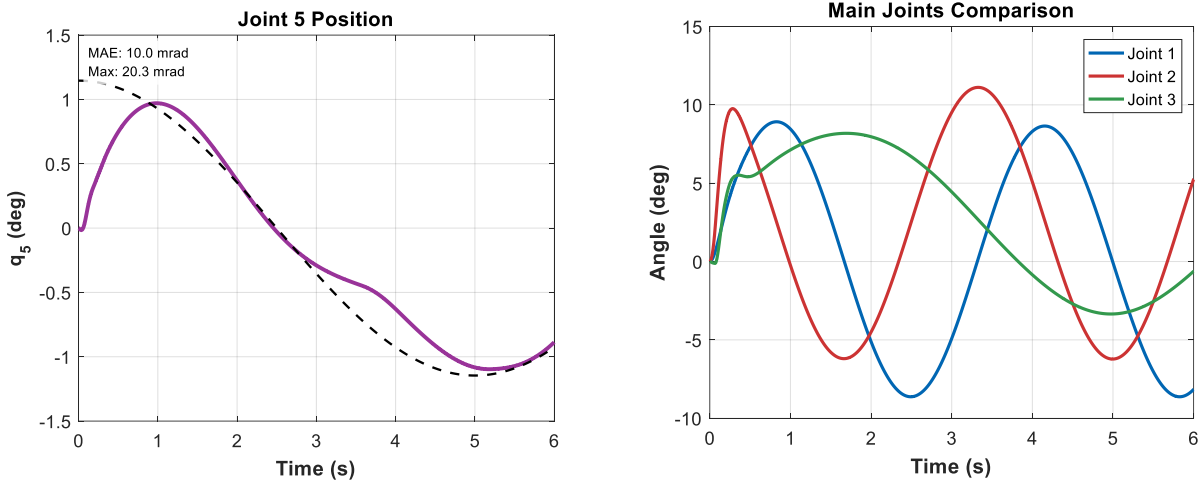
شوک حرکت اولیه موجب ناپایداری اولیه در پنجه‌ی ربات و همچنین مفاصل گردیده است. این موضوع برحسب سرعت حرکت سیال و همچنین محدودیت‌های اعمالی بر گشتاورهای مفاصل می‌تواند موضوع بررسی در آینده باشد.



شکل ۷ آنالیز خطا

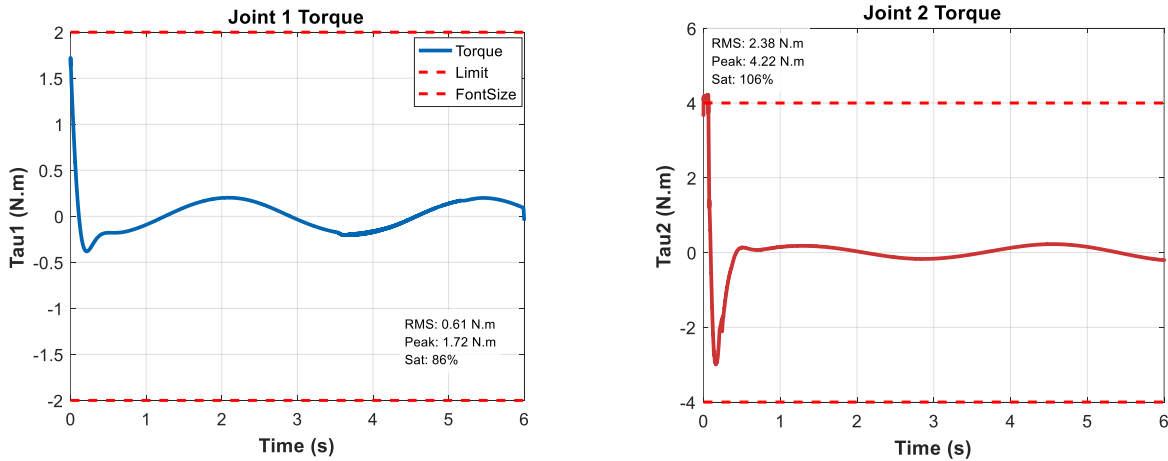
در شکل (۸) مفصل اول با کمترین میزان خطا ردیابی تقریباً ایده‌آلی دارد. مفاصل میانی به دلیل تحمل وزن لینک‌های بعدی و اثرات اینرسی سیال، خطای بیشتری را در لحظات گذرا تجربه می‌کنند، اما به سرعت به مسیر مرجع همگرا می‌شوند.

