

Study of Buckling and Post-buckling Behavior of Composite Beam Reinforced with Graphene Nanoplatelets Using Non-local Strain Gradient Theory

Ahmad Haghani ^{a*}

^a Department of Mechanical Engineering, Shahrekord Branch, Islamic Azad University, Shahrekord, Iran.

Original Article

Use your device to scan
and read the article online



Citation: Haghani A. Study of Buckling and Post-buckling Behavior of Composite Beam Reinforced with Graphene Nanoplatelets Using Non-local Strain Gradient Theory. *Mechanics of Advanced and Smart Materials*. 2024;4(2):328-349.

 <https://10.61186/masm.4.2.328>

KEYWORDS

Non-local Strain Gradient Theory,
Buckling of the beam,
Composite,
Graphene nanoplatelets.

ABSTRACT

Given the increasing use of nanotechnologies in human life and the significance of nano-electromechanical systems, this paper investigates the buckling and post-buckling behavior of Euler-Bernoulli (EB) composite beams (CB) reinforced with graphene nanoplatelets (GPLs), considering the nonlocal strain gradient theory (NSGT). Initially, the elastic properties of the nanocomposite reinforced with GPLs were calculated using the rule of mixtures and the Halpin-Tsai (HT) micromechanical model. Subsequently, the governing equations (GE) for the EB beam were derived using the virtual work principle, the NSGT, and the von Kármán (VK) strain field. These equations were analytically solved, and the achieved findings were checked against those found in existing studies, showing excellent agreement. Finally, the effects of varying the weight fraction and distribution of GPLs in the composite, changes in nonlocal parameter (NP) and strain gradient (SG) parameter, as well as the ratio of beam's length to beam's thickness, on the critical buckling load were examined and as a results for a constant weight fraction, the critical buckling load is highest in the X pattern, followed by the U and O patterns.

Extended Abstract

1. Introduction

Considering that classical continuum theories have a deficiency in studying the mechanical behavior of nanostructures—specifically, they overlook the voids between atoms and the atomic forces within particles, ignoring the core physics and dimensions of the problem—this assumption becomes invalid at the nano-scale. Due to the high cost of experimental tests at the nano-scale, generalized continuum mechanics theories have been developed [1]. One of these generalized continuum mechanics theories is the NSGT [1, 2]. The growing use of nanotechnologies in various industries and the limitations of classical continuum mechanics in analyzing nano-scale, systems have led to the widespread adoption of generalized continuum mechanics theories. Some research studies that have utilized these theories in solving various problems are listed below.

In a study by Wu et al. [3], nonlinear resonance in composite nanobeams reinforced with GPLs subjected to external harmonic excitation was investigated based on the nonlocal strain theory. They extracted the GE using the HT theory, the rule of mixtures, and Hamilton's principle, solving them using the generalized differential

* Corresponding author. Tel.: 03833361000

E-mail address: a.haghani117@gmail.com

DOI: <https://10.61186/masm.4.2.328>.

Received: October 26, 2024; Received in revised form: November 11, 2024; Accepted: November 16, 2024.

© Author



quadrature method. Finally, they examined the impacts of nanoplatelet weight fractions for different distributions on the natural frequency.

Ghandourah et al. [4] used multilayered nanocomposite plates reinforced with graphene to enhance strength, structural stiffness, and reduce the weight of the nanoplates. They applied the modified HT model and the rule of mixtures to compute the effective Young's modulus along the plate thickness direction, as well as Poisson's ratio and mass density. They used an analytical Galerkin approach to solve the equilibrium equations governing the nanoplate. Ultimately, they examined the effects of nonlocal scale parameters, SG scale parameters, graphene distribution patterns, and weight fractions on the bending and buckling behavior of the plate.

Khorshidi et al. [15] investigated the buckling of rectangular functionally graded nanoplates considering surface effects. They used the Mori-Tanaka model to define material properties and considered the displacement field according to the modified shear deformation theories. Nonlocal effects and surface effects were incorporated into the GE. Using the Galerkin method, they resolved the equations and analyzed the influence of parameters such as surface residual stress, thickness-to-length ratio, width-to-length ratio, and NP on the critical buckling load.

In another study, Khorshidi et al. [16] examined energy harvesting from heterogeneous beams with piezoelectric layers using modified shear deformation theories. After deriving and solving the GE, they investigated the impact of various parameters on the vibrational specifications and energy harvesting performance of the system.

Hosseini-Hashemi et al. [17] studied the free vibrations of non-uniform and non-homogeneous beams with non-classical boundary conditions. After deriving and computing the GE, they analyzed the influence of frequency parameters and mode shapes.

Taheri and Ghane [18] investigated the effects of various parameters on the tensile strength, flexural strength, and impact resistance of hemp-reinforced composites. They employed the E-fast sensitivity analysis method and concluded that the molding temperature had the highest impact on the compression molding process.

Reviewing previous research on the implementation of generalized continuum mechanics theories, such as NSGT, in nanocomposite structures reinforced with GPLs reveals that the buckling and post-buckling behavior of Euler-Bernoulli CB reinforced with GPLs have not been studied using the NSGT. Therefore, in this paper, the buckling and post-buckling behavior of an Euler-Bernoulli CB reinforced with GPLs will be investigated. First, the governing buckling equations will be derived using the virtual work principle, the NSGT, the VK strain field, and the classical beam theory. After solving the equations, the effects of NP, strain gradient theory (SGT) parameters, weight fractions, and various distribution patterns of GPLs on the buckling and post-buckling behavior of the beam will be examined.

2. Fundamental Equations

As discussed in the previous section, this study investigates the buckling and post-buckling behavior of a size-dependent EB beam with simply supported boundary conditions at the beam's endpoints. Figure 1 illustrates the Euler-Bernoulli beam under these boundary conditions.

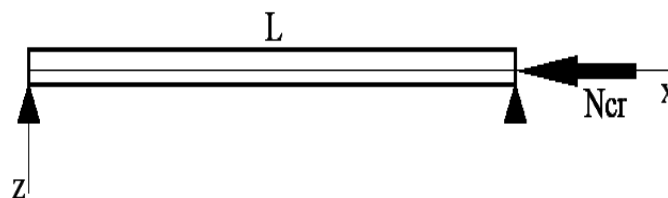


Figure 1. Size-dependent EB beam with simple supports at both ends

The displacement field governing the EB beam is expressed as follows, where U_1 is the displacement in the x -axis, V_1 is the displacement in the y -axis, and W_1 is the displacement in the z -axis.

$$U_1(x, z, t) = u(x, t) + z \frac{\partial w(x, t)}{\partial x}, \quad V_1(x, z, t) = 0, \quad W_1(x, z, t) = w(x, t) \quad (1)$$

Based on the VK strain theory and the displacement field presented in Equation 1, the nonlinear strain field is calculated as follows:

$$\varepsilon_{xx}^{(0)} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_{xx}^{(1)} = \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial x} \quad (2)$$

In the NSGT [19], the stress field accounts for both the nonlocal elastic stresses and the stresses from the SGT. Therefore, the general stress equation is written as follows:

$$\left(1 - (ea)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \sigma_{xx} = E \left(1 - l_s^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \varepsilon_{xx} \quad (3)$$

Where E is the elastic stiffness, ea is the NP, and l_s is the SG length parameter.

