



Analysis of the Vibrational Characteristics of a Sandwich Plate with an Auxetic Core Reinforced with Carbon Fibers under Aerodynamic Forces

Korosh Khorshidi ^{a*}, Hanieh Norowzian ^a, Mohsen Ghasemi ^a

^a Department of Mechanical Engineering, Arak University, Arak, 38156-88349, Iran

Original Article

Use your device to scan and read the article online



Citation: Khorshidi K, Norowzian H, Ghasemi M. Analysis of the Vibrational Characteristics of a Sandwich Plate with an Auxetic Core Reinforced with Carbon Fibers under Aerodynamic Forces. *Mechanics of Advanced and Smart Materials*. 2025;5(1):43-71.

 <https://10.61882/masm.5.1.43>

KEYWORDS

Sandwich Plate,
Auxetic Core,
Vibrations,
Stability,
Aerodynamic Forces.

ABSTRACT

In the present study, the vibrational analysis of a three-layer sandwich plate with an auxetic core under aerodynamic forces with simply supported boundary conditions has been investigated. In this sandwich plate, the middle layer, or the so-called core, is made of auxetic material. The plate is subjected to aerodynamic forces on one side. To reduce the intensity of vibrations in the structure, the plate has been reinforced with carbon nanotubes. For the analysis and modeling of the plate's vibrations, the modified shear deformation plate theories were employed, and the aerodynamic force exerted by the airflow on the plate was assumed based on first-order piston theory. Using Hamilton's principle, the governing equations for the vibrational behavior of the sandwich plate were derived, and the Galerkin weighted residual method was utilized to solve these equations. To demonstrate the validity of the obtained relationships and the proposed solution method, the results of this study were compared with results published in reputable journals and numerical solutions obtained using the finite element method through commercial software. Finally, the effects of various parameters such as the geometric dimensions of the sandwich plate, the dimensions of the auxetic core, aerodynamic pressure, and the volume fraction of carbon nanotubes on the vibrations of the structure were examined and analyzed.

Extended Abstract

1. Introduction

Plates are among the most essential structural elements in engineering and are widely employed in aerospace structures, spacecraft, marine vessels, submarines, automobiles, and civil engineering applications. Accurate modeling of the mechanical behavior of plates requires the adoption of suitable theoretical frameworks. Classical thin plate theory (CPT), first-order shear deformation theory (FSDT), third-order shear deformation theory (TSDT), and three-dimensional elasticity remain the most widely used approaches [1-9]. However, classical and lower-order theories often suffer from limitations, particularly in capturing transverse shear effects in moderately thick and thick plates. To overcome these shortcomings, a variety of refined shear deformation theories including exponential, hyperbolic [3-10], and other higher-order formulations have been proposed, providing more accurate predictions without requiring shear correction factors.

* Corresponding author. Tel.: +98-8632625720

E-mail address: k-khorshidi@araku.ac.ir

DOI: <https://10.61882/masm.5.1.43>

Received: April 26, 2025; Received in revised form: June 05, 2025; Accepted: June 15, 2025.

© Author



A substantial body of research has focused on the vibration and buckling behavior of isotropic, composite, and functionally graded plates, as well as nanoplates, under various boundary conditions and physical environments. Notably, sandwich plates with auxetic core characterized by negative Poisson’s ratio and honeycomb-like re-entrant structure have attracted increasing attention due to their exceptional mechanical properties, including enhanced stiffness, energy absorption, and unique dynamic responses under static, impact, and blast loadings. Several studies have investigated the influence of geometric parameters, boundary conditions, thermo-mechanical environments, and reinforcement with carbon nanotubes on the dynamic and stability behavior of auxetic sandwich structures.

In addition to static and dynamic loads, follower forces and aeroelastic effects, such as flutter and divergence, play a critical role in the stability of structural components, especially in aerospace applications. Flutter is manifested as a self-excited oscillation of continuously increasing amplitude, while divergence corresponds to a static instability characterized by unbounded displacement. Both phenomena, driven by aerodynamic pressures in high-speed flow regimes, can severely compromise structural safety. Numerous analytical, numerical, and experimental investigations have addressed aeroelastic stability of plates and panels using piston theory, finite element methods, Fourier expansion approaches, and Galerkin-based formulations. Despite these efforts, further studies are required to capture the combined influence of aeroelastic forces, auxetic core structures, and nanoscale reinforcements on the dynamic performance of sandwich plates.

The present study is devoted to the free vibration analysis of a three-layer sandwich plate with an auxetic core subjected to aerodynamic loading. The face sheets are assumed to be isotropic, while the auxetic core is reinforced with carbon nanotubes to enhance mechanical performance. The governing equations are derived within the framework of a refined shear deformation theory, with aerodynamic pressure modeled using first-order piston theory. Employing Hamilton’s principle and the Galerkin weighted residual method, the equations of motion are formulated and solved. The accuracy of the proposed model is validated through comparison with finite element simulations and published results. Finally, a parametric study is conducted to evaluate the effects of geometrical dimensions, auxetic core configuration, aerodynamic pressure, and carbon nanotube volume fraction on the vibration and stability characteristics of the sandwich plate.

2. Assumptions, Governing Equations Derivation, and Solution Method

In this study, a rectangular sandwich plate with length a , width b , and thickness h is considered. The plate consists of three layers: the top and bottom layers are made of isotropic material, while the middle layer, or core, is an auxetic structure with re-entrant cell geometry. The thickness of the auxetic core is denoted by h_c . To enhance the stiffness and stability of the plate, the top and bottom layers are reinforced with carbon nanotubes. The plate is subjected to an aeroelastic force on one side due to an external flow with velocity U_∞ . The objective of this research is to derive the governing equations of the vibrational behavior of the system and to determine the natural frequencies and mode shapes of the plate.

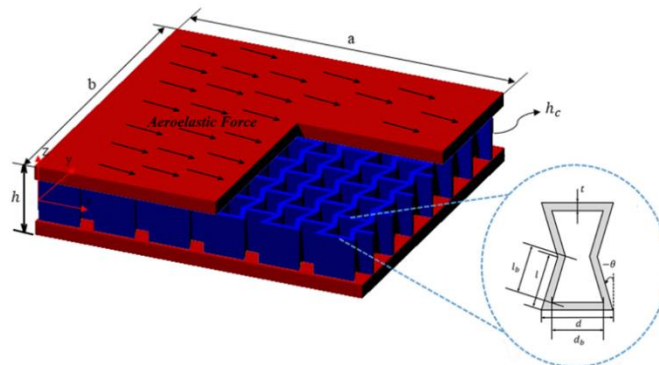


Figure 1. Sandwich plate, geometric dimensions, coordinate system, and geometric parameters of the re-entrant cell

Assuming the modified high-order shear theory of the sheet, the displacement relations are defined as follows:

$$u_1(x, y, z, t) = u(x, y, t) - g(z) \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial x} + f(z)\xi(x, y, t) \tag{1}$$

$$u_2(x, y, z, t) = v(x, y, t) - g(z) \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial y} + f(z)\psi(x, y, t) \tag{2}$$

$$u_3(x, y, z, t) = w(x, y, t) \quad (3)$$

Where $g(z)$ and $f(z)$ are continuous functions which are defined as follows based on the theory

$$f(z) = z\left(\frac{3}{h} - \frac{4z^2}{h^3}\right) \quad (4)$$

Based on the displacement field mentioned above, the displacement of a point consists of two components, the first component corresponding to classical plate theory and the second component resulting from higher-order theory. Assuming linear strain relations, if vertical strains ε_{xx} and ε_{yy} and shear strains (ε_{xy} , ε_{yz} and ε_{xz}) are considered, the strain field in the Cartesian coordinate system, assuming small deformations, is obtained through the following relations [1-9]:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + g(z) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(z) \frac{\partial \zeta}{\partial x} \quad (5)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} + g(z) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + f(z) \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (6)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + 2g(z) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + f(z) \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) \right) \quad (7)$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial g(z)}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \zeta \frac{\partial f(z)}{\partial z} + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \right) \quad (8)$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial g(z)}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \psi \frac{\partial f(z)}{\partial z} + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \right) \quad (9)$$

$$\varepsilon_{zz} = 0 \quad (10)$$

As mentioned in the previous sections, the sheet consists of three layers. For all three layers, the stress-strain relationships are defined using the generalized Hooke's law as follows [1-9]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x^t \\ \sigma_y^t \\ \sigma_{xy}^t \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}^t & Q_{12}^t & 0 \\ Q_{21}^t & Q_{22}^t & 0 \\ 0 & 0 & Q_{33}^t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{yz}^t \\ \sigma_{xz}^t \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44}^t & 0 \\ 0 & Q_{55}^t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x^c \\ \sigma_y^c \\ \sigma_{xy}^c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}^c & Q_{12}^c & 0 \\ Q_{21}^c & Q_{22}^c & 0 \\ 0 & 0 & Q_{33}^c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (13)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{yz}^c \\ \sigma_{xz}^c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44}^c & 0 \\ 0 & Q_{55}^c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} \end{Bmatrix} \quad (14)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x^b \\ \sigma_y^b \\ \sigma_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}^b & Q_{12}^b & 0 \\ Q_{21}^b & Q_{22}^b & 0 \\ 0 & 0 & Q_{33}^b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (15)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{yz}^b \\ \sigma_{xz}^b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44}^b & 0 \\ 0 & Q_{55}^b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} \end{Bmatrix} \quad (16)$$

The superscripts t and b correspond to the upper and lower isotropic layers, and the superscript c corresponds to the auxetic core of the plate.

The following relationships are defined to calculate the properties of the composite layer [1].

$$E_{11} = \eta_1 V_{CNT} E_{11}^{CNT} + V_m E_m \quad (17)$$

$$\frac{\eta_2}{E_{22}} = \frac{V_{CNT}}{E_{22}^{CNT}} + \frac{V_m}{G_m} \quad (18)$$

$$\frac{\eta_3}{G_{12}} = \frac{V_{CNT}}{G_{12}^{CNT}} + \frac{V_m}{G_m} \quad (19)$$

$$V_{CNT} + V_m = 1 \quad (20)$$

$$\nu = V_{CNT} \nu^{CNT} + V_m \nu^m \quad (21)$$

$$\rho = V_{CNT} \rho^{CNT} + V_m \rho^m \quad (22)$$

Where V_{CNT} , E_{11}^{CNT} , G_{12}^{CNT} , ν^{CNT} and ρ^{CNT} are the volume fraction, elastic modulus, bulk modulus, Poisson's ratio and density of carbon nanotubes, respectively, and η_1 , η_2 and η_3 are the effective parameters of carbon nanotubes. V_m , E_m , G_m , ν^m and ρ^m are the volume fraction, elastic modulus, bulk modulus, Poisson's ratio and density of the isotropic material, respectively. E_{11} , E_{22} , G_{12} , ν and ρ are the elastic coefficients, bulk modulus, Poisson's ratio and density of the isotropic layer after applying the carbon reinforcement (composite layer), respectively.

Hamilton's principle is used to derive the governing equations of the plate and this principle is expressed as follows:

$$\int_0^t (\delta T + \delta W_e - \delta U) dt = 0 \tag{23}$$

By substituting the final relations of potential energy, kinetic energy, and external work into Hamilton's principle, and considering the boundary conditions, the governing equations of the vibration of the sandwich plate in terms of displacement components are obtained as follows:

$$B_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_1 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + B_3 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + A_3 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + B_2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + A_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + E_1 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + E_1 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 2E_3 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + E_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + E_2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} = I_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + I_5 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + I_4 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} \tag{24}$$

$$C_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C_3 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + C_2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} + D_1 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + D_3 \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + D_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + E_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + E_1 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2E_3 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + E_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + E_2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} = I_1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + I_5 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + I_4 \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial t^2} \tag{25}$$

$$C_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C_3 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + C_2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} + D_1 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + D_3 \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + D_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + E_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + E_1 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2E_3 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + E_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + E_2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} = I_1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + I_5 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + I_4 \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial t^2} \tag{26}$$

$$B_3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + A_3 \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + B_5 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + A_5 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + B_4 \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} + A_4 \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial y} + C_3 \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + C_5 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + C_4 \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x \partial y^2} + D_3 \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} + D_5 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + D_4 \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + 2E_3 \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + 2E_3 \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + 4E_5 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 2E_4 \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + 2E_4 \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} - F_5 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - F_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - F_4 \frac{\partial \zeta}{\partial y} - F_3 \frac{\partial \zeta}{\partial y} - F_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - F_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - G_5 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2G_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - G_4 \frac{\partial \zeta}{\partial x} - G_4 \frac{\partial \zeta}{\partial x} - G_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \Delta p = I_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - I_2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - I_4 \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} - I_4 \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial t^2} - I_6 \frac{\partial^3 \psi}{\partial y \partial t^2} - I_6 \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x \partial t^2} \tag{27}$$

$$B_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + B_4 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + A_4 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + B_6 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + A_6 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + E_2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + E_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 2E_4 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + E_6 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + E_6 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} - G_4 \frac{\partial w}{\partial x} - G_6 \zeta - G_3 \frac{\partial w}{\partial x} = I_3 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + I_5 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + I_6 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} \tag{28}$$

$$C_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C_4 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + C_6 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} + D_2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + D_4 \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + D_6 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + E_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + E_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2E_4 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + E_6 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + E_6 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} - F_4 \frac{\partial w}{\partial y} - F_6 \psi - F_3 \frac{\partial w}{\partial y} = I_3 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + I_5 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + I_6 \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial t^2} \tag{29}$$

3. Analysis of numerical results

In this section, numerical results of the vibration behavior of a three-layer sandwich plate with an aeroelastic core, under aeroelastic force and with carbon reinforcements are presented by the Glerkin method for the boundary conditions of four sides of a simple and fixed support using the modified shear deformation theory. In order to validate and verify the results, first the free vibration of the isotropic single-layer plate is investigated and the obtained results are verified with reliable references. Then the three-layer sandwich plate is modeled with Abaqus software and the resulting natural frequencies are compared. Finally, the effect of various parameters on the free vibration of the three-layer plate with the application of carbon reinforcement is studied. The properties of the isotropic material and the properties of the aeroelastic structure used to obtain the numerical results are presented in Tables (1) and (2), respectively.

Table 1. Properties of isotropic material

$\rho(kg/m^3)$	ν	$E(Gpa)$	$h_b(m)$
2700	0.3	69	0.005

Table 2. Properties of the Auxetic material.

θ (degree)	ν_c	η_3	η_1	$h_c(m)$
-30	0.3	0.01	2	0.09

In this section, carbon reinforcements are applied to the top and bottom faces of the sandwich plate. The properties of the carbon reinforcement are presented in Table (3).

Table 3. Properties of the carbon reinforcements.