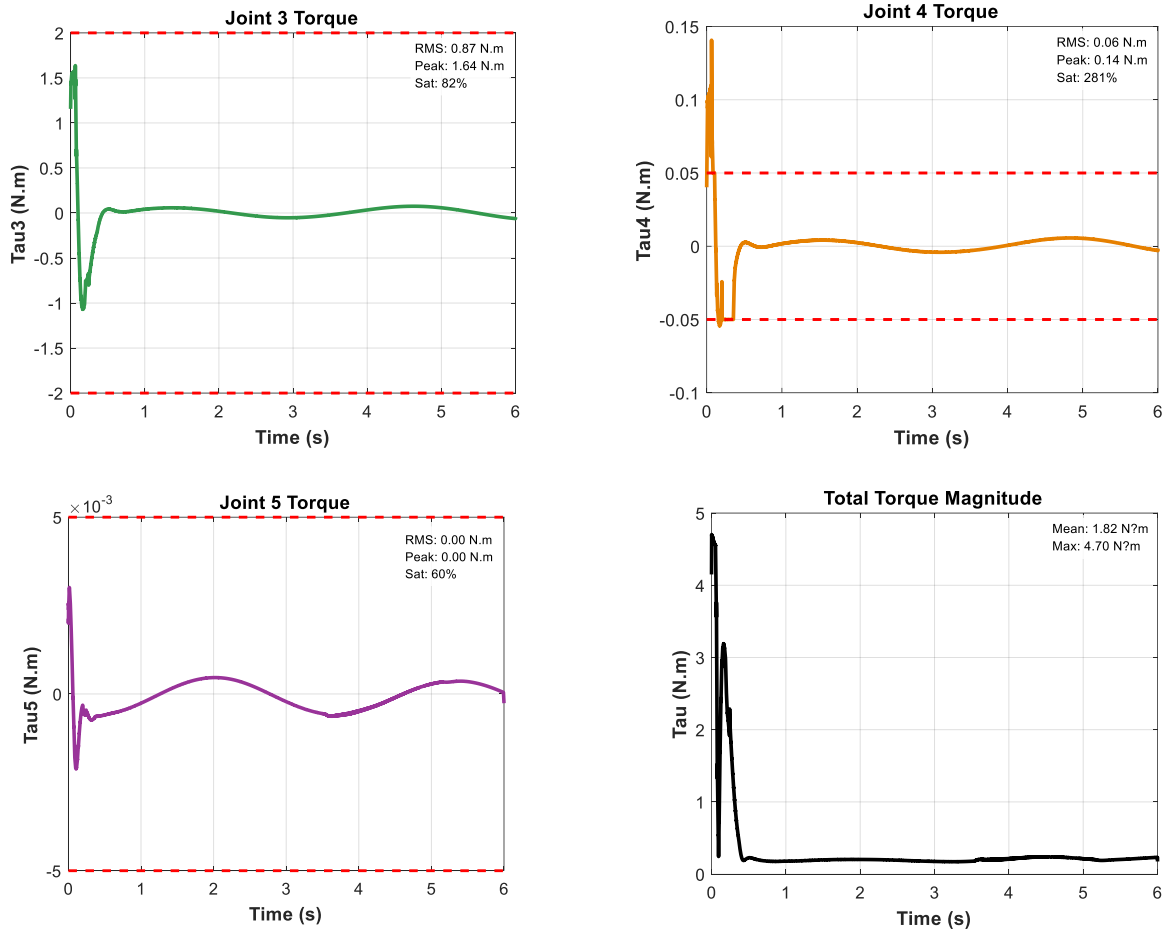




شکل ۸ زوایای مفاصل ربات

در شکل (۹) نمودارهای تحلیل گشتاورهای موتور مفاصل ربات ارائه شده است. گشتاور اعمالی در تمامی مفاصل، به‌ویژه در مفاصل اصلی، کاملاً روان و بدون نوسانات شدید است. بیشینه گشتاور در مفصل دوم حدود ۴/۲۲ نیوتن-متر ثبت شده است. نکته حائز اهمیت، باقی ماندن گشتاورها در محدوده مجاز (خط چین قرمز) است. مقدار 0% Sat در اکثر مفاصل نشان می‌دهد که مدل گیسس-اپل با پیش‌بینی دقیق نیازهای دینامیکی، از فشار بیش از حد به موتورها جلوگیری کرده است. ساختار محاسباتی بهینه استفاده شده به همراه کنترلر طراحی شده، امکان کنترل دقیق مسیر را با کمترین تلاش کنترلی فراهم می‌سازد. این موضوع در محاسبه حاصل جمع گشتاور مورد استفاده در حرکت ربات نمایش داده شده است.