To derive the governing equilibrium equations, the first-order variations of the strain energy δU and the first-order variations of the external work δW are computed. Then, using the calculus of variations and the virtual work principle, the equilibrium equations are derived. The equilibrium equations and boundary conditions, assuming zero external forces, are obtained in the following form:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(N \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} &= 0 \\ \left(1 - (ea)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) N &= A_{11} b \left(1 - l_s^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) \\ \left(1 - (ea)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) M &= -D_{11} b \left(1 - l_s^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ N \delta u \Big|_0^L &= 0, \quad M \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \Big|_0^L = 0, \quad \left(N \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial x} \right) \delta w \Big|_0^L = 0 \\ N^{(1)} \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) \Big|_0^L &= 0, \quad M^{(1)} \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \Big|_0^L = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

The second part of Equation 4, in terms of the displacement functions, is expressed as follows:

$$\left(1 - (ea)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left\{ \left(N_0 - \frac{bA_{11}}{2L} \int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right\} + \left(1 - l_s^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) bD_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0 \quad (5)$$

To non-dimensionalize Equation 5, the following parameters are introduced, where I represents the moment of inertia of the cross-sectional area [20]:

$$\begin{aligned} x &= LX, \quad w = LW, \quad ea = \lambda_{NL} L, \\ l_s &= \lambda_{SG} L, \quad \beta_1 = \frac{L^2 N_0}{bD_{11}}, \quad \beta_2 = \frac{L^2 A}{2I} \\ \kappa &= \beta_2 \int_0^1 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dX \end{aligned} \quad (6)$$

Using these equations and substituting them into the previous equations, the governing dimensionless equation and boundary conditions are extracted.

$$\begin{aligned} \lambda_{SG}^2 \frac{d^6 W}{dX^6} - (\kappa \lambda_{NL}^2 - \beta_1 \lambda_{NL}^2 + 1) \frac{d^4 W}{dX^4} + (\kappa - \beta_1) \frac{d^2 W}{dX^2} &= 0 \\ W \Big|_0^1 = 0, \quad \frac{d^4 W}{dX^4} \Big|_0^1 = 0, \quad \frac{d^2 W}{dX^2} \Big|_0^1 &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

After solving the above equation and applying the boundary conditions, the following equation is obtained:

$$W(X) = \pm \frac{2}{\sqrt{\beta_2}} \sqrt{\frac{\beta_1}{m^2 \pi^2} - \frac{1 + m^2 \pi^2 \lambda_{SG}^2}{1 + m^2 \pi^2 \lambda_{NL}^2}} \sin(m\pi X) \quad (8)$$

3. Mechanical Properties of CB reinforced with GPLs

The mechanical specifications of the CB reinforced with GPLs employed in this study are presented in Table 1.

Table 1. Material Properties Used in the Beam [21]

Property	Epoxy	GPL
Young's modulus (GPa)	3	1010
Density (kg/m ³)	1200	1062.5
ν	0.34	0.186

In the present work, three categories of symmetric distribution patterns for GPLs in the composite beam are considered: U, X, and O distribution patterns. The distribution of these patterns is shown in Figure 2.

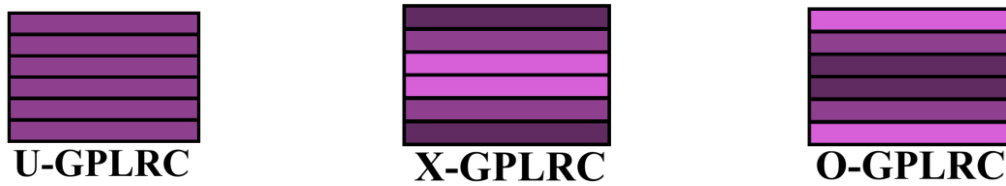


Figure 2. Symmetric distribution patterns of GPLs in the composite beam.

It is assumed that the number of composite layers reinforced with graphene, N_L , is an even number [21]. The volume fraction of GPL for the i -th layer of the beam, $V_{GPL}^{(i)}$, is computed for various patterns by next equations [21]:

$$U - GPLRC: V_{GPL}^{(i)} = \tilde{V}_{GPL} \tag{9}$$

$$X - GPLRC: V_{GPL}^{(i)} = 2\tilde{V}_{GPL} \frac{|2i - N_L - 1|}{N_L} \tag{10}$$

$$O - GPLRC: V_{GPL}^{(i)} = 2\tilde{V}_{GPL} \left(1 - \frac{|2i - N_L - 1|}{N_L} \right) \tag{11}$$

Where \tilde{V}_{GPL} is the total volume fraction of GPLs [17].

$$\tilde{V}_{GPL} = \frac{W_{GPL}}{W_{GPL} + (1 - W_{GPL}) \left(\frac{\rho_{GPL}}{\rho_m} \right)} \tag{12}$$

In the above equation, W_{GPL} is the overall weight fraction of GPLs in the beam.

To compute the effective Young's modulus for each layer of the CB reinforced with GPLs, the modified HT micromechanical model is used, as expressed by the following equation [21]:

$$E^{(i)} = \frac{3}{8} \left(\frac{1 + \xi_L \eta_L V_{GPL}^{(i)}}{1 - \eta_L V_{GPL}^{(i)}} \right) E_m + \frac{5}{8} \left(\frac{1 + \xi_T \eta_T V_{GPL}^{(i)}}{1 - \eta_T V_{GPL}^{(i)}} \right) E_m, \quad \eta_L = \frac{\left(\frac{E_{GPL}}{E_m} \right) - 1}{\left(\frac{E_{GPL}}{E_m} \right) + \xi_L}, \quad \eta_T = \frac{\left(\frac{E_{GPL}}{E_m} \right) - 1}{\left(\frac{E_{GPL}}{E_m} \right) + \xi_T} \tag{13}$$

Where ξ_L and ξ_T are the geometric factors of the GPLs, computed from the next equation. In this equation, b_{GPL} , t_{GPL} and a_{GPL} , represent the width, thickness and length of the graphene nanofillers, respectively.

$$\xi_L = 2 \left(\frac{a_{GPL}}{t_{GPL}} \right), \quad \xi_T = 2 \left(\frac{b_{GPL}}{t_{GPL}} \right) \tag{14}$$

Based on the rule of mixtures, the density $\rho^{(i)}$ and Poisson's ratio $\nu^{(i)}$ for each layer of the CB reinforced with GPLs are calculated by next equations:

$$\rho^{(i)} = \rho_m V_m^{(i)} + \rho_{GPL} V_{GPL}^{(i)} \tag{15}$$

$$\nu^{(i)} = \nu_m V_m^{(i)} + \nu_{GPL} V_{GPL}^{(i)} \tag{16}$$

In these equations, $V_m^{(i)} = 1 - V_{GPL}^{(i)}$ is the matrix volume fraction for each layer.

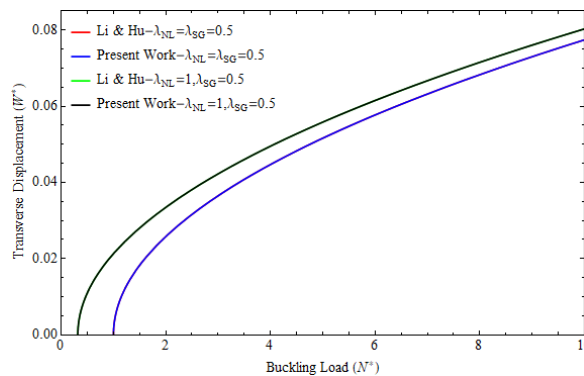


Figure 4. Dimensionless Displacement vs. buckling load

4. Solution Validation

To validate the solution for an isotropic material, the dimensionless transverse displacement $W^* = W(0.25)$ as a function of the dimensionless buckling load $N^* = \beta_1/\pi^2$ is compared with the results of Li and Hu [20]. This comparison is made for two cases, $\lambda_{NL}=\lambda_{SG}=0.5$ and $\lambda_{NL}=1,\lambda_{SG}=0.5$, assuming $L/h=10$, showing an excellent agreement. Figure 4 illustrates this comparison.

5. Results and Discussion

This part examines the effects of weight fraction variation, NP and SG parameter, and L/h ratio on the buckling and post-buckling behavior of the beam, with material properties according to Table 1.

Figure 5 presents the change in non-dimensional mid-span displacement versus dimensionless buckling load for different GPL distribution patterns, with $\lambda_{NL}=\lambda_{SG}=0.5$ and $L/h=10$. As indicated, increasing the weight fraction from 0.3% to 0.7% increases the critical buckling load. This occurs because the beam's stiffness increases, reducing the mid-span displacement.