$E_{11}(Gpa)$	$E_{22}(Gpa)$	ν	$G(Gpa)$	$\rho(kg/m^3)$	$V_{CNT}(\%)$	η_1	η_2	η_3
600	10	0.19	17.2	1400	12	1.2833	1.0556	1.0556

4. The effect of carbon reinforcements on system frequencies

Table (4) presents the natural frequencies of the sandwich plate with carbon reinforcements for free and clamped boundary conditions. As can be seen, after the reinforcements are applied, the plate becomes stiffer and the strength of the plate increases, which is why the frequency values have increased. Table (5) presents the natural frequency values of the sandwich plate for different percentages of the reinforcement volume fraction. With an increase in the reinforcement volume fraction (V_{CNT}), the plate becomes stiffer and the natural frequency increases. For better understanding, the results are presented in the form of a graph in Figure 2.

Table 4. Natural frequencies of sandwich panels with carbon reinforcements in simple and fixed conditions

Boundary conditions	First frequency	Second frequency	Third frequency	Forth frequency
Free	13.8766	33.4572	81.724	105.282
Clamped	26.8075	64.6874	129.342	154.234

Table 5. Natural frequencies of sandwich panels with carbon reinforcements in simple and fixed conditions

volume fraction (V_{CNT})	First frequency	Second frequency	Third frequency	Forth frequency
0%	9.7085	26.2351	33.1985	46.2157
5%	11.3799	32.4614	33.0672	48.5197
10%	13.1678	32.6849	39.0781	50.3503
15%	14.9297	32.0446	45.5247	51.7655
20%	16.6517	31.1895	51.7914	52.8405

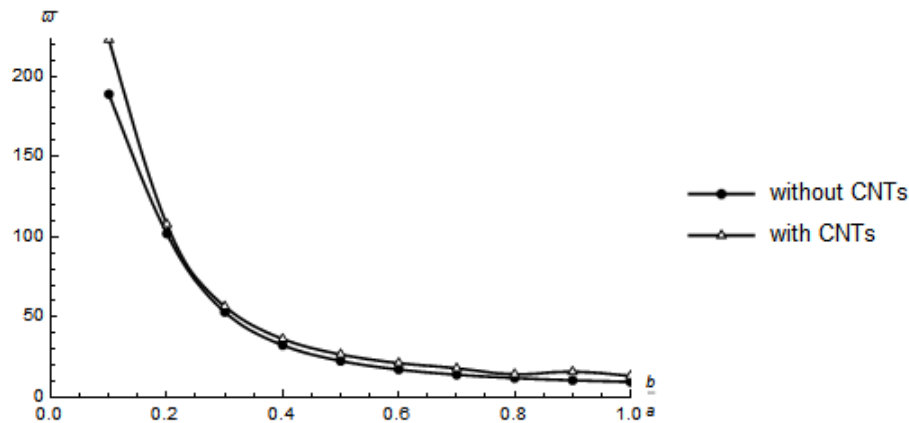


Figure 2. Variations of the first dimensionless frequency of a simply supported sandwich plate versus the aspect ratio with and without carbon reinforcement

5. The effect of the geometric parameter of the auxetic core on the system frequencies

Table (6) presents the effect of the geometric parameter of the auxetic core on the natural frequencies of the system. As mentioned, $\eta_3 = t/l$ means the ratio of the thickness of the auxetic core to its tooth length. As the value of η_3 increases, the natural frequencies decrease. In other words, assuming that the tooth length of the core is constant, the greater the thickness of the auxetic core, the lower the natural frequency. In order to better understand

the results, Figure (3) is presented. As can be seen in Figure (6), for values of η_3 less than 0.1, the natural frequency decreases more steeply.

Table 6. Changes in natural frequencies of sandwich plate auxetic changes in η_3 of acoustic core

η_3	First frequency	Second frequency	Third frequency	Fourth frequency
0.01	27.4405	86.247	122.873	138.033
0.05	19.8031	66.1919	111.721	123.58
0.1	16.4832	52.7398	102.259	121.041
0.2	14.0032	52.3999	99.8923	120.419
0.3	13.123.6	38.0855	97.4582	119.112

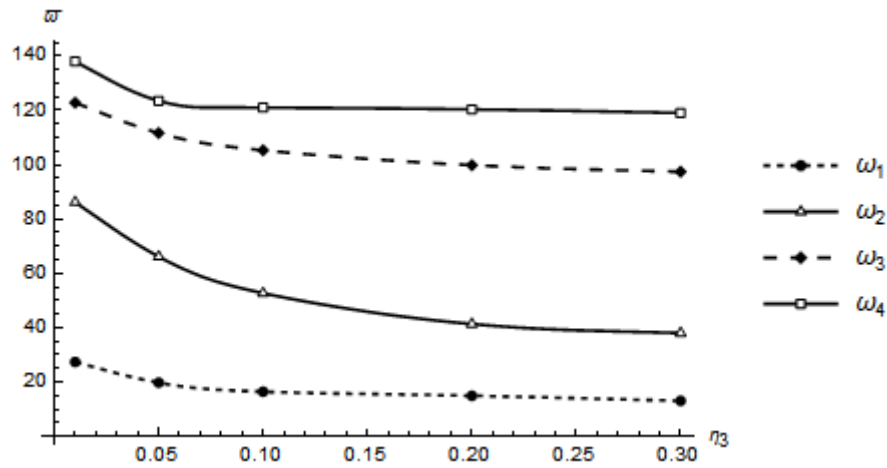


Figure 3. Changes in natural frequencies of sandwich plate against changes in η_3 of the auxetic core



تحلیل ویژگی‌های ارتعاشی ورق ساندویچی با هسته آگرتیک متصل به تقویت‌کننده‌های کربنی تحت نیروی آیروالاستیک

کوروش خورشیدی^{الف*}، هانیه نوروزیان^ب، محسن قاسمی^ج

^{الف} دانشیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه اراک، اراک، ایران، k-khorshidi@araku.ac.ir

^ب کارشناس ارشد، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه اراک، اراک، ایران، haniehnorowzian96@gmail.com

^ج کارشناس ارشد، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه اراک، اراک، ایران، ghasaemimohsen99@gmail.com

واژگان کلیدی	چکیده
ورق ساندویچی، هسته آگرتیک، ارتعاش، پایداری، نیروی آیروالاستیک.	در تحقیق حاضر، تحلیل ویژگی‌های ارتعاشی یک ورق ساندویچی سه لایه با هسته آگرتیک تحت نیروی آیروالاستیک در شرایط مرزی ساده مورد بررسی قرار گرفته است، که در این ورق ساندویچی لایه وسط یا به اصطلاح هسته مرکزی از ساختار آگرتیک و لایه‌های بالایی و پایینی از جنس ماده ایزوتروپیک تشکیل گردیده است و ورق از یک طرف تحت نیروی آیروالاستیک قرار دارد. به منظور کاهش شدت ارتعاش سازه، ورق به وسیله نانولوله‌های کربنی تقویت شده است. جهت تحلیل و مدل‌سازی ارتعاش ورق، از تئوری برشی اصلاح شده و نیروی آیرودینامیکی وارده از سمت جریان هوا بر روی ورق با فرض تئوری پیستون مرتبه اول در نظر گرفته شده است. با استفاده از اصل همیلتون، معادلات حاکم بر رفتار ارتعاشی ورق ساندویچی به دست آمده است و برای حل معادلات از روش باقیمانده وزنی گلرکین استفاده شده است. برای نشان دادن اعتبار روابط حاصله و روش حل ارائه شده، نتایج این تحقیق با نتایج منتشر شده در مقالات معتبر و نتایج حل عددی با استفاده از روش اجزا محدود به کمک نرم‌افزارهای تجاری مقایسه شده است. نهایتاً تأثیر پارامترهای مختلف مانند ابعاد هندسی ورق ساندویچی، ابعاد هسته آگرتیک، فشار آیرودینامیکی و کسر حجمی نانولوله کربنی بر ارتعاش سازه مورد بررسی و تجزیه و تحلیل قرار گرفته است.
تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۰۲/۰۶	
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۴/۰۳/۱۵	
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۰۳/۲۵	

۱- مقدمه

ورق‌ها از عناصر مهم ساختاری سازه‌ها هستند که به‌طور گسترده در کاربردهای مهندسی مختلف مانند صنعت هواپیماسازی، سازه‌های فضایی، کشتی‌ها و زیردریایی‌ها، خودروها، صنعت ساختمان‌سازی و ... مورد استفاده قرار می‌گیرند. انتخاب تئوری ورق و روش حل نقش مهمی در به دست آوردن نتایج مطلوب در تجزیه و تحلیل سازه‌های ورق ایفا می‌کند. نظریه ورق نازک کلاسیک^۱ (CPT)، نظریه مرتبه اول تغییر شکل برشی ورق^۲ (FSDT)، نظریه مرتبه سوم تغییر شکل برشی ورق^۳ (TSDT) و نظریه الاستیسیته سه‌بعدی (3D) آشناترین تئوری‌های ورق هستند [۱-۹]. در سالیان اخیر تحقیقات زیادی جهت بهبود تئوری‌های مرتبه بالا برشی انجام پذیرفته است که منجر به ارائه تئوری‌های برشی اصلاح‌شده نمایی، هایپربولیکی [۳-۹] و ...

¹ Classical Plate Theory

² First order Shear Deformation Theory

³ Third order Shear Deformation Theory

گردیده است. المیشه و همکاران [۱۰] تئوری جدید تغییر شکل برشی هایپربولیک برای کمانش و ارتعاش ورق هدفمند را ارائه دادند که در این تئوری با در نظر گرفتن اثرات تغییر شکل برشی برای کمانش و ارتعاش آزاد ورق هدفمند، برخلاف سایر تئوری‌ها چهار معادله حاکم بر سیستم را منتج می‌شود و نیازی به ضریب تصحیح برشی ندارد و تنش برشی عرضی در ضخامت ورق به صورت سهموی تغییر می‌کند و شرایط سطوح عاری از تنش را ارضا می‌کند. روش حل ناویر^۱ در این تحلیل بکار برده شد و نتایج حاصله برای ورق با نسبت ضخامت‌های مختلف با استفاده از این تئوری به طور قابل ملاحظه‌ای دقیق‌تر از تئوری کلاسیک می‌باشد و قابل مقایسه با نظریه‌های مراتب بالاتر است. پارادهان و چاکراورتی [۱۱] ارتعاش عرضی ورق‌های ایزوتروپیک را بر پایه تئوری تغییر شکل برشی معکوس مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها در این تحقیق به بررسی تأثیر هندسه بر ارتعاشات آزاد ورق برای شرایط مرزی مختلف با استفاده از روش ریلی ریتز^۲ پرداختند. فرزام و حسینی [۱۲] حل سه‌بعدی برای ارتعاش نانو ورق‌های تابعی مدرج را با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی هایپربولیکی ارائه دادند. که تحلیل شبه هندسی خود را با استفاده از تئوری غیر محلی اربینگن^۳ انجام دادند. ژانگ و همکاران [۱۳] ارتعاش آزاد ورق‌های مرکب نسبتاً ضخیم با شرایط مرزی غیریکنواخت انجام دادند. آن‌ها در تحلیل خود میدان‌های جابجایی و چرخش را با استفاده از سری‌های دوگانه سینوسی و کسینوسی بسط دادند و نهایتاً با استفاده از روش ریلی ریتز ضرایب مجهول را یافتند. کیانی [۱۴] ارتعاش آزاد ورق‌های مرکب تقویت شده با نانولوله‌های کربنی مستقر روی تکیه‌گاه‌های متمرکز در یک نقطه را با استفاده از ضرایب لاگرانژ برای شرایط مرزی مختلف مورد بررسی قرار داد. خواص نانولوله‌های به کار رفته در تحلیل او در راستای ضخامت ثابت نبود و همانند مواد تابعی مدرج تغییر می‌کرد. شی و همکاران [۱۵] با استفاده از روش سری‌های فوریه ارتعاش آزاد و اجباری ورق‌های ضخیم مرکب مستقر در بسترهای وینکلر^۴ و پسترناک^۵ را با تئوری برشی مرتبه اول بررسی کردند. آن‌ها برای ارضای شرایط مرزی مختلف از روش‌های مجازی در مرزها کمک گرفتند. نجفی زاده و حیدری [۱۶] کمانش متقارن محوری ورق‌های دایروی ضخیم ساخته شده از مواد هدفمند را بر اساس تئوری برشی مرتبه سوم تحت بارگذاری حرارتی و مکانیکی بررسی کردند. حسینی هاشمی و همکاران [۱۷] تحلیل کمانش و ارتعاش آزاد نانو ورق مستطیلی با استفاده از تئوری غیرمحلی و تغییر شکل برشی مرتبه سوم را با در نظر گرفتن اثرات مقیاس کوچک در کمانش و رفتار ارتعاش عرضی از نوع لوی نانو ورق مستطیلی را به انجام رساندند. همچنین ایشان حل دقیق ارتعاشات آزاد نانو ورق‌های مستطیلی میندلین^۶ را با استفاده از تئوری الاستیسیته غیر محلی مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها فرکانس‌های طبیعی را برای شرایط مرزی لوی^۷ (دو لبه ورق با تکیه‌گاه ساده و بقیه شرایط مرزی دلخواه) مورد بررسی قرار دادند و نتایج حاصله را با نتایج چندین مقاله دیگر مقایسه کردند و در نهایت تأثیر نرخ ضخامت به طول و نرخ طول به عرض را بر روی فرکانس‌های طبیعی مورد بررسی قرار دادند [۱۸].

کان و همکاران [۱۹] تحقیقی بر روی ارتعاش و پاسخ دینامیکی غیرخطی ورق ساندویچی با هسته آگرتیک انجام دادند و تأثیر ابعاد هندسی و تأثیر بارهای مکانیکی بر روی پاسخ دینامیکی و فرکانس طبیعی را بررسی کردند. لایه میانی این ورق ساندویچی از جنس آگرتیک^۸ و با ساختار لانه زنبوری بود. به منظور صحت سنجی، نتایج به دست آمده را با نتایج تجربی پروژه آگلیتی و کابینگهام [۲۰] و نتایج تئوری ژا و شن [۲۱] مقایسه کردند. داک و کانگ [۲۲] نیز تحقیقی با موضوع تحلیل پاسخ دینامیکی و ارتعاش صفحات ساندویچی با هسته آگرتیک انجام دادند. در این مطالعه، هسته آگرتیک با ساختار لانه زنبوری بود و صفحه ساندویچی تحت بار انفجاری قرار گرفت و از روش حل گلکرین برای حل معادلات حاکم بر صفحه استفاده شد. مشاهده شد که تأثیر زاویه سلول آگرتیک بر روی فرکانس طبیعی از هیچ قانون خاصی پیروی نمی‌کند که نشان‌دهنده رفتار پیچیده ورق‌های ساندویچی با هسته آگرتیک است. در مطالعه‌ای دیگر، پاسخ دینامیکی صفحات آگرتیک متصل به صفحات تقویتی تحت نیروی انفجاری توسط زیهائو و همکاران [۲۳] بررسی شد. مشاهده شد که با افزایش پارامترهای هندسی هسته آگرتیک، انحراف و تغییر شکل دینامیکی افزایش یابد و با تقویت ساختار، انحراف دینامیکی ناشی از بار انفجاری تا ۵۹٪ کاهش یافت. تجزیه و تحلیل

¹ Navier Solution Method

² Rayleigh-Ritz Method

³ Eringen Non-local theory

⁴ Winkler Foundation

⁵ Pasternak Foundation

⁶ Mindlin

⁷ Levy boundary condition

⁸ Auxetic

ارتعاش آزاد صفحات ساندویچی دایروی با هسته‌های آگرتیک توسط علیپور و شریعت [۲۴] انجام شد. چهار شرط مرزی مختلف برای صفحه در نظر گرفته شده است. در تحقیق دیگر، حاج محمد و همکاران [۲۵] یک روش عددی جدید و تئوری زیگزگاک^۱ برای تحلیل ورق‌های آگرتیک در محیط حرارتی ارائه دادند. در این مطالعه، ورق ساندویچی سه لایه است که لایه مرکزی از جنس آگرتیک و صفحات تماسی به وسیله نانولوله‌های پلیمر-کربنی تقویت شده‌اند.