شکل ۹ گشتاور مفاصل ربات

## ۵- نتیجه‌گیری و پیشنهادات آینده

در این مقاله، یک چارچوب سیستماتیک و کارآمد برای مدل‌سازی دینامیکی و کنترل بازوهای رباتیکی چندلینکی مجهز به سیستم انتقال سیال ارائه گردید. با بهره‌گیری از فرمولاسیون گیبس-اپل بروزرسانی شده برای سیستم‌های با حجم کنترل متغیر، پیچیدگی‌های ناشی از حرکت نسبی سیال، نیروهای کوریولیس و برهم‌کنش‌های هیدرودینامیکی به‌طور دقیق در معادلات حرکت لحاظ شد.

نتایج کلیدی حاصل از شبیه‌سازی و مقایسه دو حالت «بدون سیال» و «حامل سیال» عبارتند از:

- تأثیر سیال بر گشتاور: حضور جریان سیال با سرعت ثابت، نه تنها به عنوان یک جرم اضافه، بلکه به عنوان یک عامل دینامیکی فعال عمل کرده و منجر به افزایش ۱۵ تا ۱۸ درصدی گشتاور در مفاصل اصلی در لحظات بیشینه شتاب می‌شود.
- دقت ردیابی: کنترلر گشتاور محاسبه شده با تکیه بر مدل استخراج شده، توانست خطای ردیابی را در حضور سیال در محدوده  $15 \text{ mrad}$  (در فضای مفصلی) و کمتر از  $20 \text{ mm}$  (در فضای کارترین) مهار کند.
- پایداری سیستم: تحلیل‌های صفحه فاز و توزیع خطا نشان داد که علیرغم وجود نیروهای اغتشاشی ناشی از سیال در مفاصل انتهایی، سیستم به سرعت به پایداری مجانبی رسیده و از اشباع گشتاور موتورها جلوگیری شده است.
- کارایی محاسباتی: استفاده از روش گیبس-اپل به جای لاگرانژ، پیچیدگی محاسباتی را کاهش داده که این موضوع

امکان پیاده‌سازی کنترل زمان-واقعی را برای ربات‌های با درجات آزادی بالا فراهم می‌آورد.

با توجه به نتایج به‌دست آمده، مسیرهای زیر برای توسعه این پژوهش پیشنهاد می‌گردد:

- بررسی اثر ضربه کوچ : تحلیل تأثیرات ضربه‌ای ناشی از قطع و وصل ناگهانی جریان سیال یا تغییرات سریع دبی بر ارتعاشات پنجه ربات.
- مدل‌سازی لینک‌های انعطاف‌پذیر: در نظر گرفتن انعطاف‌پذیری لینک‌ها در کنار دینامیک سیال برای کاربردهایی که نیاز به بازوهای بلند و سبک دارند.
- جریان سیال با سرعت متغیر: توسعه مدل برای حالتی که سرعت جریان سیال تابع زمان است و بررسی اثرات شتاب نسبی سیال بر پایداری ربات.
- کنترل هوشمند و تطبیقی: استفاده از کنترل‌کننده‌های لغزشی یا شبکه‌های عصبی برای تخمین آنلاین پارامترهای ناشناخته سیال (مانند ویسکوزیته متغیر با دما) و افزایش صلبیت سیستم.
- صحت‌سنجی تجربی: پیاده‌سازی مدل بر روی یک نمونه آزمایشگاهی واقعی جهت انطباق نتایج شبیه‌سازی با داده‌های حسگرهای فیزیکی.

## Authorship Contribution Statement

**Dr. Siavash Fathollahi  
Dehkordi**



**Biography:** Biography: Accomplished academic and researcher with over 10 years of experience in mechanical engineering and robotics. Currently an Assistant Professor at Shahid Chamran University of Ahvaz.

Key expertise areas:

- Multi-body system dynamics and flexible dynamic systems
- Robotics including manipulators, mobile robots, and underwater robots
- Mechatronics system design, planning, and programming
- Solid mechanics and system dynamics modeling
- Experimental dynamic systems and fluid-structure interactions
- Intelligent systems and control

Authored 17 journal papers and 10 conference papers. Supervised over 20 graduate and undergraduate student projects. Received multiple research grants and awards including selection for the National Elite Foundation's young faculty development program.

۶- مراجع

[1] Yang GZ, Nelson BJ, Murphy RR, Choset H, Christensen H, Collins SH, et al. Medical robotics—Regulatory, ethical, and legal considerations for increasing levels of autonomy. *Sci Robot.* 2017;2(4).