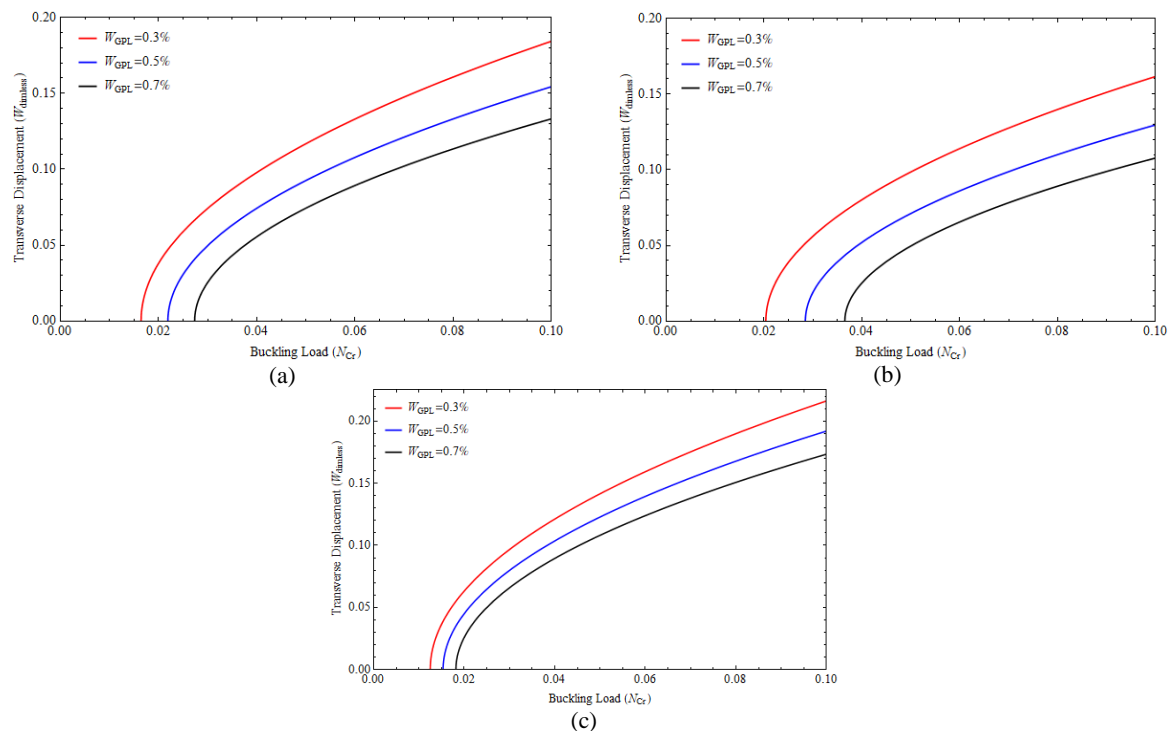


Figure 5. Dimensionless Mid-span Displacement vs. buckling load for Various Weight Fractions and Distributions (a) U-GPLRC, (b) X-GPLRC, (c) O-GPLRC

Figure 6 compares the dimensionless mid-span displacement for various GPL distribution patterns versus the dimensionless buckling load for a 0.5% weight fraction, $\lambda_{NL}=\lambda_{SG}=0.5$, and $L/h=10$. The findings show that the highest critical buckling load occurs first in the X pattern, then in the U pattern, and finally in the O pattern. This is because reinforcing the bottom and top edges of the beam with GPLs increases the beam's resistance to buckling, reducing the transverse displacement at mid-span.

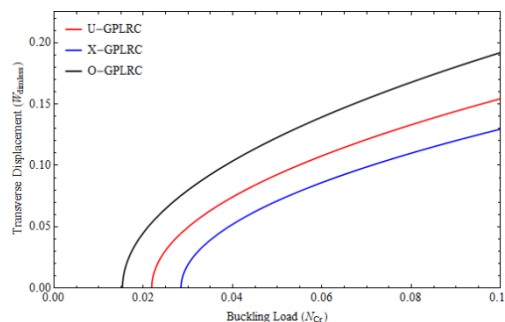


Figure 6. Comparison of Dimensionless Mid-span Displacement for Various GPL Distribution Patterns

Figure 7 shows the graphs of non-dimensional mid-span displacement changes versus the non-dimensional buckling load for various GPL distribution patterns. These graphs are based on different L/h ratios, a weight fraction of 0.5%, and $\lambda_{NL}=\lambda_{SG}=0.5$.

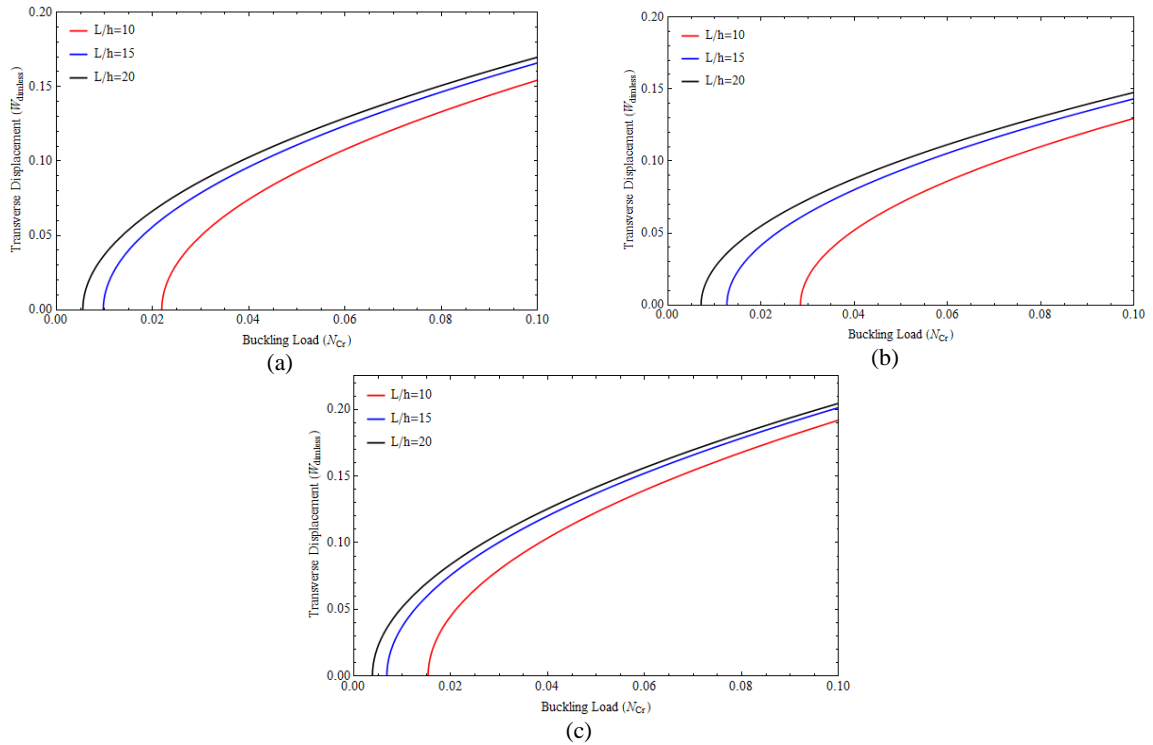


Figure 7. Dimensionless Mid-span Displacement vs. buckling load for Various L/h Ratios and Distributions (a) U-GPLRC, (b) X-GPLRC, (c) O-GPLRC

As seen, increasing the L/h ratio from 10 to 20 reduces the beam's buckling resistance, thereby decreasing the critical buckling load. This result is consistent across all GPL distribution patterns.

Figure 8 shows the effects of NP and SG parameter on the critical buckling load and mid-span transverse displacement for different GPL distribution patterns. This graph assumes a 0.5% weight fraction and $L/h=10$. It is observed that when the NP exceeds the SG parameter, the critical buckling load is lower than in the case where the NP is smaller. In situations where the NP is smaller, the beam exhibits greater resistance to buckling, thereby reducing the mid-span displacement.