پایداری ورق‌ها و سازه‌ها در اثر نیروهای دینال کننده در بسیاری از شاخه‌های مهندسی از قبیل مهندسی هوافضا، عمران، مکانیک، سازه و غیره اهمیت بسیار زیادی یافته است. نیروهای دینال کننده نیروهای غیرپایستاری هستند که بر اساس تغییر شکل سازه جهتشان تغییر می‌کند. فشار آیرودینامیکی ناشی از جریان هوا یک نوع نیروی دینال کننده می‌باشد که معمولاً در سازه‌های هوایی در سرعت‌های بالا پدیدار می‌گردد. به ازای یک مقدار مشخص نیروی دینال کننده سازه ناپایدار می‌گردد و فلاتر^۲ یا واگرایی سازه اتفاق می‌افتد. در مورد اول یعنی فلاتر دامنه‌ی ارتعاشات ورق به صورت پیوسته افزایش می‌یابد و در مورد دوم یعنی واگرایی جابجایی سازه بدون ارتعاش به صورت پیوسته افزایش می‌یابد. پژوهشگران بسیاری، تحقیقات گسترده‌ای را در زمینه‌ی آیروالاستیسیته انجام داده‌اند که در ادامه به برخی از آن‌ها اشاره شده است. سونگ و لی [۲۶] تحلیل ارتعاشات و کنترل فلاتر ورق‌های کامپوزیتی در جریان مافوق صوت را تحقیق کردند. به منظور بررسی کنترل ارتعاشات آن‌ها وصله‌های پیزوالکتریک را در بالا و پایین ورق به عنوان حسگر در نظر گرفتند و اثرات پارامترهای گوناگون را روی آستانه فلاتر بررسی کردند. فرهادی و حسینی هاشمی [۲۷] رفتار آیروالاستیک ورق‌های مرکب چرخان را با استفاده از تئوری میندلین با لحاظ کردن ترم‌های غیرخطی بررسی نمودند. آن‌ها فشار آیرودینامیکی را با تئوری پیستون مرتبه اول مدل کردند و به منظور حذف موج‌های شوک ناشی از چرخش ورق، ورق را داخل پره‌های صلب در نظر گرفتند. کوچک زاده و همکاران [۲۸] آیروالاستیسیته غیر خطی ورق‌های کامپوزیتی را با تئوری ورق کلاسیک تحلیل نمودند. آن‌ها معادلات کوپل دیفرانسیل پاره‌ای حاکم بر حرکت سیستم را با استفاده از روش گلرکین به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل نمودند و نهایت پاسخ را با استفاده از روش‌های عددی انتگرال‌گیری به دست آوردند. فلاح زاده و همکاران [۲۹] تحلیل آیروالاستیک نانو ورق‌های کامپوزیت تابعی مدرج تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی تحت جریان مافوق صوت را انجام دادند. آن‌ها معادلات حاکم را با استفاده از روش‌های باقیمانده وزنی حل نمودند و متغیرهای مؤثر در پایداری سازه را بررسی کردند. ارتعاش ورق‌های تابعی مدرج تحت نیروی آیرودینامیکی توسط پراکش و همکاران [۳۰] با استفاده از روش اجزا محدود انجام شد. آن‌ها اثرات اینرسی‌های دورانی و تغییر شکل‌های برشی را با استفاده از تئوری میندلین در نظر گرفتند و نه تنها اثر غیرخطی هندسه بلکه اثرات غیرخطی نیروی آیرودینامیکی را نیز در معادلات حاکم خود وارد نمودند. جایمن و همکاران [۳۱] به بررسی ناپایداری آیروالاستیک ورق قرار گرفته در مسیر جریان پرداختند. آن‌ها تحلیل خود را یک بار برای سیال تراکم پذیر و بار دیگر برای سیال غیرقابل تراکم انجام دادند همچنین نیروی آیروالاستیک را به صورت جرم افزوده لحاظ کردند و اثرات تراکم‌پذیری سیال را با یک ضریب تصحیح در جرم افزوده وارد کردند. ماهاتو و مایتی [۳۲] تحلیل ورق‌های مرکب هدفمند تحت تأثیر نیروی آیرودینامیکی را در محیط رطوبتی-حرارتی بررسی نمودند و تأثیر پارامترهای درصد رطوبت و تغییرات دمایی را روی آستانه فلاتر تحلیل نمودند. ژاو و همکاران [۳۳] تحلیل آیروترموالاستیک فلاتر ورق در جریان‌های مافوق صوت در شرایط مرزی گوناگون بررسی نمودند. آن‌ها هر بخش از میدان جابجایی را با استفاده از بسط فوریه دوگانه تشکیل دادند و از این طریق شرایط مرزی مختلفی را در تحلیل خود بررسی نمودند. شیتو و ودنیف [۳۴] ناپایداری آیروالاستیک پنل‌های پوسته‌ای را در حالت سه‌بعدی بررسی کردند و فلاتر کوپل مود و تک مودی را برای پنل چهار طرف تکیه‌گاه ساده تحقیق نمودند. ژیا و همکاران [۳۵]، در مورد رفتار ترمومکانیکی پنل‌های تابعی مدرج در جریان مافوق صوت پژوهش کردند. آن‌ها از المان‌های سه‌گه‌ای مثلثی مبتنی بر تئوری میندلین به منظور لحاظ کردن اثرات برشی و همچنین تئوری ون-کارمن^۳ به منظور لحاظ کردن اثرات غیرخطی هندسه استفاده کردند. سون و ژینگ [۳۶]، حل دقیق برای مقادیر ویژه فلاتر پنل دوبعدی کامپوزیتی را تحت تمام شرایط مرزی را با استفاده از تئوری کلاسیک و پیستون مرتبه اول یافتند. کاتسیکادلیس و بابوسکاس [۳۷]، با استفاده

^۱ Zigzag theory

^۲ Flutter

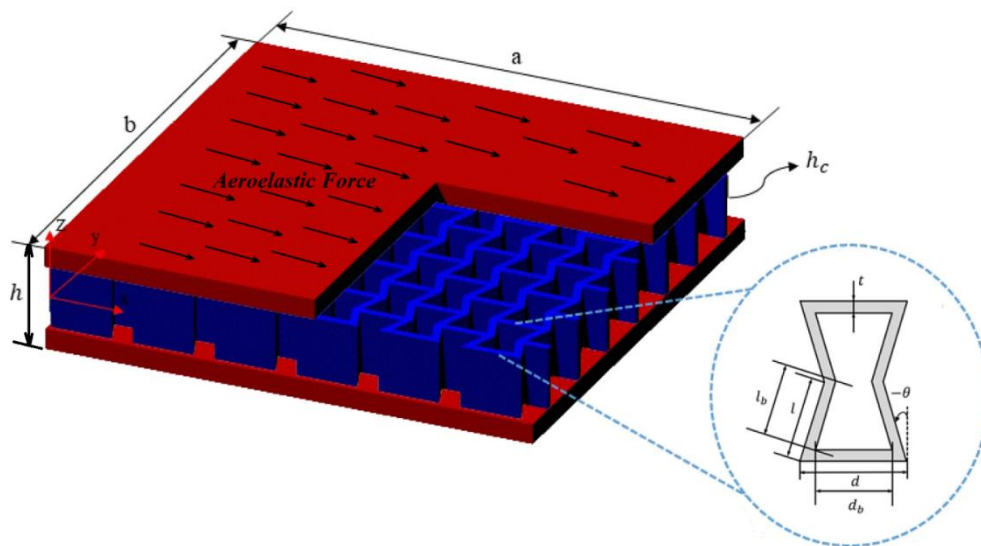
^۳ Von-Karman Theory

از روش المان مرزی ورق‌های ناهمگن ضخیم را با استفاده از تئوری مرتبه اول بررسی کردند و همگرایی بسیار بالایی در روند حل مشاهده کردند و اثرات پارامترهای مختلف از قبیل فرآیند حل و پارامترهای هندسی و نیرویی را روی رفتار دینامیکی سازه تحلیل نمودند.

در این مقاله ارتعاش آزاد ورق ساندویچی سه لایه با هسته آگرتیک تحت نیروی آبروالاستیک بر اساس تئوری تغییر شکل برشی اصلاح‌شده مورد بررسی قرار گرفته است. که در این ورق لایه وسط یا به اصطلاح هسته مرکزی از ساختار آگرتیک و لایه‌های بالایی و پایینی از جنس ماده ایزوتروپیک تشکیل گردیده است و ورق از یک طرف تحت نیروی آبروالاستیک قرار دارد. به منظور کاهش شدت ارتعاش ورق، ورق به وسیله نانولوله‌های کربنی تقویت شده است. جهت تحلیل پایداری و ارتعاش ورق، از تئوری برشی اصلاح‌شده و نیروی آبرودینامیکی وارده از سمت جریان هوا بر روی ورق نیز با به کارگیری تئوری پیستون مرتبه اول مدل‌سازی شده است. با استفاده از اصل همپلتون^۱، معادلات حاکم بر رفتار ارتعاشی ورق ساندویچی به دست آمده است و برای حل معادلات از روش باقیمانده وزنی گلرکین استفاده شده است. برای نشان دادن اعتبار روابط حاصله و روش حل ارائه شده، نتایج این تحقیق با نتایج منتشرشده در مقالات معتبر و نتایج حل عددی با استفاده از روش اجزا محدود به کمک نرم‌افزارهای تجاری مقایسه شده است. نهایتاً تأثیر پارامترهای مختلف مانند ابعاد هندسی ورق ساندویچی، ابعاد هسته آگرتیک، فشار آبرودینامیکی و کسر حجمی نانولوله کربنی بر ارتعاش سیستم مورد بررسی قرار گرفته است.

۲- فرضیات، استخراج معادلات حاکم و روش حل

در این تحقیق ورق ساندویچی مستطیلی به طول a ، عرض b و ضخامت h در نظر گرفته شده است. این ورق دارای سه لایه می‌باشد که لایه بالایی و پایینی از جنس ایزوتروپیک و لایه میانی یا به اصطلاح هسته ورق از جنس آگرتیک با فرض سلول درون رو است. h_c ضخامت هسته آگرتیک فرض شده است. به منظور تقویت لایه‌های بالایی و پایینی و افزایش پایداری ورق، نانولوله‌های کربنی به عنوان تقویت‌کننده در این لایه‌ها در نظر گرفته شده است. این ورق از یک سمت تحت تأثیر نیروی آبروالاستیک با سرعت U_∞ قرار گرفته است. هدف از این تحقیق پیدا کردن معادلات حاکم بر رفتار ارتعاشی این سیستم و به دست آوردن فرکانس‌های طبیعی و شکل موده‌های ورق می‌باشد.



شکل ۱ ورق ساندویچی، ابعاد هندسی و دستگاه مختصات و پارامترهای هندسی سلول درون رو

در شکل (۱)، t و θ به ترتیب ضخامت سلول آگرتیک و زاویه سلول آگرتیک است. d و l نیز طول تیغه‌های سلول هستند. با فرض تئوری برشی اصلاح‌شده مرتبه بالا ورق روابط جابه‌جایی به صورت زیر تعریف می‌شوند [۹-۱].

^۱ Hamilton Principle

$$u_1(x, y, z, t) = u(x, y, t) - g(z) \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial x} + f(z) \xi(x, y, t) \quad (1)$$

$$u_2(x, y, z, t) = v(x, y, t) - g(z) \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial y} + f(z) \psi(x, y, t) \quad (2)$$

$$u_3(x, y, z, t) = w(x, y, t) \quad (3)$$

که $u(x, y, t)$ و $v(x, y, t)$ جابه‌جایی‌های درون صفحه و $w(x, y, t)$ جابه‌جایی عرضی صفحه است؛ $\xi(x, y, t)$ و $\psi(x, y, t)$ نیز به ترتیب زوایای پیچشی حاصل از خمش در صفحه xoz و yoz است. $f(z)$ و $g(z)$ توابع پیوسته هستند که بر اساس تئوری مورد نظر به صورت زیر تعریف می‌شوند [۹-۱].

$$f(z) = z \left(\frac{3}{h} - \frac{4z^2}{h^3} \right) \quad (4)$$

بر اساس میدان جابه‌جایی که در بالا ذکر شد، جابه‌جایی یک نقطه شامل دو جزء است، جزء اول که مطابق با تئوری صفحه کلاسیک است و جزء دوم حاصل از تئوری مرتبه بالا می‌باشد. با فرض روابط کرنش خطی، چنانچه کرنش‌های عمودی (ϵ_{yy}) و (ϵ_{xx}) و کرنش‌های برشی $(\epsilon_{xy}, \epsilon_{yz}, \epsilon_{xz})$ در نظر گرفته شود، میدان کرنش در دستگاه مختصات کارتزین با فرض تغییر شکل‌های کوچک، از طریق روابط زیر به دست می‌آیند [۹-۱].

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + g(z) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(z) \frac{\partial \zeta}{\partial x} \quad (5)$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} + g(z) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + f(z) \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (6)$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + 2g(z) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + f(z) \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) \quad (7)$$

$$\epsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g(z)}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \zeta \frac{\partial f(z)}{\partial z} + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (8)$$

$$\epsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g(z)}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \psi \frac{\partial f(z)}{\partial z} + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (9)$$

$$\epsilon_{zz} = 0 \quad (10)$$

همان‌طور که در قسمت‌های قبلی ذکر شد، ورق از سه لایه تشکیل شده است. برای هر سه صفحه، روابط تنش-کرنش با استفاده از قانون هوک تعمیم‌یافته به صورت زیر تعریف می‌شوند [۹-۱].