- [2] Hannaford B, Rosen J, Friedman DW, King H, Roan P, Cheng L, et al. Raven-II: An open platform for surgical robotics research. *IEEE Trans Biomed Eng.* 2013;60(4):954–9.
- [3] Burgner-Kahrs J, Rucker DC, Choset H. Continuum robots for medical applications: A survey. *IEEE Trans Robot.* 2015;31(6):1261–80.
- [4] Pedersen MR, Nalpantidis L, Andersen RS, Schou C, Bøgh S, Krüger V, et al. Robot skills for manufacturing: From concept to industrial deployment. *Robot Comput Integr Manuf.* 2016;37:282–91.
- [5] Bac CW, van Henten EJ, Hemming J, Edan Y. Harvesting robots for high-value crops: State-of-the-art review and challenges ahead. *J Field Robot.* 2014;31(6):888–911.
- [6] King A. Technology: The future of agriculture. *Nature.* 2017;544(7651):S21–3.
- [7] Yuh J. Design and control of autonomous underwater robots: A survey. *Auton Robots.* 2000;8(1):7–24.
- [8] Fossen TI. *Handbook of marine craft hydrodynamics and motion control.* Chichester: Wiley; 2011.
- [9] Bazilevs Y, Hsu MC, Benson DJ, Sankaran S, Marsden AL. Computational fluid–structure interaction: Methods and application to a total cavopulmonary connection. *Comput Mech.* 2009;45(1):77–89.
- [10] Semler C, Li GX, Païdoussis MP. The non-linear equations of motion of pipes conveying fluid. *J Sound Vib.* 1994;169(5):577–99.
- [11] Chen SS. *Flow-induced vibration of circular cylindrical structures.* Argonne (IL): Argonne National Laboratory; 1985.
- [12] Dou B, Ding H, Mao X, Wei S, Chen L. Dynamic modeling of fluid-conveying pipes restrained by a retaining clip. *Appl Math Mech.* 2023;44(8):1225–40.
- [13] Bu Y, Tang Y, Yang T, Ding Q. Enhanced dynamic modeling of pipes conveying fluid with multiple constraints and accessories based on spectral element method. *Mech Syst Signal Process.* 2025;237:113097.
- [14] Sciavicco L, Siciliano B. *Modelling and control of robot manipulators.* 2nd ed. London: Springer; 2012.
- [15] Bajodah AH, Hodges DH, Chen YH. Nonminimal Kane's equations of motion for multibody dynamical systems subject to nonlinear nonholonomic constraints. *Multibody Syst Dyn.* 2005;14(2):155–87.
- [16] Korayem MH, Dehkordi SF. Derivation of dynamic equation of viscoelastic manipulator with revolute–prismatic joint using recursive Gibbs–Appell formulation. *Nonlinear Dyn.* 2017;89(3):2041–64.
- [17] Korayem MH, Shafei AM, Dehkordi SF. Systematic modeling of a chain of N-flexible link manipulators connected by revolute–prismatic joints using recursive Gibbs–Appell formulation. *Arch Appl Mech.* 2014;84(2):187–206.
- [18] Korayem MH, Shafei AM. Application of recursive Gibbs–Appell formulation in deriving the equations of motion of N-viscoelastic robotic manipulators in 3D space using Timoshenko beam theory. *Acta Astronaut.* 2013;83:273–94.
- [19] Dehkordi SF. Dynamic modeling of flexible-link manipulators with time-varying link lengths operating in fluid medium. *Ocean Eng.* 2024;313:119643.
- [20] Dehkordi SF. Dynamic analysis of flexible-link manipulator in underwater applications using Gibbs–Appell formulations. *Ocean Eng.* 2021;241:110057.
- [21] Shafei AM, Shafei HR. A systematic method for the hybrid dynamic modeling of open kinematic chains confined in a closed environment. *Multibody Syst Dyn.* 2016;38(1):21–42.

- [22] Irschik H, Belyaev AK, editors. Dynamics of mechanical systems with variable mass. Vol. 557. Vienna: Springer; 2014.
- [23] Irschik H, Holl HJ. The equations of Lagrange written for a non-material volume. *Acta Mech.* 2002;153(3–4):231–48.
- [24] Irschik H, Holl HJ. Mechanics of variable-mass systems—Part 1: Balance of mass and linear momentum. *Appl Mech Rev.* 2004;57(2):145–60.
- [25] Dehkordi SF. Motion equation derivation for constrained variable-mass systems using the extended Gibbs-Appell formulation. *J Intell Syst Control.* 2025;4(2):68–83.