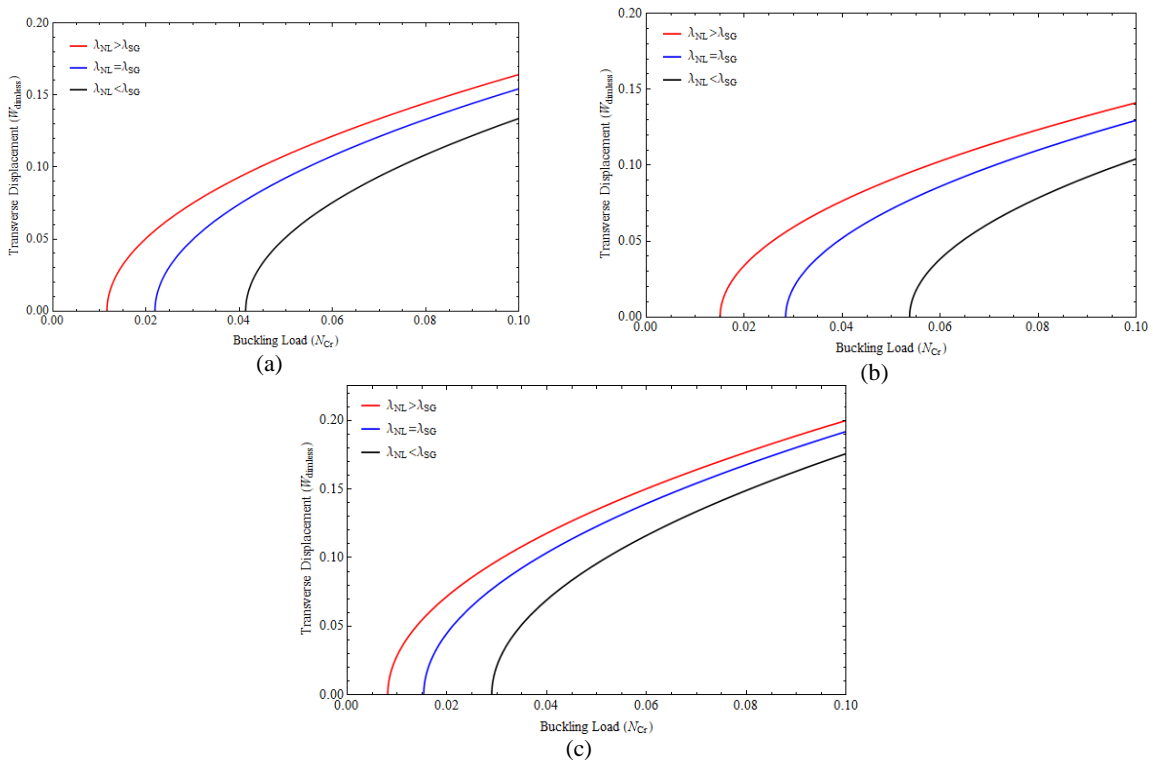


Figure 8. Dimensionless Mid-span Displacement vs. buckling load for Various NP and SG parameter (a) U-GPLRC, (b) X-GPLRC, (c) O-GPLRC

6. Conclusion

Present work investigates the buckling and post-buckling behavior of an Euler-Bernoulli CB reinforced with GPLs, incorporating the NSGT. By using the rule of mixtures and the HT model, the elastic characteristics of the graphene-reinforced nanocomposite were computed, followed by the extraction of GE according to the rule of virtual work, NSGT, and VK strain field. The equations were then analytically solved and analyzed to assess the effects of NP, SG parameter, weight fraction variations, GPL distribution patterns, and the L/h ratio on the beam's buckling and post-buckling behavior. Key findings include:

- Increasing the weight fraction from 0.3% to 0.7% increases the critical buckling load.
- With increased weight fraction, the beam's buckling resistance increases, reducing the mid-span displacement.
- For a constant weight fraction, the critical buckling load is highest in the X pattern, followed by the U and O patterns.
- Reinforcing the top and bottom edges of the beam with GPLs enhances its buckling resistance.
- Increasing the L/h ratio from 10 to 20 decreases the critical buckling load.
- The critical buckling load is lower when the NP is greater than the SG parameter.
- If NP is smaller than SG parameter, the beam demonstrates greater resistance to buckling, resulting in decreased mid-span displacement.



مطالعه‌ی رفتار کمانشی و پسا کمانشی تیر کامپوزیتی تقویت شده با نانو پلاکت‌های گرافنی با در نظر گرفتن تئوری گرادیان کرنش غیر موضعی

احمد حقانی الف*

الف استادیار، گروه مهندسی مکانیک، واحد شهرکرد، دانشگاه آزاد اسلامی، شهرکرد، ایران، a.haghani117@gmail.com

چکیده	واژگان کلیدی
با توجه به افزایش استفاده‌ی روز افزون از فناوری‌ها نانو در زندگی انسان و اهمیت سیستم‌های نانو الکترومکانیکی، این مقاله به بررسی رفتار کمانشی و پسا کمانشی تیر اویلر-برنولی کامپوزیتی تقویت شده با نانو پلاکت‌های گرافنی با در نظر گرفتن تئوری گرادیان کرنش غیر موضعی می‌پردازد. ابتدا خواص الاستیک نانو کامپوزیت تقویت شده با نانو پلاکت‌های گرافنی با استفاده از قانون مخلوط‌ها و مدل میکرومکانیکی هالپین-تسای، محاسبه شد. سپس معادلات حاکم بر تیر اویلر-برنولی با استفاده از اصل کار مجازی، تئوری گرادیان کرنش غیر موضعی و میدان کرنش فون کارمن، استخراج گردید. معادلات به دست آمده به صورت تحلیلی حل شدند و پس از آن، نتایج به دست آمده با نتایج موجود در منابع دیگر مقایسه گردید که نتایج مطابقت بسیار خوبی را نشان داد. در نهایت اثرات تغییر کسر وزنی و چگونگی توزیع نانو پلاکت‌های گرافنی در کامپوزیت، تغییر پارامترهای غیر موضعی و گرادیان کرنش و همچنین نسبت طول به ضخامت تیر بر روی بار کمانش بحرانی مورد بررسی قرار گرفت و این نتیجه به دست آمد که برای یک کسر وزنی ثابت، بیشترین بار کمانش بحرانی ابتدا در الگوی توزیع X سپس در الگوی توزیع U و در نهایت در الگوی توزیع O اتفاق می‌افتد.	تئوری گرادیان کرنش غیر موضعی، کمانش تیر، کامپوزیت، نانو پلاکت‌های گرافنی.
	تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۰۸/۰۵
	تاریخ بازنگری: ۱۴۰۳/۰۸/۲۱
	تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۰۸/۲۶

۱- مقدمه

با توجه به اینکه نظریه‌های محیط‌های پیوسته کلاسیک، در مطالعه رفتار مکانیکی نانوساختارها دارای این نقص می‌باشند که در این تئوری‌ها از فضاهای خالی بین اتم‌ها و نیروهای اتمی درون ذره در مقابل فیزیک و ابعاد اصلی مسئله صرف نظر می‌شود و در مقیاس نانو این فرض را نمی‌توان مطرح نمود، به همین خاطر با توجه به پرهزینه بودن آزمایش‌های تجربی در مقیاس نانو، تئوری‌های مکانیک محیط‌های پیوسته تعمیم یافته مطرح شدند [۱]. یکی از تئوری‌های مبتنی بر مکانیک محیط‌های پیوسته تعمیم یافته، تئوری گرادیان کرنش غیر موضعی می‌باشد [۱ و ۲]. توسعه‌ی روزافزون فناوری‌های نانو در صنایع مختلف و ضعف تئوری‌های مکانیک محیط‌های پیوسته‌ی کلاسیک در تحلیل سیستم‌های با مقیاس نانو، منجر به استفاده‌ی گسترده از تئوری‌های مکانیک محیط‌های پیوسته تعمیم یافته شد. از جمله تحقیقاتی که از این تئوری‌ها در حل مسائل مختلف استفاده نمودند می‌توان به موارد زیر اشاره نمود.

وو و همکاران [۳] در تحقیق حاضر، بر اساس نظریه کرنش غیر موضعی، به بررسی پدیده‌ی تشدید غیرخطی در نانوتیرهای کامپوزیتی تقویت شده با پلاکت‌های گرافنی تحت تحریک هارمونیک خارجی پرداختند. آن‌ها معادلات حاکم را با استفاده از

تئوری هالپین تسای، قانون مخلوطها و اصل همیلتون^۱ استخراج و توسط روش تربیع دیفرانسیل تعمیم یافته^۲ حل نمودند. در نهایت، اثرات کسر وزنی پلاکتهای مختلف به روی فرکانس طبیعی مورد مطالعه قرار گرفت.