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x^t \\ \sigma_y^t \\ \sigma_{xy}^t \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}^t & Q_{12}^t & 0 \\ Q_{21}^t & Q_{22}^t & 0 \\ 0 & 0 & Q_{33}^t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{yz}^t \\ \sigma_{xz}^t \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44}^t & 0 \\ 0 & Q_{55}^t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x^c \\ \sigma_y^c \\ \sigma_{xy}^c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}^c & Q_{12}^c & 0 \\ Q_{21}^c & Q_{22}^c & 0 \\ 0 & 0 & Q_{33}^c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (13)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{yz}^c \\ \sigma_{xz}^c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44}^c & 0 \\ 0 & Q_{55}^c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} \end{Bmatrix} \quad (14)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x^b \\ \sigma_y^b \\ \sigma_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}^b & Q_{12}^b & 0 \\ Q_{21}^b & Q_{22}^b & 0 \\ 0 & 0 & Q_{33}^b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (15)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{yz}^b \\ \sigma_{xz}^b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44}^b & 0 \\ 0 & Q_{55}^b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} \end{Bmatrix} \quad (16)$$

بالانویس‌های t و b مربوط به لایه‌های ایزوتروپیک فوقانی و تحتانی و بالانویس c مربوط به هسته آگرتیک ورق می‌باشند. Q_{ij}

نیز ثوابت الاستیک خطی برای مواد ایزوتروپیک است که به صورت زیر تعریف می‌شوند [۹-۱]:

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E}{1 - \nu^2} \quad (۱۷)$$

$$Q_{12} = Q_{21} = \frac{\nu E}{1 - \nu^2} \quad (۱۸)$$

$$Q_{33} = Q_{44} = Q_{55} = G \quad (۱۹)$$

که E ، G و ν به ترتیب مدول الاستیسیته، مدول برشی و ضریب پواسون ماده ایزوتروپیک است. باید توجه کرد که پس از اعمال نانولوله‌های کربنی روی لایه‌های تحتانی و فوقانی، لایه‌های ایزوتروپیک تبدیل به لایه‌های کامپوزیتی می‌شوند و دو فاز نانولوله‌های کربنی و زمینه (لایه ایزوتروپیک) به وجود می‌آید. برای محاسبه خواص لایه کامپوزیتی روابط زیر تعریف شده است [۱]:

$$E_{11} = \eta_1 V_{CNT} E_{11}^{CNT} + V_m E_m \quad (۲۰)$$

$$\frac{\eta_2}{E_{22}} = \frac{V_{CNT}}{E_{22}^{CNT}} + \frac{V_m}{G_m} \quad (۲۱)$$

$$\frac{\eta_3}{G_{12}} = \frac{V_{CNT}}{G_{12}^{CNT}} + \frac{V_m}{G_m} \quad (۲۲)$$

$$V_{CNT} + V_m = 1 \quad (۲۳)$$

$$\nu = V_{CNT} \nu^{CNT} + V_m \nu^m \quad (۲۴)$$

$$\rho = V_{CNT} \rho^{CNT} + V_m \rho^m \quad (۲۵)$$

که V_{CNT} ، E_{11}^{CNT} ، G_{12}^{CNT} و ν^{CNT} به ترتیب کسر حجمی، مدول الاستیسیته، مدول برشی و ضریب پواسون و چگالی نانولوله‌های کربنی است و η_1 ، η_2 و η_3 پارامترهای مؤثر نانولوله‌های کربنی است. V_m ، E_m ، G_m ، ν^m و ρ^m به ترتیب کسر حجمی، مدول الاستیسیته، مدول برشی و ضریب پواسون و چگالی ماده ایزوتروپیک است. E_{11} ، E_{22} ، G_{12} ، ν و ρ به ترتیب ضرایب الاستیسیته، ضریب حجمی، ضریب پواسون و چگالی لایه ایزوتروپیک پس از اعمال تقویت‌کننده کربنی (لایه کامپوزیتی) است. طبق روابط اصلاح‌شده گیبسون^۱، خواص مؤثر هسته آگرتیک به صورت زیر محاسبه می‌شوند [۱]:

$$E_1^c = E(\eta_3)^3 \frac{\eta_1 - \sin\theta}{\cos^3\theta [1 + (\tan^2\theta + \eta_1 \sec^2\theta)\eta_3^2]} \quad (۲۶)$$

$$E_2^c = E \frac{\eta_3^3}{\cos\theta(\eta_1 - \sin\theta)\tan^2\theta\eta_3^2} \quad (۲۷)$$

$$\nu_{12}^c = -\frac{\sin\theta(1 - \eta_3^2)(\eta_1 - \sin\theta)}{\cos^2\theta [1 + (\tan^2\theta + \eta_1 \sec^2\theta)\eta_3^2]} \quad (۲۸)$$

$$\nu_{21}^c = -\frac{\sin\theta(1 - \eta_3^2)}{(\tan^2\theta + \eta_3^2)(\eta_1 - \sin\theta)} \quad (۲۹)$$

$$G_{12}^c = E \frac{\eta_3^3}{\eta_1(1 + 2\eta_1)\cos\theta} \quad (۳۰)$$

$$G_{13}^c = G \frac{\eta_3 \cos\theta}{2\cos\theta} \left[\frac{\eta_1 - \sin\theta}{1 + 2\eta_1} + \frac{\eta_1 - 2\sin^2\theta}{2(\eta_1 - \sin\theta)} \right] \quad (۳۱)$$

$$G_{23}^c = G \frac{\eta_3 \cos\theta}{\eta_1 - \sin\theta} \quad (۳۲)$$

$$\rho^c = \rho \frac{\eta_3(\eta_1 + 2)}{2\cos\theta(\eta_1 - \sin\theta)} \quad (۳۳)$$

که $\eta_1 = d/l$ و $\eta_3 = t/l$ است. بالانویس c نشان‌دهنده خواص مربوط به هسته آگرتیک است. E_1^c و E_2^c مدول الاستیسیته

¹ Revised Gibson model

لایه آگرتیک، v_{12}^c و v_{21}^c نسبت‌های پواسون لایه آگرتیک، G_{12}^c ، G_{13}^c و G_{23}^c مدوله‌ای حجمی لایه آگرتیک و ρ^c چگالی لایه آگرتیک است. در حالت کلی، انرژی پتانسیل را با استفاده از رابطه زیر محاسبه می‌شود. در این تحقیق به دلیل سه لایه بودن صفحه، برای هر صفحه رابطه انرژی پتانسیل را مطابق زیر نوشته می‌شود [۹-۱].

$$U = \frac{1}{2} \int \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = \frac{1}{2} \int (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + 2\sigma_{xy} \varepsilon_{xy} + 2\sigma_{yz} \varepsilon_{yz} + 2\sigma_{xz} \varepsilon_{xz}) dV \quad (۳۴)$$

با جایگزین کردن معادلات (۱) تا (۳۳) در رابطه (۳۴)، بسط روابط حاصله و مشتق‌گیری و در نظر گرفتن تغییرات جزئی از مؤلفه‌های جابه‌جایی و سپس تبدیل انتگرال حجم به انتگرال روی سطح به رابطه‌ای نهایی برای انرژی پتانسیل حاصل گردیده و این رابطه را برای هر سه لایه بسط داده می‌شود.

$$\begin{aligned} \delta U = \frac{1}{2} \int (N_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + S_{xx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + P_{xx} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + N_{yy} \frac{\partial v}{\partial y} + S_{yy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + P_{yy} \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ + N_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} + N_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} + 2S_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + P_{xy} \frac{\partial \zeta}{\partial y} + P_{xy} \frac{\partial \psi}{\partial x} + T_{xz} \frac{\partial w}{\partial x} + T_{yz} \frac{\partial w}{\partial y} + Q_{xz} \zeta \\ + Q_{yz} \psi) dA \end{aligned} \quad (۳۵)$$

در رابطه (۳۵)، منته‌های تنش برای هر سه لایه به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$N_{xx} = \int_{h_0}^{h_1} \sigma_{xx}^b dz + \int_{h_1}^{h_2} \sigma_{xx}^c dz + \int_{h_2}^{h_3} \sigma_{xx}^t dz \quad (۳۶)$$

$$N_{yy} = \int_{h_0}^{h_1} \sigma_{yy}^b dz + \int_{h_1}^{h_2} \sigma_{yy}^c dz + \int_{h_2}^{h_3} \sigma_{yy}^t dz \quad (۳۷)$$

$$N_{xy} = \int_{h_0}^{h_1} \tau_{xy}^b dz + \int_{h_1}^{h_2} \tau_{xy}^c dz + \int_{h_2}^{h_3} \tau_{xy}^t dz \quad (۳۸)$$

$$S_{xx} = \int_{h_0}^{h_1} g(z) \sigma_{xx}^b dz + \int_{h_1}^{h_2} g(z) \sigma_{xx}^c dz + \int_{h_2}^{h_3} g(z) \sigma_{xx}^t dz \quad (۳۹)$$

$$S_{yy} = \int_{h_0}^{h_1} g(z) \sigma_{yy}^b dz + \int_{h_1}^{h_2} g(z) \sigma_{yy}^c dz + \int_{h_2}^{h_3} g(z) \sigma_{yy}^t dz \quad (۴۰)$$

$$S_{xy} = \int_{h_0}^{h_1} g(z) \tau_{xy}^b dz + \int_{h_1}^{h_2} g(z) \tau_{xy}^c dz + \int_{h_2}^{h_3} g(z) \tau_{xy}^t dz \quad (۴۱)$$

$$P_{xx} = \int_{h_0}^{h_1} f(z) \sigma_{xx}^b dz + \int_{h_1}^{h_2} f(z) \sigma_{xx}^c dz + \int_{h_2}^{h_3} f(z) \sigma_{xx}^t dz \quad (۴۲)$$

$$P_{yy} = \int_{h_0}^{h_1} f(z) \sigma_{yy}^b dz + \int_{h_1}^{h_2} f(z) \sigma_{yy}^c dz + \int_{h_2}^{h_3} f(z) \sigma_{yy}^t dz \quad (۴۳)$$

$$P_{xy} = \int_{h_0}^{h_1} f(z) \tau_{xy}^b dz + \int_{h_1}^{h_2} f(z) \tau_{xy}^c dz + \int_{h_2}^{h_3} f(z) \tau_{xy}^t dz \quad (۴۴)$$

$$Q_{xz} = K_s \left(\int_{h_0}^{h_1} \frac{\partial f(z)}{\partial z} \tau_{xz}^b dz + \int_{h_1}^{h_2} \frac{\partial f(z)}{\partial z} \tau_{xz}^c dz + \int_{h_2}^{h_3} \frac{\partial f(z)}{\partial z} \tau_{xz}^t dz \right) \quad (۴۵)$$

$$Q_{yz} = K_s \left(\int_{h_0}^{h_1} \frac{\partial f(z)}{\partial z} \tau_{yz}^b dz + \int_{h_1}^{h_2} \frac{\partial f(z)}{\partial z} \tau_{yz}^c dz + \int_{h_2}^{h_3} \frac{\partial f(z)}{\partial z} \tau_{yz}^t dz \right) \quad (۴۶)$$

$$T_{xz} = K_s \left(\int_{h_0}^{h_1} \left(\frac{\partial g(z)}{\partial z} + 1 \right) \tau_{xz}^b dz + \right. \quad (۴۷)$$

$$\left. \int_{h_1}^{h_2} \left(\frac{\partial g(z)}{\partial z} + 1 \right) \tau_{xz}^c dz + \int_{h_2}^{h_3} \left(\frac{\partial g(z)}{\partial z} + 1 \right) \tau_{xz}^t dz \right)$$

$$T_{yz} = K_s \left(\int_{h_0}^{h_1} \left(\frac{\partial g(z)}{\partial z} + 1 \right) \tau_{yz}^b dz + \right. \quad (۴۸)$$

$$\left. \int_{h_1}^{h_2} \left(\frac{\partial g(z)}{\partial z} + 1 \right) \tau_{yz}^c dz + \int_{h_2}^{h_3} \left(\frac{\partial g(z)}{\partial z} + 1 \right) \tau_{yz}^t dz \right)$$

که K_s ضریب تصحیح برشی است که برای تئوری‌های برشی مرتبه بالا برابر با ۱ است. h_0 ، h_1 ، h_3 و h_4 مختصات ضخامت لایه‌های ورق است که به‌صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$h_0 = -\frac{h_2}{2} - h_3 \quad (۴۹)$$

$$h_1 = -\frac{h_2}{2} \quad (۵۰)$$

$$h_2 = \frac{h_2}{2} \quad (۵۱)$$

$$h_3 = \frac{h_2}{2} + h_1 \quad (۵۲)$$

که h_1 ، h_2 و h_3 به ترتیب ضخامت لایه تحتانی، لایه میانی و لایه فوقانی است. انرژی جنبشی کل ورق به صورت رابطه زیر نوشته می‌شود و باید این رابطه را برای هر لایه بسط دهیم [۹-۱].

$$T = \frac{1}{2} \int \rho [(\dot{u})^2 + (\dot{v})^2 + (\dot{w})^2] dV \quad (۵۳)$$

که در این رابطه، ρ چگالی هر لایه است. پس از تغییرات گیری و جایگذاری روابط جابه‌جایی (۱) تا (۳) در رابطه (۵۳)، بسط دادن رابطه حاصله و تبدیل انتگرال حجم به انتگرال سطح، رابطه نهایی انرژی جنبشی به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\begin{aligned} \delta T = \frac{1}{2} \int \rho \left[I_1 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + I_1 \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + I_1 \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + I_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} \right)^2 + I_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial y} \right)^2 + I_3 \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} \right)^2 + I_3 \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 \right. \\ \left. + 2I_4 \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} + 2I_4 \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial y} + 2I_6 \frac{\partial \zeta}{\partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} + 2I_6 \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial y} + 2I_5 \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right. \\ \left. + 2I_5 \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial t} \right] dA \quad (۵۴) \end{aligned}$$

که I_k ممان‌های اینرسی هر سه لایه است که از روابط زیر به دست می‌آیند:

$$I_1 = \int_{h_0}^{h_1} \rho dz + \int_{h_1}^{h_2} \rho dz + \int_{h_2}^{h_3} \rho dz \quad (۵۵)$$

$$I_2 = \int_{h_0}^{h_1} \rho g(z)^2 dz + \int_{h_1}^{h_2} \rho g(z)^2 dz + \int_{h_2}^{h_3} \rho g(z)^2 dz \quad (۵۶)$$

$$I_3 = \int_{h_0}^{h_1} \rho f(z)^2 dz + \int_{h_1}^{h_2} \rho f(z)^2 dz + \int_{h_2}^{h_3} \rho f(z)^2 dz \quad (۵۷)$$

$$I_4 = \int_{h_0}^{h_1} \rho g(z) dz + \int_{h_1}^{h_2} \rho g(z) dz + \int_{h_2}^{h_3} \rho g(z) dz \quad (۵۸)$$

$$I_5 = \int_{h_0}^{h_1} \rho f(z) dz + \int_{h_1}^{h_2} \rho f(z) dz + \int_{h_2}^{h_3} \rho f(z) dz \quad (۵۹)$$

$$I_6 = \int_{h_0}^{h_1} \rho f(z) g(z) dz + \int_{h_1}^{h_2} \rho f(z) g(z) dz + \int_{h_2}^{h_3} \rho f(z) g(z) dz \quad (۶۰)$$

نیروهای خارجی اعمال شده روی ورق ساندویچی به صورت نیروی خارجی ناپایستار است. این نیروی همان نیروی آیرودینامیکی می‌باشد و با استفاده از تئوری پیستون مرتبه اول به دست می‌آید. برای شبیه‌سازی رفتار آیرودینامیک، یک تئوری آیرودینامیکی محاسباتی کارآمد برای الگوسازی مطلوب آن ضروری است. بنابراین تئوری پیستون که یک ارتباط ساده بین فشار و تغییر شکل سطح ایجاد می‌کند، انتخاب می‌شود. این تئوری در طول زمان به منظور افزایش دقت تحت تأثیر اصلاحاتی قرار گرفته است و برای ورق (جسم دوبعدی) به صورت رابطه زیر ارائه شده است [۳۸].

$$\Delta p = \frac{2q_a}{\beta} \left(\frac{\partial w(x,y,t)}{\partial x} \cos\theta + \frac{\partial w(x,y,t)}{\partial y} \sin\theta + \frac{1}{U_\infty} \frac{M^2 - 2}{M^2 - 1} \frac{\partial w(x,y,t)}{\partial t} \right) \quad (۶۱)$$

$$\beta = \sqrt{M^2 - 1}, \quad q_a = \rho_\infty U_\infty^2 \quad (۶۲)$$

که θ زاویه جریان با محور x ، M عدد ماخ جریان آبروالاستیک، ρ_∞ چگالی جریان و q_a فشاردینامیکی حاصل از جریان روی ورق می‌باشد. کار انجام شده توسط نیروی آیرودینامیکی بر روی ورق از رابطه زیر به دست می‌آید [۳۸].

$$W = \int (\Delta p w) dA \quad (۶۳)$$

به منظور استفاده از اصل همیلتون، از رابطه کار وریشن گیری^۱ می‌کنیم.

$$\delta W = \int (\Delta p \delta w) dA \quad (۶۴)$$

از اصل همیلتون برای استخراج معادلات حاکم بر صفحه استفاده می‌شود و این اصل به صورت زیر بیان می‌شود [۹-۱].

$$\int_0^t (\delta T + \delta W_e - \delta U) dt = 0 \quad (۶۵)$$

که δ نشان‌دهنده تغییر نسبت به x و y یا به اصطلاح وریشن است. با جایگزین کردن روابط نهایی انرژی پتانسیل و انرژی جنبشی و کار خارجی در اصل همیلتون، معادلات حاکم بر ارتعاش ورق ساندویچی بر حسب مؤلفه‌های جابه‌جایی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$B_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_1 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + B_3 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + A_3 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + B_2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + A_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + E_1 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + E_1 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 2E_3 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + E_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + E_2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} = I_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + I_5 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + I_4 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} \quad (۶۶)$$

$$C_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C_3 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + C_2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} + D_1 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + D_3 \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + D_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + E_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + E_1 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2E_3 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + E_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + E_2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} = I_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + I_5 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + I_4 \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial t^2} \quad (۶۷)$$

$$C_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C_3 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + C_2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} + D_1 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + D_3 \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + D_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + E_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + E_1 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2E_3 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + E_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + E_2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} = I_1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + I_5 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + I_4 \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial t^2} \quad (۶۸)$$

$$B_3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + A_3 \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + B_5 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + A_5 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + B_4 \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} + A_4 \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial y} + C_3 \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + C_5 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + C_4 \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x \partial y^2} + D_3 \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} + D_5 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + D_4 \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + 2E_3 \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + 2E_3 \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + 4E_5 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 2E_4 \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + 2E_4 \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} - F_5 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - F_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - F_4 \frac{\partial \zeta}{\partial y} - F_3 \frac{\partial \zeta}{\partial y} - F_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - F_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - G_5 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2G_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - G_4 \frac{\partial \zeta}{\partial x} - G_4 \frac{\partial \zeta}{\partial x} - G_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \Delta p \quad (۶۹)$$

$$= I_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - I_2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - I_4 \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} - I_4 \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial t^2} - I_6 \frac{\partial^3 \psi}{\partial y \partial t^2} - I_6 \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x \partial t^2} \quad (۷۰)$$

$$B_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + B_4 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + A_4 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + B_6 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + A_6 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + E_2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + E_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 2E_4 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + E_6 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + E_6 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} - G_4 \frac{\partial w}{\partial x} - G_6 \zeta - G_3 \frac{\partial w}{\partial x} \quad (۷۰)$$

$$= I_3 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + I_5 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + I_6 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2}$$

¹ Variation Method

$$\begin{aligned}
 & C_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C_4 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + C_6 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} + D_2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + D_4 \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + D_6 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + E_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + E_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\
 & + 2E_4 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + E_6 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + E_6 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} - F_4 \frac{\partial w}{\partial y} - F_6 \psi - F_3 \frac{\partial w}{\partial y} \\
 & = I_3 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + I_5 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + I_6 \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial t^2}
 \end{aligned} \tag{۷۱}$$

بطوریکه

$$\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\} \tag{۷۲}$$

$$\begin{aligned}
 & = \int_{h_0}^{h_1} Q_{12}^t \{1, f(z), g(z), f(z)g(z), g(z)^2, f(z)^2\} dz \\
 & + \int_{h_1}^{h_2} Q_{12}^c \{1, f(z), g(z), f(z)g(z), g(z)^2, f(z)^2\} dz \\
 & + \int_{h_2}^{h_3} Q_{12}^b \{1, f(z), g(z), f(z)g(z), g(z)^2, f(z)^2\} dz
 \end{aligned}$$

$$\{B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6\} \tag{۷۳}$$

$$\begin{aligned}
 & = \int_{h_0}^{h_1} Q_{11}^t \{1, f(z), g(z), f(z)g(z), g(z)^2, f(z)^2\} dz \\
 & + \int_{h_1}^{h_2} Q_{11}^c \{1, f(z), g(z), f(z)g(z), g(z)^2, f(z)^2\} dz \\
 & + \int_{h_2}^{h_3} Q_{11}^b \{1, f(z), g(z), f(z)g(z), g(z)^2, f(z)^2\} dz
 \end{aligned}$$

$$\{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6\} \tag{۷۴}$$

$$\begin{aligned}
 & = \int_{h_0}^{h_1} Q_{21}^t \{1, f(z), g(z), f(z)g(z), g(z)^2, f(z)^2\} dz \\
 & + \int_{h_1}^{h_2} Q_{21}^c \{1, f(z), g(z), f(z)g(z), g(z)^2, f(z)^2\} dz \\
 & + \int_{h_2}^{h_3} Q_{21}^b \{1, f(z), g(z), f(z)g(z), g(z)^2, f(z)^2\} dz
 \end{aligned}$$

$$\{D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6\} \tag{۷۵}$$

$$\begin{aligned}
 & = \int_{h_0}^{h_1} Q_{22}^t \{1, f(z), g(z), f(z)g(z), g(z)^2, f(z)^2\} dz \\
 & + \int_{h_1}^{h_2} Q_{22}^c \{1, f(z), g(z), f(z)g(z), g(z)^2, f(z)^2\} dz \\
 & + \int_{h_2}^{h_3} Q_{22}^b \{1, f(z), g(z), f(z)g(z), g(z)^2, f(z)^2\} dz
 \end{aligned}$$

$$\{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\} \quad (۷۶)$$

$$= \int_{h_0}^{h_1} Q_{33}^t \{1, f(z), g(z), f(z)g(z), g(z)^2, f(z)^2\} dz$$

$$+ \int_{h_1}^{h_2} Q_{33}^c \{1, f(z), g(z), f(z)g(z), g(z)^2, f(z)^2\} dz$$

$$+ \int_{h_2}^{h_3} Q_{33}^b \{1, f(z), g(z), f(z)g(z), g(z)^2, f(z)^2\} dz$$

$$\{F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6\} \quad (۷۷)$$

$$= \int_{h_0}^{h_1} Q_{44}^t \left\{ 1, \frac{\partial f(z)}{\partial z}, \frac{\partial g(z)}{\partial z}, \frac{\partial f(z)\partial g(z)}{\partial z^2}, \frac{g(z)^2}{\partial z^2}, \frac{f(z)^2}{\partial z^2} \right\} dz$$

$$+ \int_{h_1}^{h_2} Q_{44}^c \left\{ 1, \frac{\partial f(z)}{\partial z}, \frac{\partial g(z)}{\partial z}, \frac{\partial f(z)\partial g(z)}{\partial z^2}, \frac{g(z)^2}{\partial z^2}, \frac{f(z)^2}{\partial z^2} \right\} dz$$

$$+ \int_{h_2}^{h_3} Q_{44}^b \left\{ 1, \frac{\partial f(z)}{\partial z}, \frac{\partial g(z)}{\partial z}, \frac{\partial f(z)\partial g(z)}{\partial z^2}, \frac{g(z)^2}{\partial z^2}, \frac{f(z)^2}{\partial z^2} \right\} dz$$

$$\{G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6\} \quad (۷۸)$$

$$= \int_{h_0}^{h_1} Q_{55}^t \left\{ 1, \frac{\partial f(z)}{\partial z}, \frac{\partial g(z)}{\partial z}, \frac{\partial f(z)\partial g(z)}{\partial z^2}, \frac{g(z)^2}{\partial z^2}, \frac{f(z)^2}{\partial z^2} \right\} dz$$

$$+ \int_{h_1}^{h_2} Q_{55}^c \left\{ 1, \frac{\partial f(z)}{\partial z}, \frac{\partial g(z)}{\partial z}, \frac{\partial f(z)\partial g(z)}{\partial z^2}, \frac{g(z)^2}{\partial z^2}, \frac{f(z)^2}{\partial z^2} \right\} dz$$

$$+ \int_{h_2}^{h_3} Q_{55}^b \left\{ 1, \frac{\partial f(z)}{\partial z}, \frac{\partial g(z)}{\partial z}, \frac{\partial f(z)\partial g(z)}{\partial z^2}, \frac{g(z)^2}{\partial z^2}, \frac{f(z)^2}{\partial z^2} \right\} dz$$

برای تحلیل شرایط مرزی حل دقیقی در دسترس نمی‌باشد لذا جهت تحلیل این موارد از روش‌های عددی استفاده می‌شود. در این بخش تحلیل پایداری و رفتار ارتعاشی صفحه ساندویچی با هسته آگزیوتیک تحت نیروی آیرودینامیکی با استفاده از روش گلرکین ارائه شده است. با توجه به فرض حرکت هارمونیک پاسخ به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$u(x,y,t) = \tilde{u}(x,y)e^{i\omega t} \quad (۷۹)$$

$$v(x,y,t) = \tilde{v}(x,y)e^{i\omega t} \quad (۸۰)$$

$$w(x,y,t) = \tilde{w}(x,y)e^{i\omega t} \quad (۸۱)$$

$$\zeta(x,y,t) = \tilde{\zeta}(x,y)e^{i\omega t} \quad (۸۲)$$

$$\psi(x,y,t) = \tilde{\psi}(x,y)e^{i\omega t} \quad (۸۳)$$

اکنون می‌بایستی مقدار باقیمانده را مینیمم کرد. بدین منظور معادلات (۶۶) تا (۷۱) را در تابع وزن ضرب کرده و روی سطح انتگرال گرفته می‌شود.

$$\int_A \left(B_1 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + A_1 \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x \partial y} + B_3 \frac{\partial^3 \tilde{w}}{\partial x^3} + A_3 \frac{\partial^3 \tilde{w}}{\partial x \partial y^2} + B_2 \frac{\partial^2 \tilde{\zeta}}{\partial x^2} + A_2 \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial x \partial y} + E_1 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} + E_1 \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x \partial y} \right. \\ \left. + 2E_3 \frac{\partial^3 \tilde{w}}{\partial x \partial y^2} + E_2 \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial x \partial y} + E_2 \frac{\partial^2 \tilde{\zeta}}{\partial y^2} + \omega^2 \left(I_1 \tilde{u} + I_5 \tilde{\zeta} + I_4 \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} \right) \right) \chi_1 dx dy = 0 \quad (۸۴)$$

$$\int_A (C_1 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x \partial y} + C_3 \frac{\partial^3 \tilde{w}}{\partial x^2 \partial y} + C_2 \frac{\partial^2 \tilde{\zeta}}{\partial x \partial y} + D_1 \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial y^2} + D_3 \frac{\partial^3 \tilde{w}}{\partial y^3} + D_2 \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial y^2} + E_1 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x \partial y} + E_1 \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2} + 2E_3 \frac{\partial^3 \tilde{w}}{\partial x^2 \partial y} + E_2 \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial x^2} + E_2 \frac{\partial^2 \tilde{\zeta}}{\partial x \partial y} + \omega^2 (I_1 \tilde{v} + I_5 \tilde{\psi} + I_4 \frac{\partial \tilde{w}}{\partial y})) \chi_2 dx dy = 0 \quad (۸۵)$$

$$\int_A (B_3 \frac{\partial^3 \tilde{u}}{\partial x^3} + A_3 \frac{\partial^3 \tilde{v}}{\partial x^2 \partial y} + B_5 \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial x^4} + A_5 \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial x^2 \partial y^2} + B_4 \frac{\partial^3 \tilde{\zeta}}{\partial x^3} + A_4 \frac{\partial^3 \tilde{\psi}}{\partial x^2 \partial y} + C_3 \frac{\partial^3 \tilde{u}}{\partial x^2 \partial y^2} + C_5 \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial x^2 \partial y^2} + C_4 \frac{\partial^3 \tilde{\zeta}}{\partial x \partial y^2} + D_3 \frac{\partial^3 \tilde{v}}{\partial y^3} + D_5 \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial x^4} + D_4 \frac{\partial^3 \tilde{\psi}}{\partial y^3} + 2E_3 \frac{\partial^3 \tilde{u}}{\partial x \partial y^2} + 2E_3 \frac{\partial^3 \tilde{v}}{\partial x^2 \partial y} + 4E_5 \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial x^2 \partial y^2} + 2E_4 \frac{\partial^3 \tilde{u}}{\partial x \partial y^2} + 2E_4 \frac{\partial^3 \tilde{v}}{\partial x^2 \partial y} - F_5 \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x \partial y} - F_2 \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x \partial y} - F_4 \frac{\partial \tilde{\zeta}}{\partial y} - F_3 \frac{\partial \tilde{\zeta}}{\partial y} - F_2 \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x \partial y} - F_1 \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x \partial y} - G_5 \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x^2} - 2G_2 \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x^2} - G_4 \frac{\partial \tilde{\zeta}}{\partial x} - G_4 \frac{\partial \tilde{\zeta}}{\partial x} - G_1 \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x^2} - \Delta \tilde{p} + \omega^2 (I_1 \tilde{w} - I_2 \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial x^2 \partial y^2} - I_4 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} - I_4 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} - I_6 \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial y} - I_6 \frac{\partial \tilde{\zeta}}{\partial x})) \chi_3 dx dy = 0 \quad (۸۶)$$

$$\int_A (B_2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + A_2 \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x \partial y} + B_4 \frac{\partial^3 \tilde{w}}{\partial x^3} + A_4 \frac{\partial^3 \tilde{w}}{\partial x \partial y^2} + B_6 \frac{\partial^2 \tilde{\zeta}}{\partial x^2} + A_6 \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial x \partial y} + E_2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} + E_2 \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x \partial y} + 2E_4 \frac{\partial^3 \tilde{w}}{\partial x^2 \partial y} + E_6 \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial x^2} + E_6 \frac{\partial^2 \tilde{\zeta}}{\partial x \partial y} - G_4 \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} - G_6 \tilde{\zeta} - G_3 \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} + \omega^2 (I_3 \tilde{\zeta} + I_5 \tilde{u} + I_6 \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x})) \chi_4 dx dy = 0 \quad (۸۷)$$

$$\int_A (C_2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x \partial y} + C_4 \frac{\partial^3 \tilde{w}}{\partial x^2 \partial y} + C_6 \frac{\partial^2 \tilde{\zeta}}{\partial x \partial y} + D_2 \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial y^2} + D_4 \frac{\partial^3 \tilde{w}}{\partial y^3} + D_6 \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial y^2} + E_2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x \partial y} + E_2 \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2} + 2E_4 \frac{\partial^3 \tilde{w}}{\partial x^2 \partial y} + E_6 \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial x^2} + E_6 \frac{\partial^2 \tilde{\zeta}}{\partial x \partial y} - F_4 \frac{\partial \tilde{w}}{\partial y} - F_6 \tilde{\psi} - F_3 \frac{\partial \tilde{w}}{\partial y} + \omega^2 (I_3 \tilde{\psi} + I_5 \tilde{v} + I_6 \frac{\partial \tilde{w}}{\partial y})) \chi_5 dx dy = 0 \quad (۸۸)$$