قندوراه و همکاران [۴] به منظور بهبود سختی ساختاری، استحکام و کاهش وزن نانوصفحه، از صفحات چند لایه نانو کامپوزیت تقویت شده با گرافن استفاده نمودند. آنها از مدل اصلاح شده هالپین تسای^۳ و قانون مخلوطها برای محاسبه مدول یانگ مؤثر صفحه در امتداد جهت ضخامت و نسبت پواسون و چگالی جرمی استفاده نمودند. برای حل معادلات تعادل حاکم بر نانوصفحه از یک رویکرد تحلیلی از روش گالرکین استفاده نمودند. در نهایت، تأثیرات پارامتر مقیاس غیر موضعی، پارامتر مقیاس روش گرادیان کرنش، الگوی توزیع و کسر وزنی گرافن روی رفتار خمش و کمانش صفحه مورد بررسی قرار گرفت.

گان و شی [۵] به بررسی کمانش غیرخطی و ارتعاش اجباری تیرهای منحنی کامپوزیتی تقویت شده با گرافن با دو شرایط مرزی مختلف پرداختند. آنها با استفاده از تئوری تیر اولیبر-برنولی معادلات حاکم را استخراج نمودند و سپس اثرات شعاع تیر منحنی، توزیعهای مختلف گرافن، تعداد لایه‌های گرافن، کسر جرمی گرافن و پارامترهای پایه الاستیک بر روی کمانش غیرخطی و رفتار ارتعاش اجباری به ترتیب مورد بررسی قرار دادند.

یینگ و همکاران [۶] به بررسی رفتار کمانش حرارتی و پسا کمانش تیرهای کامپوزیتی تقویت شده با پلاکتهای گرافن چندلایه که بر روی پایه‌های الاستیک غیرخطی قرار دارند، پرداختند. آنها خواص مواد را با استفاده از مدل هالپین تسای و قانون مخلوطها محاسبه نمودند و با توجه به اصل کار مجازی، معادلات غیرخطی حاکم برای تیر را از تئوری تیر تغییر شکل برشی مرتبه اول به دست آوردند. معادلات حاکم به روش تربیع دیفرانسیل حل شدند و در نهایت اثرات نیروی محوری، شرایط مرزی، کسر وزنی گرافن، الگوی توزیع گرافن، و ضریب پی الاستیک بر کمانش حرارتی و پسا کمانش مورد بررسی قرار گرفت.

بابایی و همکاران [۷] پایداری حرارتی غیرخطی تیرهای کامپوزیت تقویت شده با پلاکتهای گرافنی را بررسی کردند. آنها با استفاده از قانون هالپین-تسای و قانون مخلوطها خواص ماده را تعیین نمودند و سپس معادلات حاکم بر تیر را با فرض تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم و میدان کرنش فون کارمن استخراج کردند. در نهایت با فرض تأثیرات پایه الاستیک و نقص اولیه، اثرات پارامترهای پایه، هندسه تیر، کسر وزنی و الگوهای توزیع پلاکتهای گرافنی را بر روی پایداری حرارتی تیر بررسی نمودند. سهمانی و همکاران [۸] به مطالعه‌ی ویژگی‌های ارتعاشی خطی و غیرخطی، کمانش و پسا کمانش میکرو / نانوصفحات ساخته شده از مواد متخلخل تقویت شده با پلاکتهای گرافنی که به صورت محوری بارگذاری شده است، پرداختند. آنها با استفاده از قانون هالپین-تسای و قانون مخلوطها خواص مکانیکی ماده را تعیین نمودند و سپس به کمک تئوری گرادیان کرنش، معادلات حرکت را استخراج و به کمک روش گالرکین حل کردند. در نهایت به این نتیجه رسیدند که برای یک مقدار خاص از انحراف صفحه، افزایش مقدار ضریب تخلخل منجر به افزایش نسبت فرکانس در هر دو رژیم پیش کمانش و پسا کمانش می‌شود.

ژانگ و یائو [۹] بر اساس تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده، ارتعاش آزاد میکروتیرهای کامپوزیتی تقویت شده با نانو پلاکتهای گرافن را روی پایه الاستیک مورد مطالعه قرار دادند. آنها ابتدا خواص مواد کامپوزیتی را با استفاده از مدل هالپین-تسای و قانون مخلوطها محاسبه نمودند و سپس با استفاده از تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده و اصل همیلتون، معادلات دیفرانسیلی حاکم را به دست آوردند. در نهایت پس از حل معادلات به روش ناویر^۴، تأثیرات توزیع، کسر جرمی و شکل هندسی نانو پلاکتهای گرافنی بر رفتارهای ارتعاشی میکروتیر به تفصیل مورد بحث قرار گرفت.

فام و همکاران [۱۰] یک مدل المان محدود بر اساس تئوری شبه ۳ بعدی، برای مطالعه خمش، ارتعاش و پاسخهای کمانش تیرهای منحنی تقویت شده با نانو پلاکتهای گرافنی ارائه کردند. آنها اثرات الگوهای توزیع و حجم کسری مواد تقویت شده را روی خمش، ارتعاش و کمانش تیرهای منحنی بررسی نمودند.

ژانگ و همکاران [۱۱] یک روش عددی چند مقیاسی را پیشنهاد کردند که می‌تواند برای مطالعه رفتار استاتیکی، دینامیکی و کمانشی تیرهای کامپوزیتی تقویت شده با پلاکتهای گرافن استفاده شود. در نهایت اثرات شرایط مرزی، توزیع پلاکتهای گرافن، پارامترهای میکروسکوپی و ابعاد هندسی ساختاری بر عملکرد استاتیکی و دینامیکی تیر، مورد مطالعه قرار گرفتند.

¹ Hamilton Principle

² generalized differential quadrature method

³ Modified Halpin-Tsai model

⁴ Navier method

شاه‌محمدی و همکاران [۱۲] کمانش نانوصفحات کامپوزیتی چند لایه تقویت‌شده با پلاکت‌های گرافن نوع لوی^۵ بر روی بستر الاستیک را با استفاده از تئوری صفحه مرتبه اول غیرموضعی اصلاح شده، بررسی کردند. آن‌ها با استفاده از یک راه‌حل تحلیلی، معادلات دیفرانسیلی حاکم را حل نمودند که نتایج به‌دست‌آمده می‌تواند به‌عنوان یک معیار مفید برای اعتبارسنجی سایر مطالعات مرتبط استفاده شود.

حسینی و همکاران [۱۳] به مطالعه ناپایداری و ارتعاش غیرخطی وابسته به‌اندازه‌ی نانوتیرهای اویلر-برنولی پرداختند. آن‌ها با فرض اصل همیلتون، میدان کرنش فون کارمن^۶ و تئوری گرادیان کرنش غیرموضعی معادلات دیفرانسیلی حاکم بر نانوتیرها را به دست آوردند و توسط روش هموتوپ^۷ حل کردند. سپس اثرات دامنه اولیه، نیروی الکترواستاتیک، مقیاس طول، پارامتر غیرموضعی و شرایط مرزی بر رفتار الکترومکانیکی نانوتیر محاسبه گردید.

جورشیری و رودباری [۱۴] یک بررسی جامع مربوط به استفاده از مدل مکانیک پیوسته گرادیان کرنش غیرموضعی در تیرها و صفحات وابسته به اندازه انجام دادند. در این بررسی، رفتار مکانیکی صفحه و تیر تحت بارگذاری‌های مختلف مانند ارتعاش، انتشار موج، و رفتار کمانش مورد مطالعه قرار گرفت.

خورشیدی و همکاران [۱۵] کمانش نانو ورق‌های تابعی مدرج مستطیلی با در نظر گرفتن اثر سطح را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها به‌منظور تعریف خواص مواد از مدل موری-تاناکا استفاده کردند و میدان جابجایی را طبق تئوری‌های تغییر شکل برشی اصلاح‌شده در نظر گرفتند. همچنین اثرات غیر موضعی و اثرات سطح در به دست آوردن معادلات حاکم لحاظ گردید. درنهایت با استفاده از روش حل گالرکین معادلات را حل نمودند و اثر پارامترهایی نظیر تنش باقیمانده سطح، نسبت ضخامت به طول، نسبت عرض به طول و پارامتر غیر موضعی را بر روی بار بحرانی کمانش بحرانی در نظر گرفتند.