که در رابطه (۸۶) داریم

$$\Delta \tilde{p} = \frac{2q_a}{\beta} \left(\frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} \cos \Theta + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial y} \sin \Theta \right) \quad (۸۹)$$

در روابط به دست آمده χ_i ها توابع وزن دار مورد استفاده در دامنه حل مسئله می‌باشند. توابع تقریب $\tilde{w}(x,y)$ ، $\tilde{v}(x,y)$ ، $\tilde{u}(x,y)$ و $\tilde{\zeta}(x,y)$ ، $\tilde{\psi}(x,y)$ و $\tilde{\phi}(x,y)$ به صورت رابطه (۵۹) در نظر گرفته می‌شوند.

$$\tilde{u}(x,y) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M u_{m,n} \bar{\bar{u}}(x,y) \quad (۹۰)$$

$$\tilde{v}(x,y) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M v_{m,n} \bar{\bar{v}}(x,y) \quad (۹۱)$$

$$\tilde{w}(x,y) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M w_{m,n} \bar{\bar{w}}(x,y) \quad (۹۲)$$

$$\tilde{\psi}(x,y) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \psi_{m,n} \bar{\bar{\psi}}(x,y) \quad (۹۳)$$

$$\bar{\zeta}(x,y) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \zeta_{m,n} \bar{\zeta}(x,y) \quad (94)$$

در رابطه‌ی فوق $\zeta_{m,n}$ ، $\psi_{m,n}$ ، $w_{m,n}$ ، $v_{m,n}$ ، $u_{m,n}$ ثوابت مجهول هستند که پس از مینیمم کردن خطا حاصل می‌شوند؛ $\bar{u}(x,y)$ ، $\bar{v}(x,y)$ ، $\bar{w}(x,y)$ ، $\bar{\psi}(x,y)$ ، $\bar{\zeta}(x,y)$ توابع سعی می‌باشند که باید حداقل شرایط مرزی ضروری را ارضا نمایند با توجه به اینکه ورق ساندویچی در دو حالت تکیه‌گاه ساده و تکیه‌گاه گیردار بررسی می‌شود، توابع سعی (۹۵) و (۹۶) بکار برده می‌شود. توابع سعی باید حداقل شرایط مرزی ضروری (هندسی) را ارضا نمایند. با توجه به اینکه ورق ساندویچی مذکور در دو حالت چهار طرف تکیه‌گاه ساده و چهار طرف تکیه‌گاه گیردار در نظر گرفته شده است، توابع سعی به صورت زیر تعریف می‌شوند.

تکیه‌گاه چهار طرف ساده

$$\begin{cases} \bar{u}(x,y) = \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ \bar{v}(x,y) = \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ \bar{w}(x,y) = \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ \bar{\psi}(x,y) = \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ \bar{\zeta}(x,y) = \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \end{cases} \quad (95)$$

تکیه‌گاه چهارطرف گیردار

$$\begin{cases} \bar{u}(x,y) = \sin\left(\frac{2m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ \bar{v}(x,y) = \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{2n\pi y}{b}\right) \\ \bar{w}(x,y) = \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ \bar{\psi}(x,y) = \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{2n\pi y}{b}\right) \\ \bar{\zeta}(x,y) = \sin\left(\frac{2m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \end{cases} \quad (96)$$

معادلات حاصل در فرم ماتریسی به صورت رابطه (۶۲) نوشته می‌شود.

$$\bar{M}\bar{Q} + \bar{K}Q = 0 \quad (97)$$

در رابطه‌ی فوق \bar{M} ماتریس جرم و \bar{K} ماتریس سختی سیستم می‌باشند و Q بردار مودال یا ضرایب مجهول توابع سعی ورق ساندویچی است که به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\bar{M} = \begin{bmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} & \dots & M_{1,5MN-1} & M_{1,5MN} \\ M_{2,1} & M_{2,2} & \dots & M_{2,5MN-1} & M_{2,5MN} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ M_{5MN-1,1} & M_{5MN-1,2} & \dots & M_{5MN-1,5MN-1} & M_{5MN-1,5MN} \\ M_{5MN,1} & M_{5MN,2} & \dots & M_{5MN,5MN-1} & M_{5MN,5MN} \end{bmatrix} \quad (98)$$

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} K_{1,1} & K_{1,2} & \dots & K_{1,5MN-1} & K_{1,5MN} \\ K_{2,1} & K_{2,2} & \dots & K_{2,5MN-1} & K_{2,5MN} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ K_{5MN-1,1} & K_{5MN-1,2} & \dots & K_{5MN-1,5MN-1} & K_{5MN-1,5MN} \\ K_{5MN,1} & K_{5MN,2} & \dots & K_{5MN,5MN-1} & K_{5MN,5MN} \end{bmatrix} \quad (99)$$

$$Q_1 = [u_{1,1}u_{1,2} \dots u_{1,MN} u_{2,1}u_{2,2} \dots u_{2,MN} \dots u_{MN,MN}] \quad (100)$$

$$Q_2 = [v_{1,1}v_{1,2} \dots v_{1,MN} v_{2,1}v_{2,2} \dots v_{2,MN} \dots v_{MN,MN}] \quad (101)$$

$$Q_3 = [w_{1,1}w_{1,2} \dots w_{1,MN} w_{2,1}w_{2,2} \dots w_{2,MN} \dots w_{MN,MN}] \quad (102)$$

$$Q_4 = [\zeta_{1,1}\zeta_{1,2} \dots \zeta_{1,MN}\zeta_{2,1}\zeta_{2,2}\dots\zeta_{2,MN}\dots\zeta_{MN,MN}] \quad (103)$$

$$Q_5 = [\psi_{1,1}\psi_{1,2} \dots \psi_{1,MN}\psi_{2,1}\psi_{2,2}\dots\psi_{2,MN}\dots\psi_{MN,MN}] \quad (104)$$

$$Q = [Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3 \quad Q_4 \quad Q_5]^T$$

۳- تحلیل نتایج عددی

در این بخش، نتایج عددی رفتار ارتعاشی ورق ساندویچی سه لایه با هسته آگرتیک تحت نیروی آبروالاستیک و با تقویت‌کننده‌های کربنی به روش گلرکین برای شرایط مرزی چهار طرف تکیه‌گاه ساده و گیردار با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی اصلاح‌شده ارائه شده است. به دلیل اینکه تاکنون تحقیقی با این موضوع انجام نشده است، مرجعی برای اعتبار سنجی نتایج در دسترس نمی‌باشد. به منظور اعتبار سنجی و صحت سنجی نتایج، ابتدا ارتعاش آزاد ورق تک لایه ایزوتروپیک بررسی شده است و نتایج به دست آمده با مراجع معتبر صحت سنجی شده است. سپس ورق ساندویچی سه لایه با نرم افزار آباکوس^۱ مدل سازی گردیده و فرکانس‌های طبیعی حاصله مقایسه شده است. در نهایت، و تأثیر پارامترهای مختلف را بر ارتعاش آزاد ورق سه لایه با اعمال تقویت‌کننده کربنی مورد مطالعه قرار گرفته است. خواص ماده ایزوتروپیک و خواص ساختار آگرتیک که جهت به دست آوردن نتایج عددی استفاده شده است به ترتیب در جداول (۱) و (۲) ارائه گردیده است.

جدول ۱ خواص ماده ایزوتروپیک

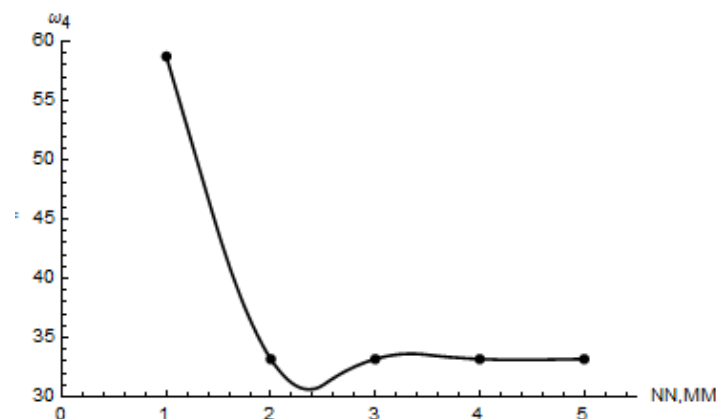
$h_b(m)$	$E(Gpa)$	ν	$\rho(kg/m^3)$
۰/۰۰۵	۶۹	۰/۳	۲۷۰۰

جدول ۲ خواص ماده آگرتیک.

$h_c(m)$	η_1	η_3	ν_c	$\theta (degree)$
۰/۰۹	۲	۰/۰۱	۰/۳	-۳۰

طول و عرض ورق نیز برابر با ۱ متر است و ارتفاع ورق مجموع ارتفاع سه لایه $h = 2h_b + h_c$ است. اعتبارسنجی در سه قسمت انجام شده است؛ ابتدا نتایج حاصل از ارتعاش آزاد ورق تک لایه ایزوتروپیک، سپس نتایج حاصل از ارتعاش آزاد ورق ساندویچی سه لایه با نتایج حل تحلیلی و نهایتاً نتایج حاصل از ورق ایزوتروپیک تحت نیروی آبروالاستیک با مراجع معتبر مقایسه شده‌اند.

به منظور تعیین تعداد جملات بکار رفته در تابع تقریب روش گلرکین از آزمون همگرایی استفاده شده است. آزمون همگرایی در شکل (۱) ارائه شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، به ازای $N=M=3$ پاسخ همگرا می‌شود به همین دلیل در تمامی بخش‌های مربوط به پایداری، محاسبات بر مبنای همین $N=M=3$ انجام شده است.



شکل ۱ رفتار همگرایی ارتعاش طبیعی ورق ساندویچی سه لایه با هسته آگرتیک.

¹ Abaqus software

جدول ۳ فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد ورق ایزوتروپیک.

فرکانس ۴	فرکانس ۳	فرکانس ۲	فرکانس ۱	روش
۶۹/۸۱۰۷	۴۵/۴۸۹۲	۴۵/۴۸۷	۱۹/۰۶۵۳	[۳۸]
۶۹/۸۰۹۳	۴۵/۵۸۴۵	۴۵/۵۸۴۵	۱۹/۰۸۴	[۳۹]
۶۹/۸۹۱۳	۴۵/۵۲۱۳	۴۵/۴۹۵۵	۱۹/۰۶۸۹	کار حاضر، تئوری مرتبه بالای اصلاح‌شده

در جدول (۳) فرکانس طبیعی بی‌بعد $\bar{\omega} = \omega \frac{a}{h} \sqrt{12\rho(1 - \nu_c^2)/E_c}$ برای ورق تک لایه ایزوتروپیک به طول ۱ متر و ضخامت ۰/۱ متر تحت شرایط مرزی چهار طرف تکیه‌گاه ساده با نتایج موجود در دو مرجع مختلف که یکی بر پایه‌ی تئوری ردی و دیگری بر پایه‌ی تئوری میندلین می‌باشد، مقایسه گردیده است.

در جدول (۴)، مقایسه فرکانس‌های طبیعی ورق ساندویچی سه لایه با هسته آگرتیک به طول ۱ متر و ضخامت ۰/۰۱ متر در شرایط مرزی تماماً ساده که به صورت عددی محاسبه شده‌اند با نتایج تحلیلی ارائه شده است.

جدول ۴ فرکانس‌های طبیعی ورق ساندویچی سه لایه با هسته آگرتیک.

فرکانس ۳	فرکانس ۲	فرکانس ۱	کار حاضر
۶۴/۶۱۵۶	۵۵/۴۷۴۶	۲۳/۷۴۶۸	آباکوس
۶۳/۶۶۷	۵۳/۳۴۹	۲۳/۳۲۲	

با مقایسه‌ی نتایج حاصل از تحقیق حاضر با نتایج به‌دست‌آمده از مراجع مختلف مشاهده می‌شود که نتایج حاصله از دقت بالایی برخوردار می‌باشد.

۳-۱- تأثیر شرایط مرزی بر فرکانس‌های سیستم

در این بخش، فرکانس طبیعی بی‌بعد ورق ساندویچی سه لایه با هسته آگرتیک را در شرایط مرزی ساده و گیردار به دست می‌آوریم. نسبت ضخامت این ورق برابر با $h/a = 0.9$ است. نتایج در جدول (۵) ارائه شده است. با مقایسه نتایج ارائه شده در جدول (۵) برای شرایط هندسی یکسان مشاهده می‌شود که در شرایط مرزی تماماً گیردار استحکام ورق افزایش می‌یابد و متعاقباً فرکانس طبیعی ورق افزایش می‌یابد. در واقع شرط مرزی گیردار قیدی را روی لبه‌های ورق ساندویچی ایجاد می‌کند که باعث افزایش سفتی آن می‌شود و همین امر باعث می‌شود فرکانس‌های ورق ساندویچی گیردار از ورق ساندویچی تکیه‌گاه ساده بیشتر باشد.

جدول ۵ فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد ورق ساندویچی سه لایه با هسته آگرتیک.