خورشیدی و همکاران [۱۶] به بررسی برداشت انرژی از تیرهای ناهمگن با لایه پیزوالکتریک با استفاده از تئوری‌های تغییر شکل برشی اصلاح‌شده پرداختند. درنهایت پس از یافتن معادلات حاکم و حل آن‌ها، تأثیر پارامترهای مختلف بر مشخصات ارتعاشی و برداشت انرژی سیستم مورد بررسی قرار گرفت.

حسینی هاشمی و همکاران [۱۷] ارتعاشات آزاد تیرهای غیریکنواخت و غیر همگن را با شرایط مرزی غیرکلاسیک مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها پس از یافتن معادلات حاکم و حل این معادلات، اثر پارامترهای فرکانسی و شکل مودها را مورد مطالعه قرار دادند.

طاهری و قانع [۱۸] به بررسی اثر پارامترهای مختلف بر استحکام کششی، مقاومت خمشی و مقاومت ضربه‌ای کامپوزیت‌های تقویت‌شده توسط کف پرداختند. آن‌ها در این بررسی از روش آنالیز حساسیت ای-فست استفاده نمودند و به این نتیجه رسیدند که دمای قالب‌گیری بیشترین تأثیرگذاری را در فرآیند قالب‌گیری فشاری دارد.

با مرور تحقیقات انجام‌شده در زمینه‌ی استفاده از تئوری‌های مکانیک محیط‌های پیوسته‌ی تعمیم‌یافته نظیر تئوری گرادیان کرنش غیر موضعی و استفاده از آن در سازه‌های کامپوزیتی تقویت‌شده با نانو پلاکت‌های گرافنی، می‌توان دریافت که تا به حال رفتار کمانش و پسا کمانش تیر اویلر-برنولی کامپوزیتی تقویت‌شده با نانوپلاکت‌های گرافنی توسط گرادیان کرنش غیر موضعی بررسی نشده است. به همین خاطر در این مقاله به بررسی رفتار کمانش و پسا کمانش یک تیر اویلر-برنولی کامپوزیتی تقویت‌شده با نانوپلاکت‌های گرافنی پرداخته می‌شود. بنابراین ابتدا با استفاده از اصل کار مجازی، تئوری گرادیان کرنش غیر موضعی، میدان کرنش فون-کارمن و تئوری تیر کلاسیک، معادلات حاکم بر کمانش تیر استخراج می‌گردد و پس از حل، اثرات پارامتر غیر موضعی، پارامتر تئوری گرادیان کرنش، کسر وزنی و الگوی توزیع‌های مختلف نانوپلاکت‌های گرافنی روی رفتار کمانش و پسا کمانش تیر مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۲- معادلات اساسی

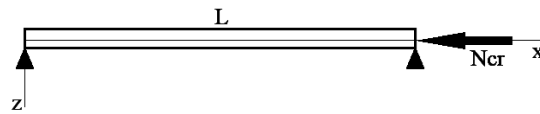
همان‌طور که در قسمت قبلی مطرح شد، در این تحقیق به بررسی رفتار کمانش و پسا کمانش یک تیر اویلر-برنولی وابسته

⁵ Levy Type

⁶ Von Karman

⁷ Homotopy method

به اندازه تحت شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده در دو انتهای تیر پرداخته می‌شود. شکل ۱ تیر اویلر-برنولی با شرایط مرزی ذکر شده را نشان می‌دهد.



شکل ۱ تیر اویلر-برنولی وابسته به اندازه تحت تکیه‌گاه ساده در دو انتها

میدان جابجایی حاکم بر تیر اویلر برنولی مطابق رابطه‌ی زیر ارائه می‌شود که در این رابطه \$U_1\$ جابجایی در امتداد \$x\$ و \$W_1\$ جابجایی در راستای \$y\$ و راستای \$z\$ می‌باشند.

$$U_1(x, z, t) = u(x, t) + z \frac{\partial w(x, t)}{\partial x}, \quad V_1(x, z, t) = 0, \quad W_1(x, z, t) = w(x, t) \quad (1)$$

بر اساس تئوری کرنش فون کارمن و میدان جابجایی ارائه شده در رابطه‌ی ۱، میدان کرنش غیرخطی به صورت زیر محاسبه می‌گردد.

$$\varepsilon_{xx}^{(0)} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_{xx}^{(1)} = \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial x} \quad (2)$$

در تئوری گرادیان کرنش غیرموضعی [۱۹] میدان تنش ناشی از هر دو تنش‌های الاستیک غیرموضعی و تنش تئوری گرادیان کرنش، لحاظ می‌گردند. بنابراین رابطه‌ی کلی تنش به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\left(1 - (ea)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \sigma_{xx} = E \left(1 - l_s^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \varepsilon_{xx} \quad (3)$$

که در این رابطه \$E\$ سختی الاستیک، \$ea\$ پارامتر غیرموضعی و \$l_s\$ پارامتر طول گرادیان کرنش می‌باشند.

برای یافتن معادلات تعادل حاکم، ابتدا تغییرات مرتبه اول انرژی کرنشی \$\delta U\$ و تغییرات مرتبه اول کار نیروهای خارجی \$\delta W\$ محاسبه شده و سپس به کمک حساب تغییرات و اصل کار مجازی معادلات تعادل حاصل می‌گردد.

تغییرات مرتبه اول انرژی کرنشی \$\delta U\$ بر اساس تئوری گرادیان کرنش غیر موضعی از رابطه زیر محاسبه می‌گردد.

$$\delta U = \int_V \left(\sigma_{xx} - \frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xx}^{(1)} \right) \delta \varepsilon_{xx}^{(0)} dV + \int_A \sigma_{xx}^{(1)} \delta \varepsilon_{xx}^{(0)} dA \quad (4)$$

از جایگذاری رابطه‌ی ۲ در رابطه‌ی ۴ و استفاده از روش انتگرال‌گیری جز به جز، تغییرات مرتبه اول انرژی کرنشی حاصل می‌گردد.

$$\begin{aligned} \delta U = & N \delta u \Big|_0^L + \left(N \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial x} \right) \delta w \Big|_0^L \\ & - M \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \Big|_0^L - \int_0^L \left[\frac{\partial N}{\partial x} \delta u + \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(N \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} \right) \delta w \right] dx - M^{(1)} \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \Big|_0^L \\ & + N^{(1)} \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) \Big|_0^L \end{aligned} \quad (5)$$

که در این رابطه \$N\$ نیروی برآیند و \$M\$ ممان خمشی برآیند می‌باشند و طبق روابط زیر محاسبه می‌گردند.

$$N = N^{(0)} - \frac{\partial N^{(1)}}{\partial x} \quad (6)$$

$$N^{(0)} = \int_A \sigma_{xx} dA, \quad N^{(1)} = \frac{\partial}{\partial x} \int_A \sigma_{xx}^{(1)} dA$$

$$M = M^{(0)} - \frac{\partial M^{(1)}}{\partial x} \quad (7)$$

$$M^{(0)} = \int_A \sigma_{xx} z dA, \quad M^{(1)} = \frac{\partial}{\partial x} \int_A \sigma_{xx}^{(1)} z dA$$

که در این روابط A مساحت سطح مقطع می‌باشد. همچنین تغییرات مرتبه اول کار نیروهای خارجی به صورت زیر است که در این رابطه q نیروی خارجی می‌باشد.

$$\delta W = \int_0^L q \delta w dx \quad (۸)$$

برای استخراج معادلات تعادل حرکت از اصل کار مجازی استفاده می‌شود.

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta W - \delta U) dt = 0 \quad (۹)$$

با توجه به رابطه‌ی بالا و روابط ۶ و ۷ معادلات تعادل و شرایط مرزی با فرض صفر بودن نیروهای خارجی، به فرم زیر حاصل می‌گردند.