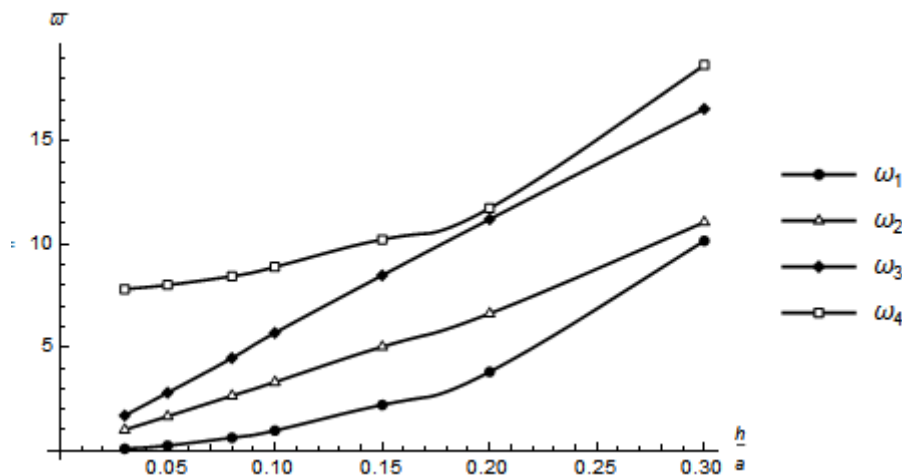
فرکانس ۴	فرکانس ۳	فرکانس ۲	فرکانس ۱	شرایط مرزی
۸۸/۹۶۹۹	۵۶/۰۴۵۳	۳۳/۱۹۸۵	۹/۷۰۸۵	تکیه‌گاه ساده
۱۱۷/۶۴۸	۱۰۴/۲۰۷	۶۴/۰۲۲۹	۱۸/۷۵۴۶	تکیه‌گاه گیردار

۳-۲- تأثیر ضخامت ورق بر فرکانس‌های سیستم

در جدول (۶) چهار فرکانس اول ورق ساندویچی مربعی با هسته آگرتیک با شرایط مرزی کاملاً ساده ارائه شده است. در این جدول، با افزایش نسبت h/a در طول ثابت، ضخامت آن افزایش می‌یابد و باعث می‌شود که سفتی و استحکام سازه افزایش یابد و متعاقباً فرکانس‌های طبیعی آن بیشتر می‌شود. به‌منظور تفسیر راحت‌تر فرکانس اول این جداول، شکل (۲) برحسب ضخامت ورق ترسیم گردیده است.

جدول ۶ تغییرات فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد ورق ساندویچی با شرایط مرزی تماماً ساده در برابر ضخامت

فرکانس ۴	فرکانس ۳	فرکانس ۲	فرکانس ۱	h/a
۷/۸۲۵۶	۱/۶۹۸۳	۱/۰۰۶۰	۰/۰۸۹	۰/۰۳
۸/۰۲۲۶	۲/۸۰۲۲	۱/۶۵۹۹	۰/۲۴۲۵	۰/۰۵
۸/۵۸۸۷	۴/۴۸۳۶	۲/۶۵۵۸	۰/۶۲۲۴	۰/۰۸
۸/۸۹۶۹	۵/۶۰۴۵	۳/۳۱۹۸	۰/۹۷۰۸	۰/۱
۱۰/۲۲۹۱	۸/۴۹۱۷	۵/۰۳۰۰	۲/۲۱۲۸	۰/۱۵
۱۱/۷۴۶	۱۱/۲۰۹۱	۶/۶۳۹۷	۳/۸۱۶۳	۰/۲
۱۸/۶۸۱۸	۱۶/۵۵۴۳	۱۱/۰۶۶۲	۱۰/۱۶۵۶	۰/۳



شکل ۲ تغییرات فرکانس‌های بی‌بعد ورق ساندویچی با شرایط مرزی کاملاً ساده در برابر ضخامت

۳-۳- تأثیر تقویت‌کننده‌های کربنی بر فرکانس‌های سیستم

در این بخش، تقویت‌کننده‌های کربنی روی صفحات بالایی و پایینی ورق ساندویچی اعمال می‌شود. خواص تقویت‌کننده کربنی در جدول (۸) ارائه شده است.

جدول ۷ خواص تقویت‌کننده‌های کربنی.

η_3	η_2	η_1	$V_{CNT}(\%)$	$\rho (kg/m^3)$	$G (Gpa)$	ν	$E_{22} (Gpa)$	$E_{11} (Gpa)$
۱/۰۵۵۶	۱/۰۵۵۶	۱/۲۸۳۳	۱۲	۱۴۰۰	۱۷/۲	۰/۱۹	۱۰	۶۰۰

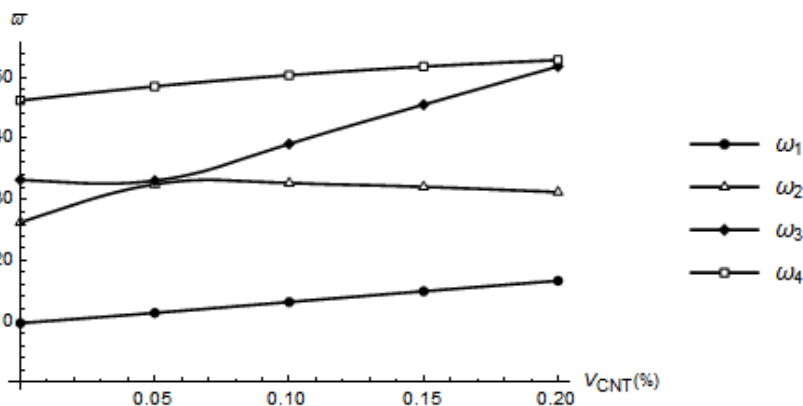
در جدول (۸) فرکانس‌های طبیعی ورق ساندویچی با اعمال تقویت‌کننده‌های کربنی در شرایط تماماً ساده و تماماً گیردار ارائه شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، پس از اعمال تقویت‌کننده‌ها، ورق سخت‌تر می‌شود و استحکام ورق افزایش می‌یابد، به همین دلیل مقادیر فرکانس افزایش یافته است. در جدول (۹) مقادیر فرکانس طبیعی ورق ساندویچی برای درصد‌های مختلف کسر حجمی تقویت‌کننده ارائه شده است. با افزایش مقدار کسر حجمی تقویت‌کننده (V_{CNT})، ورق سخت‌تر می‌شود و فرکانس طبیعی افزایش می‌یابد. به‌منظور درک بهتر، نتایج در شکل (۳) به‌صورت نمودار ارائه شده است.

جدول ۸ فرکانس‌های طبیعی ورق ساندویچی با اعمال تقویت‌کننده‌های کربنی در شرایط ساده و گیردار

شرایط مرزی	فرکانس ۱	فرکانس ۲	فرکانس ۳	فرکانس ۴
تکیه‌گاه ساده	۱۳/۸۷۶۶	۳۳/۴۵۷۲	۸۱/۷۲۴	۱۰۵/۲۸۲
تکیه‌گاه گیردار	۲۶/۸۰۷۵	۶۴/۶۸۷۴	۱۲۹/۳۴۲	۱۵۴/۲۳۴

جدول ۹ فرکانس‌های طبیعی ورق ساندویچی با اعمال تقویت‌کننده‌های کربنی در شرایط ساده و گیردار

فرکانس ۴	فرکانس ۳	فرکانس ۲	فرکانس ۱	درصد حجمی تقویت‌کننده کربنی (V_{CNT})
۴۶/۲۱۵۷	۳۳/۱۹۸۵	۲۶/۲۳۵۱	۹/۷۰۸۵	۰٪
۴۸/۵۱۹۷	۳۳/۰۶۷۲	۳۲/۴۶۱۴	۱۱/۳۷۹۹	۵٪
۵۰/۳۵۰۳	۳۹/۰۷۸۱	۳۲/۶۸۴۹	۱۳/۱۶۷۸	۱۰٪
۵۱/۷۶۵۵	۴۵/۵۲۴۷	۳۲/۰۴۴۶	۱۴/۹۲۹۷	۱۵٪
۵۲/۸۴۰۵	۵۱/۷۹۱۴	۳۱/۱۸۹۵	۱۶/۶۵۱۷	۲۰٪



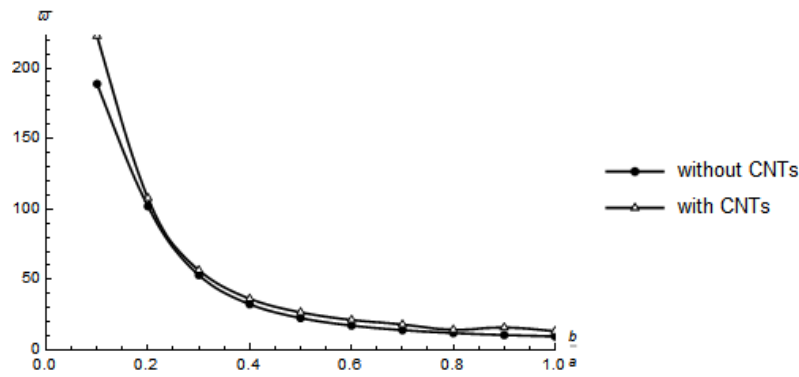
شکل ۳ تأثیر کسر حجمی تقویت‌کننده بر فرکانس طبیعی ورق ساندویچی در شرایط تماماً ساده

۳-۴ - تأثیر نسبت عرض به طول ورق بر فرکانس‌های سیستم

در جدول (۱۰) تغییرات فرکانس اول ورق ساندویچی مربعی با شرایط مرزی کاملاً ساده در برابر نسبت عرض به طول ورق در دو حالت اعمال تقویت‌کننده کربنی و بدون اعمال تقویت‌کننده کربنی نشان داده شده است. مطابق این جدول با افزایش نسبت عرض به طول ورق، فرکانس‌های طبیعی سیستم کاهش پیدا می‌کند. از آنجایی که ورق مورد تحلیل در این بخش دارای تکیه‌گاه چهار طرف ساده می‌باشد، با کاهش عرض ورق در طول ثابت درجه آزادی ورق کاهش می‌یابد که این امر سبب افزایش سفتی و در نتیجه باعث افزایش فرکانس‌های طبیعی سیستم می‌باشد. مطابق شکل (۴) نرخ این افزایش فرکانس در نسبت‌های بالای عرض به طول آهسته می‌باشد و در نسبت‌های پایین‌تر این افزایش فرکانس شیب تندتری به خود می‌گیرد. این شکل تغییرات فرکانس ورق ساندویچی را بر حسب نسبت عرض به طول به ازای اعمال تقویت‌کننده کربنی و بدون تقویت‌کننده کربنی نشان می‌دهد.

جدول ۱۰ تغییرات فرکانس طبیعی ورق ساندویچی با تکیه‌گاه تماماً ساده در برابر نسبت عرض به طول

بدون اعمال CNT	با اعمال CNT	b/a
۱۸۸/۷۸۵	۲۲۲/۷۶۲	۰/۱
۵۳/۲۱۶۸	۵۶/۶۴۷۱	۰/۳
۲۲/۷۵۶۶	۲۶/۷۹۰۳	۰/۵
۱۴/۱۹۶۳	۱۸/۱۶۲۱	۰/۷
۱۰/۷۰۸۹	۱۴/۵۰۰۲	۰/۹
۹/۷۰۸۵	۱۳/۴۲۳۲	۱



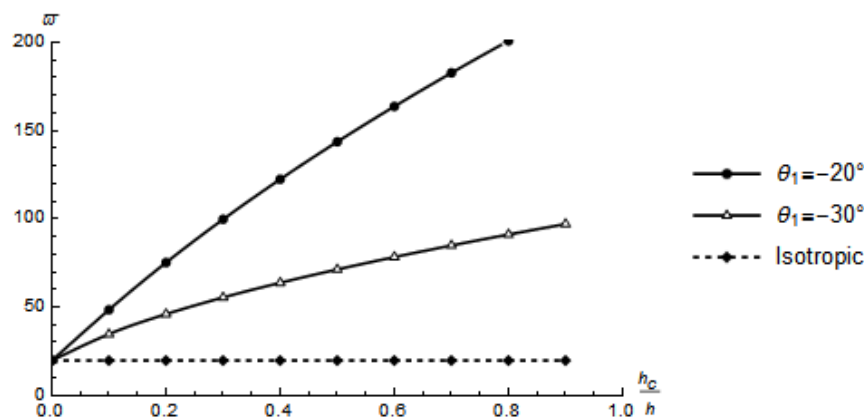
شکل ۴ تغییرات فرکانس اول بی‌بعد ورق ساندویچی با تکیه‌گاه تماماً ساده در برابر نسبت عرض به طول با اعمال تقویت‌کننده کربنی و بدون اعمال تقویت‌کننده کربنی.

۳-۵- تأثیر ضخامت لایه آگزیٹیک بر فرکانس‌های سیستم

در جدول (۱۱) تغییرات فرکانس اول ورق ساندویچی در برابر تغییرات ضخامت لایه آگزیٹیک برای دو زاویه مختلف سلول آگزیٹیک در شرایط تماماً ساده ارائه شده است. به‌منظور درک بهتر، نتایج در شکل (۵) به‌صورت نمودار ارائه شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، با افزایش ضخامت لایه آگزیٹیک استحکام ورق ساندویچی بیشتر می‌شود و ورق سخت‌تر می‌شود به همین دلیل فرکانس طبیعی افزایش پیدا کرده است. از مقایسه دو زاویه سلول آگزیٹیک می‌توان دریافت که هرچه زاویه منفی سلول آگزیٹیک کمتر باشد، مقدار فرکانس طبیعی بیشتر است.

جدول ۱۱ تغییرات فرکانس اول ورق ساندویچی در برابر ضخامت لایه آگزیٹیک و زاویه سلول آگزیٹیک.

$\theta = -30$	$\theta = -20$	h_c/h
۱۹/۷۳۷۸	۱۹/۷۳۷۸	.
۳۴/۶۸۷۵	۴۸/۴۹۷۲	۰/۱
۴۶/۰۲۴۱	۷۵/۲۵۶۷	۰/۲
۵۵/۴۶۸۸	۹۹/۷۷۳۸	۰/۳
۶۳/۷۸۹۲	۱۲۲/۴۸۲	۰/۴
۷۱/۳۵۰۵	۱۴۳/۷۲۷	۰/۵
۷۸/۳۵۳۵	۱۶۳/۷۶۲	۰/۶
۸۴/۹۲۷۲	۱۸۲/۷۷۶	۰/۷
۹۱/۱۵۱۱	۲۰۰/۹۱۶	۰/۸
۹۷/۰۸۵۲	۲۱۸/۲۹۶	۰/۹



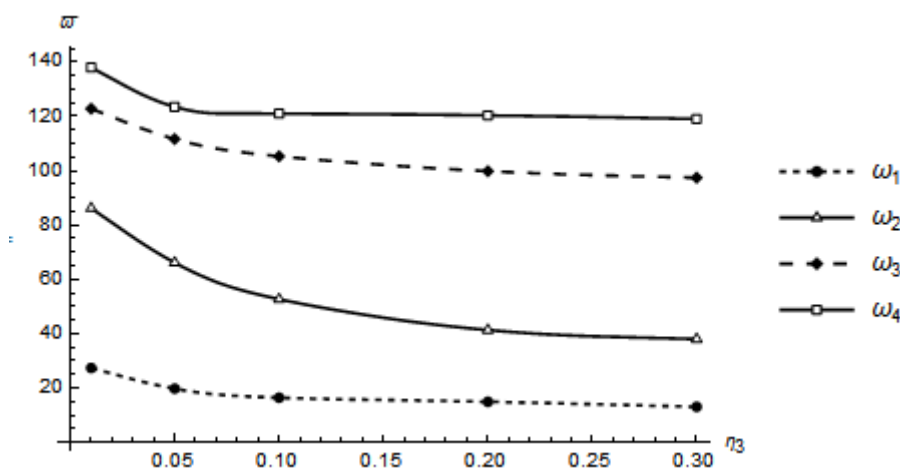
شکل ۵ تغییرات فرکانس اول ورق ساندویچی در برابر تغییرات ضخامت لایه آگزیٹیک.