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(N \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} &= 0 \\ \left(1 - (ea)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) N &= A_{11} b \left(1 - l_s^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) \\ \left(1 - (ea)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) M &= -D_{11} b \left(1 - l_s^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (۱۰)$$

$$N \delta u|_0^L = 0, \quad M \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \Big|_0^L = 0, \quad \left(N \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial x} \right) \delta w \Big|_0^L = 0$$

$$N^{(1)} \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) \Big|_0^L = 0, \quad M^{(1)} \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \Big|_0^L = 0$$

که در رابطه‌ی بالا ضرایب سختی A_{11} و D_{11} طبق رابطه‌ی زیر محاسبه می‌گردند.

$$A_{11} = \sum_{j=1}^n \int_{h_{j-1}}^{h_j} \left(\frac{E^{(j)}}{1 - (v^{(j)})^2} \right) dz, \quad D_{11} = \sum_{j=1}^n \int_{h_{j-1}}^{h_j} \left(\frac{E^{(j)}}{1 - (v^{(j)})^2} \right) z^2 dz \quad (۱۱)$$

با توجه به اینکه دو انتهای تیر تکیه‌گاه ساده قرار دارد، بنابراین شرط مرزی حاکم بر حرکت طبق رابطه زیر ارائه می‌شود. قسمت سوم این رابطه شرط مرزی از نوع غیر کلاسیک و دو قسمت اول شرط مرزی کلاسیک می‌باشد [۲۰].

$$\begin{aligned} w|_0^L &= 0, \quad M|_0^L = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_0^L = 0 \\ N^{(1)}|_0^L &= 0, \quad M^{(1)}|_0^L = 0 \end{aligned} \quad (۱۲)$$

از قسمت اول رابطه ۱۰ نتیجه‌ی زیر به دست می‌آید.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 = R \quad (۱۳)$$

که با توجه به شرایط مرزی حاکم بر جابجایی در راستای x که طبق رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود، ثابت R محاسبه خواهد شد. در این روابط b عرض سطح مقطع است.

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=L} = -\frac{N_0 L}{b A_{11}} \quad (۱۴)$$

$$R = \frac{1}{2L} \int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx - \frac{N_0 L}{b A_{11}} \quad (۱۵)$$

از جایگذاری روابط ۱۳ و ۱۵ در قسمت دوم رابطه ۱۰، و همچنین توجه به رابطه‌ی ۷، قسمت دوم رابطه‌ی ۱۰ بر حسب توابع

جابجایی به فرم زیر به دست می‌آید.

$$(1 - (ea)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}) \left\{ \left(N_0 - \frac{bA_{11}}{2L} \int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right\} + (1 - l_s^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}) bD_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0 \quad (16)$$

به منظور بی‌بعد سازی رابطه‌ی ۱۶ پارامترهای زیر در نظر گرفته می‌شوند. که I ممان اینرسی سطح مقطع می‌باشد [۲۰].

$$\begin{aligned} x &= LX, & w &= LW, & ea &= \lambda_{NL}L, \\ l_s &= \lambda_{SG}L, & \beta_1 &= \frac{L^2 N_0}{bD_{11}}, & \beta_2 &= \frac{L^2 A}{2I} \\ \kappa &= \beta_2 \int_0^1 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dX \end{aligned} \quad (17)$$

از جایگذاری رابطه‌ی ۱۷ در رابطه‌های ۱۲ و ۱۶ معادله‌ی دیفرانسیلی با شرط مرزی بدون بعد حاصل می‌گردد.

$$\begin{aligned} \lambda_{SG}^2 \frac{d^6 W}{dX^6} - (\kappa \lambda_{NL}^2 - \beta_1 \lambda_{NL}^2 + 1) \frac{d^4 W}{dX^4} + (\kappa - \beta_1) \frac{d^2 W}{dX^2} &= 0 \\ W|_0^1 = 0, & \frac{d^4 W}{dX^4} \Big|_0^1 = 0, & \frac{d^2 W}{dX^2} \Big|_0^1 &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

معادله دیفرانسیلی رابطه‌ی ۱۸ دارای جواب کلی به شکل زیر است.

$$W(X) = Q_1 \cos(\omega_1 X) + Q_2 \sin(\omega_1 X) + Q_3 \cosh(\omega_2 X) + Q_4 \sinh(\omega_2 X) + Q_5 X + Q_6 \quad (19)$$

که در این رابطه ضرایب Q_i ثابت بوده و از شرایط مرزی محاسبه خواهند شد. همچنین مقادیر ω_1 و ω_2 طبق رابطه‌ی زیر به دست می‌آیند.

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \sqrt{\frac{(\kappa \lambda_{NL}^2 - \beta_1 \lambda_{NL}^2 + 1)^2 - 4(\kappa - \beta_1) \lambda_{SG}^2 - (\kappa \lambda_{NL}^2 - \beta_1 \lambda_{NL}^2 + 1)}{2 \lambda_{SG}^2}} \\ \omega_2^2 &= \sqrt{\frac{(\kappa \lambda_{NL}^2 - \beta_1 \lambda_{NL}^2 + 1)^2 - 4(\kappa - \beta_1) \lambda_{SG}^2 + (\kappa \lambda_{NL}^2 - \beta_1 \lambda_{NL}^2 + 1)}{2 \lambda_{SG}^2}} \end{aligned} \quad (20)$$

با اعمال شرایط مرزی رابطه‌ی ۱۸ بر روی رابطه‌ی ۱۹، روابط زیر حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned} Q_1 = Q_3 = Q_5 = Q_6 &= 0 \\ Q_2 \sin(\omega_1) + Q_4 \sinh(\omega_2) &= 0 \\ Q_2 \omega_1^2 \sin(\omega_1) - Q_4 \omega_2^2 \sinh(\omega_2) &= 0 \end{aligned} \quad (21)$$

با توجه به دو معادله‌ی آخر رابطه‌ی ۲۱، معادله‌ی مشخصه‌ی زیر حاصل می‌گردد.

$$\begin{aligned} (\omega_1^2 + \omega_2^2) \sin(\omega_1) \sinh(\omega_2) &= 0, \\ \omega_1 = m\pi, & m = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (22)$$

با توجه به رابطه‌ی ۲۲ و معادله‌ی اول رابطه‌ی ۲۰ روابط زیر قابل دستیابی هستند.

$$\beta_1 = m^2 \pi^2 \left(\frac{1 + m^2 \pi^2 \lambda_{SG}^2}{1 + m^2 \pi^2 \lambda_{NL}^2} + \frac{\kappa}{m^2 \pi^2} \right) \quad (23)$$

$$W(X) = Q_2 \sin(m\pi X)$$

از جایگذاری معادله‌ی دوم رابطه‌ی ۲۳ در معادله‌ی آخر رابطه‌ی ۱۷، رابطه‌ی زیر به دست می‌آید.

$$\kappa = \beta_2 \frac{m^2 \pi^2}{4} Q_2^2 \quad (24)$$

با جایگذاری رابطه‌ی بالا در معادله‌ی اول رابطه‌ی ۲۳، ضریب Q_2 مطابق رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود که این ضریب سپس در معادله‌ی دوم رابطه‌ی ۲۳ جایگذاری می‌گردد.

$$Q_2 = \pm \frac{2}{\sqrt{\beta_2}} \sqrt{\frac{\beta_1}{m^2 \pi^2} - \frac{1 + m^2 \pi^2 \lambda_{SG}^2}{1 + m^2 \pi^2 \lambda_{NL}^2}} \quad (25)$$

$$W(X) = \pm \frac{2}{\sqrt{\beta_2}} \sqrt{\frac{\beta_1}{m^2 \pi^2} - \frac{1 + m^2 \pi^2 \lambda_{SG}^2}{1 + m^2 \pi^2 \lambda_{NL}^2}} \sin(m\pi X) \quad (26)$$

۳- خواص مکانیکی کامپوزیت‌های تقویت‌شده با نانو پلاکت‌های گرافنی

خواص مکانیکی کامپوزیت‌های تقویت‌شده با نانو پلاکت‌های گرافنی که در تیر بکار رفته است، طبق جدول ۱ ارائه می‌شود.