۳-۶- تأثیر پارامتر هندسی سلول آگزتیک بر فرکانس‌های سیستم

در جدول (۱۲) تأثیر پارامتر هندسی سلول آگزتیک بر فرکانس‌های طبیعی سیستم ارائه شده است. همان‌طور که اشاره شد، $\eta_3 = t/l$ یعنی نسبت ضخامت هسته آگزتیک به طول دندان آن. با افزایش مقدار η_3 فرکانس‌های طبیعی کاهش می‌یابد. به عبارت دیگر، با فرض ثابت بودن طول دندان سلول، هرچه ضخامت سلول آگزتیک بیشتر شود فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد. به منظور درک بهتر نتایج، شکل (۶) ارائه شده است. همان‌طور که در شکل (۶) دیده می‌شود، برای مقادیر η_3 کمتر از ۰/۱ روند کاهش فرکانس طبیعی شیب تندتری دارد.

جدول ۱۲ تغییرات فرکانس‌های طبیعی ورق ساندویچی در برابر تغییر η_3 سلول آگزتیک

فرکانس ۴	فرکانس ۳	فرکانس ۲	فرکانس ۱	η_3
۱۳۸/۰۳۳	۱۲۲/۸۷۳	۸۶/۲۴۷	۲۷/۴۴۰۵	۰/۰۱
۱۲۳/۵۸	۱۱۱/۷۲۱	۶۶/۱۹۱۹	۱۹/۸۰۳۱	۰/۰۵
۱۲۱/۰۴۱	۱۰۲/۲۵۹	۵۲/۷۳۹۸	۱۶/۴۸۳۲	۰/۱
۱۲۰/۴۱۹	۹۹/۸۹۲۳	۵۲/۳۹۹۹	۱۴/۰۰۳۲	۰/۲
۱۱۹/۱۱۲	۹۷/۴۵۸۲	۳۸/۰۸۵۵	۱۳/۱۲۳۶	۰/۳



شکل ۶ تغییرات فرکانس‌های طبیعی ورق ساندویچی در برابر تغییر η_3 سلول آگزتیک

۳-۷- جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

در تحقیق حاضر تحلیل ارتعاشات ورق ساندویچی سه لایه با هسته آگزتیک با اعمال تقویت‌کننده‌های کربنی تحت نیروی آیرودالاستیک برای شرایط مرزی تماماً ساده بررسی شده است. در این تحلیل با به دست آوردن انرژی‌های جنبشی ورق، انرژی پتانسیل ورق و کار نیروهای خارجی شامل نیروی آیرودینامیکی، معادلات حاکم بر رفتار ارتعاشی سازه به دست آمده و با استفاده از روش تقریبی باقیمانده وزنی، مقادیر فرکانسی و شکل مودهای ورق ساندویچی به دست آمده است. برای مدل‌سازی نیروی آیرودینامیکی وارده به سیستم از تئوری پیستون مرتبه اول استفاده گردیده است. پارامترهای متغیر در این تحلیل ابعاد هندسی ورق ساندویچی، ضخامت لایه آگزتیک، زاویه سلول آگزتیک، پارامترهای هندسی سلول آگزتیک، نسبت‌های حجمی تقویت‌کننده کربنی و فشار آیرودینامیکی بوده است. برای تحلیل سیستم مفروض در تحلیل حاضر از تئوری برشی اصلاح‌شده استفاده گردیده است.

- (۱) شرایط مرزی گیردار روی لبه‌های ورق ساندویچی قید ایجاد می‌کند که باعث سفتی و استحکام ورق می‌شود و استحکام ورق در شرایط مرزی گیردار نسبت به ورق در شرایط مرزی ساده بیشتر است، به همین دلیل فرکانس‌های طبیعی ورق در شرایط مرزی گیردار نسبت به شرایط مرزی ساده بیشتر است.
- (۲) با افزایش ضخامت ورق ساندویچی، سفتی و استحکام سازه افزایش می‌یابد و متعاقباً فرکانس‌های طبیعی آن زیاد می‌شود.
- (۳) با اعمال تقویت‌کننده‌های کربنی روی لایه‌های فوقانی و تحتانی ورق ساندویچی، استحکام ورق افزایش می‌یابد، ورق سخت‌تر می‌شود و فرکانس طبیعی آن بیشتر می‌شود. هرچه درصد حجمی تقویت‌کننده‌های کربنی بیشتر شود، استحکام ورق بیشتر می‌شود و فرکانس طبیعی زیادتر می‌شود.
- (۴) با افزایش ضخامت لایه آگرتیک، استحکام ورق ساندویچی بیشتر می‌شود و ورق سخت‌تر می‌شود به همین دلیل فرکانس طبیعی افزایش پیدا کرده است. از مقایسه دو زاویه سلول آگرتیک می‌توان دریافت که هرچه زاویه منفی سلول آگرتیک کمتر باشد، مقدار فرکانس طبیعی بیشتر است.
- (۵) با افزایش مقدار η_3 ، فرکانس‌های طبیعی ورق کاهش می‌یابد. به عبارت دیگر، با فرض ثابت بودن طول دندان سلول، هرچه ضخامت سلول آگرتیک بیشتر شود فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد؛ برای مقادیر η_3 کمتر از ۰/۱ روند کاهش فرکانس طبیعی شیب تندتری دارد.

Authorship Contribution Statement

Dr. Korosh Khorshidi



Biography: Korosh Khorshidi, an Assistant Professor of Mechanical Engineering at Arak University, was born in Sari, Mazandaran province, Iran, in 1977. He received his B.Sc. degree in Mechanical Engineering with a focus on solid design from Mazandaran University in 1998. He then pursued his M.Sc. and Ph.D. degrees in Mechanical Engineering from Iran University of Science and Technology in 2000 and 2006, respectively. His research interests include vibration, sound control, and nonlinear dynamics. He has published several papers in reputable journals and conferences, including the Journal of Sound and Vibration, International Journal of Mechanical Sciences, and Ocean Engineering. He has also contributed to the field of mechanical engineering by designing, manufacturing, and applying small-scale magnetic soft robots.

Contribution Statement: Conceptualization, Resources, Data Curation, Supervision, Project administration, Writing - Review & Editing

Hanieh Norowzian

Biography: Hanieh Norowzian is a M.Sc. student at Arak University, Arak, Iran

Contribution Statement: Conceptualization, Methodology, Validation, formal analysis, investigation, Software, Visualization, Writing - Original Draft

Mohsen Ghasemi



Biography: Mohsen Ghasemi, a Mechanical Engineer born in Arak, Iran, received his B.Sc. and M.Sc. degrees in Mechanical Engineering from Arak University in 2017 and 2019, respectively. His research focuses on vibration, buckling, composite and functionally graded structures, piezoelectric systems, and fluid-structure interaction. He has published several papers in reputable journals such as Extreme Mechanics Letters, Composite Structures, and Applied Ocean Research, contributing to advances in micro- and nano-plate mechanics and smart material systems.

Contribution Statement: Visualization, Conceptualization, Review & Editing.

۴- مراجع

- [1] Khorshidi K, Savvafi S, Zobeid S. Forced vibration of a three-layer cylindrical shell with an auxetic core containing fluid under shock load using high-order shear deformation theories. *Mechanics of Advanced and Smart Materials*. 2024; 3(4): 431–464.

- [2] Khorshidi K, Shabani Y. Free vibration analysis of sandwich plates with magnetorheological smart fluid core using modified shear deformation theory. *Journal of Science and Technology of Composites*. 2022; 8(4): 1826–1835.
- [3] Keshavarzian M, Najafizadeh MM, Khorshidi K, Yousefi P, Alavi M. Improved high-order analysis of linear vibrations of thick sandwich panels with an electrorheological core using exponential shear deformation theory. *Journal of Solid Mechanics*. 2022; 14(1).
- [4] Khorshidi K, Karimi M. Fluid–structure interaction of vibrating composite piezoelectric plates using exponential shear deformation theory. *Mechanics of Advanced Composite Structures*. 2020; 7(1): 59–69.
- [5] Khorshidi K, Ghasemi M. Buckling analysis of functionally graded rectangular microplates in thermal environments based on exponential shear deformation theory using modified couple stress theory. *Journal of Solid and Fluid Mechanics*. 2018; 8(4): 179–196.
- [6] Khorshidi K, Fallah A. Effect of exponential stress resultant on buckling response of functionally graded rectangular plates. *Journal of Stress Analysis*. 2017; 2(1): 27–33.
- [7] Khorshidi K, Fallah A, Siahpush A. Free vibrations of functionally graded composite rectangular nanoplates based on nonlocal exponential shear deformation theory in thermal environment. *Journal of Science and Technology of Composites*. 2017; 4(1): 109–120.
- [8] Khorshidi K, Fallah A. Buckling analysis of functionally graded rectangular nanoplates based on nonlocal exponential shear deformation theory. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2016; 113: 94–104.
- [9] Khorshidi K, Asgari T, Fallah A. Free vibrations of functionally graded rectangular nanoplates based on nonlocal exponential shear deformation theory. *Mechanics of Advanced Composite Structures*. 2015; 2(2): 79–93.
- [10] El Meiche N, Tounsi A, Ziane N, Mechab I. A new hyperbolic shear deformation theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plates. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2011; 53(4): 237–247.
- [11] Pradhan KK, Chakraverty S. Transverse vibration of isotropic thick rectangular plates based on new inverse trigonometric shear deformation theories. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2015; 94: 211–231.
- [12] Farzam Rad A, Hassani B, Karamodin A. Free vibration analysis of FG nanoplates using quasi-3D hyperbolic refined plate theory and the isogeometric approach. *Proceedings of the International Congress on Science and Engineering*. 2018.
- [13] Zhang H, Shi D, Wang Q. Improved Fourier series solution for free vibration of moderately thick laminated composite rectangular plates with non-uniform boundary conditions. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2017; 121: 1–20.
- [14] Kiani Y. Free vibration of carbon nanotube reinforced composite plates on point supports using Lagrangian multipliers. *Meccanica*. 2017; 52(6): 1353–1367.
- [15] Shi D, Zhang H, Wang Q, Zha S. Free and forced vibration of moderately thick laminated composite rectangular plates. *Shock and Vibration*. 2017; 2017: 7820130.
- [16] Najafizadeh M, Heydari H. Exact solution for buckling of functionally graded circular plates based on higher order shear deformation theory under uniform radial compression. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2008; 50(3): 603–612.
- [17] Hosseini-Hashemi S, Kermajani M, Nazemnezhad R. Analytical study on buckling and free vibration of rectangular nanoplates using nonlocal third-order shear deformation theory. *European Journal of Mechanics A/Solids*. 2015; 51: 29–43.

- [18] Hosseini-Hashemi S, Zare M, Nazemzhad R. Exact analytical approach for free vibration of Mindlin rectangular nanoplates via nonlocal elasticity. *Composite Structures*. 2013; 100: 290–299.
- [19] Tran Quoc Quan, Vu Minh Anh, Vinyas Mahesh, Nguyen Dinh Duc. Vibration and nonlinear dynamic response of imperfect sandwich piezoelectric auxetic plates. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2024.
- [20] Aglietti GS, Cunningham PR. Is a simple support really that simple? *Journal of Sound and Vibration*. 2002; 257(2): 321–335.
- [21] Xian-Kun X, Hui-Shen S. Vibration of postbuckled FGM hybrid laminated plates in thermal environments. *Engineering Structures*. 2008; 30(9): 2420–2435.
- [22] Duc ND, Cong PH. Nonlinear dynamic response and vibration of sandwich composite plates with negative Poisson's ratio in auxetic honeycombs. *Journal of Sandwich Structures and Materials*. 2016; 20: 692–717.
- [23] Li Y, Che Z, Xiao D, Wu W, Fang D. Dynamic response of shallow sandwich arches with auxetic metallic honeycomb cores under localized impulsive loading. *International Journal of Impact Engineering*. 2018; 122: 224–237.
- [24] Alipour MM, Shariyat M. Analytical layerwise free vibration analysis of circular/annular composite sandwich plates with auxetic cores. *International Journal of Mechanical Materials Design*. 2015; doi:10.1007/s10999-015-9321-2.
- [25] Hajmohammad MH, Nouri AH, Zarei MS, Kolahchi R. Numerical approach and visco-refined zigzag theory for blast analysis of auxetic honeycomb plates with multiphase nanocomposite face sheets in hygrothermal environment. *Engineering with Computers*. 2018.
- [26] Song ZG, Li FM. Active aeroelastic flutter analysis and vibration control of supersonic composite laminated plates. *Composite Structures*. 2012; 94(2): 702–713.
- [27] Farhadi S, Hosseini-Hashemi SH. Aeroelastic behavior of cantilevered rotating rectangular plates. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2011; 53(4): 316–328.
- [28] Kouchakzadeh MA, Rasekh M, Haddadpour H. Panel flutter analysis of general laminated composite plates. *Composite Structures*. 2010; 92(12): 2906–2915.
- [29] Fazelzadeh SA, Poursmaeeli S, Ghavanloo E. Aeroelastic characteristics of functionally graded CNT-reinforced composite plates under supersonic flow. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2015; 285: 714–729.
- [30] Prakash T, Singha MK, Ganapathi M. Finite element study of large amplitude flexural vibration characteristics of FGM plates under aerodynamic load. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2012; 47(5): 439–447.
- [31] Jaiman RK, Parmar MK, Gurugubelli PS. Added mass and aeroelastic stability of flexible plates interacting with mean flow in confined channels. *Journal of Applied Mechanics*. 2014; 81(4): 041006.
- [32] Mahato PK, Maiti DK. Aeroelastic analysis of smart composite structures in hygrothermal environments. *Composite Structures*. 2010; 92(4): 1027–1038.
- [33] Zhou K, Huang X, Zhang Z, Hua H. Aero-thermo-elastic flutter analysis of coupled plate structures in supersonic flow with general boundary conditions. *Journal of Sound and Vibration*. 2018; 430: 36–58.
- [34] Shitov S, Vedenev V. Flutter of rectangular simply supported plates at low supersonic speeds. *Journal of Fluids and Structures*. 2017; 69: 154–173.
- [35] Xia W, Zhao X, Li D, Shen S. Nonlinear flutter response of preheated functionally graded panels. *International Journal of Computational Materials Science and Engineering*. 2018; 1850012.

- [36] Sun Q, Xing Y. Exact eigensolutions for flutter of 2D symmetric cross-ply composite laminates at high supersonic speeds. *Composite Structures*. 2018; 183: 358–370.
- [37] Katsikadelis JT, Babouskos NG. Flutter instability of laminated thick anisotropic plates using BEM. *Acta Mechanica*. 2018; 229(2): 613–628.
- [38] Khorshidi K, Karimi M. Flutter analysis of sandwich plates with functionally graded face sheets in thermal environments. *Aerospace Science and Technology*. 2019; 95: 105461.
- [39] Zarastvand MR, Ghassabi M, Talebitooti R. Prediction of acoustic wave transmission features of multilayered plate constructions: A review. *Journal of Sandwich Structures and Materials*. 2022; 24(1): 218–293.
- [40] Zarastvand MR, Ghassabi M, Talebitooti R. Review of sound propagation prediction of plate constructions. *Archives of Computational Methods in Engineering*. 2021; 28: 2817–2843.