جدول ۱ خواص مواد بکار رفته در تیر [۲۱].

خواص مواد	Epoxy	GPL
E (GPa)	۳	۱۰۱۰
ρ (Kg/m ³)	۱۲۰۰	۱۰۶۲/۵
ν	۰/۳۴	۰/۱۸۶

در این مطالعه سه نوع الگو برای توزیع متقارن نانو پلاکت‌های گرافنی در تیر کامپوزیتی در نظر گرفته می‌شود که عبارت‌اند از الگوهای توزیع U، X و O. نحوه توزیع این الگوها در شکل ۲ نشان داده شده است.



شکل ۲ الگوهای توزیع متقارن نانو پلاکت‌های گرافنی در تیر کامپوزیتی.

در این مقاله فرض می‌شود که N_L تعداد لایه‌های کامپوزیت تقویت‌شده با گرافن عدد زوجی می‌باشد [۲۱]. $V_{GPL}^{(i)}$ کسر حجمی نانو پلاکت‌های گرافنی برای لایه i -ام تیر می‌باشد که برای الگوهای مختلف از روابط زیر محاسبه می‌شود [۲۱].

$$U - GPLRC: V_{GPL}^{(i)} = \tilde{V}_{GPL} \quad (27)$$

$$X - GPLRC: V_{GPL}^{(i)} = 2\tilde{V}_{GPL} \frac{|2i - N_L - 1|}{N_L} \quad (28)$$

$$O - GPLRC: V_{GPL}^{(i)} = 2\tilde{V}_{GPL} \left(1 - \frac{|2i - N_L - 1|}{N_L} \right) \quad (29)$$

که در روابط بالا \tilde{V}_{GPL} کل کسر حجمی نانو پلاکت‌های گرافنی است [۲۱].

$$\tilde{V}_{GPL} = \frac{W_{GPL}}{W_{GPL} + (1 - W_{GPL}) \left(\frac{\rho_{GPL}}{\rho_m} \right)} \quad (30)$$

در رابطه‌ی بالا W_{GPL} کل کسر وزنی نانو پلاکت‌های گرافنی در تیر است. برای محاسبه‌ی مدول یانگ مؤثر هر لایه از تیر کامپوزیتی تقویت‌شده با نانو پلاکت‌های گرافنی از مدل میکرومکانیک هالپین-تسای اصلاح‌شده استفاده می‌شود که طبق رابطه‌ی زیر بیان می‌گردد [۲۱].

$$E^{(i)} = \frac{3}{8} \left(\frac{1 + \xi_L \eta_L V_{GPL}^{(i)}}{1 - \eta_L V_{GPL}^{(i)}} \right) E_m + \frac{5}{8} \left(\frac{1 + \xi_T \eta_T V_{GPL}^{(i)}}{1 - \eta_T V_{GPL}^{(i)}} \right) E_m, \quad \eta_L = \frac{\left(\frac{E_{GPL}}{E_m} \right) - 1}{\left(\frac{E_{GPL}}{E_m} \right) + \xi_L}, \quad \eta_T = \frac{\left(\frac{E_{GPL}}{E_m} \right) - 1}{\left(\frac{E_{GPL}}{E_m} \right) + \xi_T} \quad (31)$$

در رابطه بالا ξ_L و ξ_T فاکتورهای هندسی نانو پلاکت‌های گرافنی هستند که از رابطه زیر محاسبه می‌شوند. در این رابطه a_{GPL} ، b_{GPL} و t_{GPL} به ترتیب طول، عرض و ضخامت نانوفیلرهای گرافنی هستند.

$$\xi_L = 2 \left(\frac{a_{GPL}}{t_{GPL}} \right), \quad \xi_T = 2 \left(\frac{b_{GPL}}{t_{GPL}} \right) \quad (32)$$

بر اساس قانون مخلوط‌ها، برای هر لایه از تیر کامپوزیتی تقویت‌شده با پلاکت‌های گرافن، چگالی $\rho^{(i)}$ و ضریب پواسون $\nu^{(i)}$ طبق روابط زیر محاسبه می‌شوند.

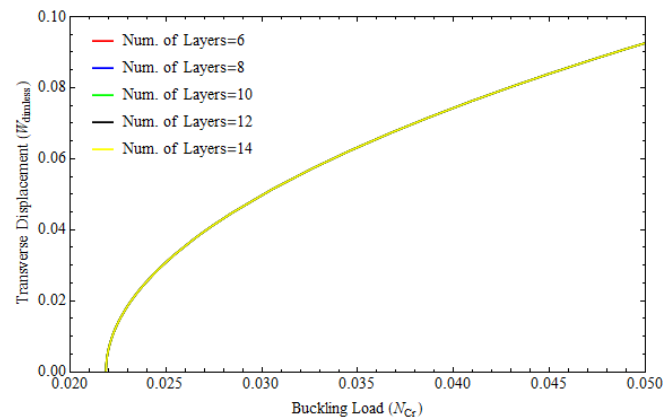
$$\rho^{(i)} = \rho_m V_m^{(i)} + \rho_{GPL} V_{GPL}^{(i)} \quad (33)$$

$$v^{(i)} = v_m V_m^{(i)} + v_{GPL} V_{GPL}^{(i)} \quad (34)$$

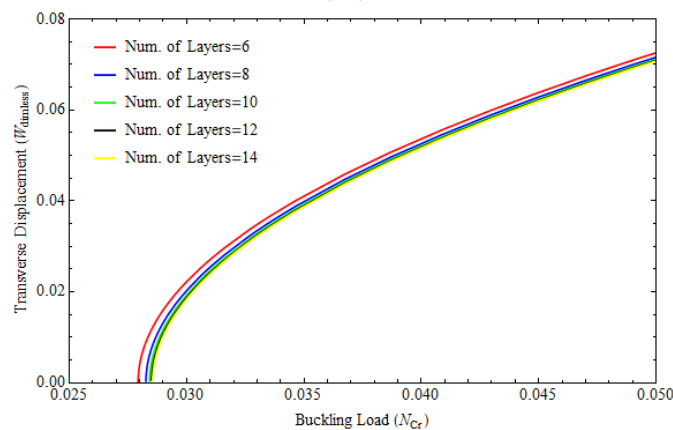
در این روابط $V_m^{(i)} = 1 - V_{GPL}^{(i)}$ کسر حجمی ماتریس برای هر لایه می‌باشد.

۴- بررسی عدم وابستگی حل به تعداد لایه‌های نانو پلاکت‌های گرافنی

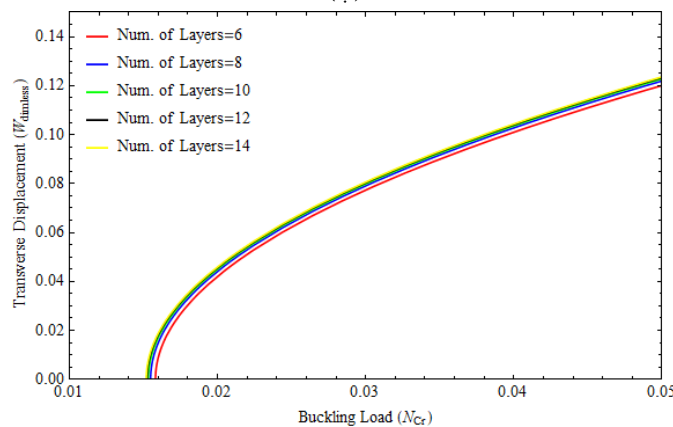
شکل ۳ نمودار جابجایی عرضی بدون بعد وسط تیر را برحسب بار کمانش نشان می‌دهد. در این نمودار $W_{dimless} = W(0.5)$ و $N_{Cr} = N_0 / (bA_{11}^0)$ است. در این بی بعد سازی $A_{11}^0 = E_m h / (1 - \nu_m^2)$ و ضخامت تیر می‌باشد. نمودارهای شکل ۳ برای حالت $\lambda_{NL} = \lambda_{SG} = 0.5$ ، $L/h = 10$ ، و تعداد لایه‌های از ۶ تا ۱۴ به دست آمده‌اند.



(الف)



(ب)



(پ)

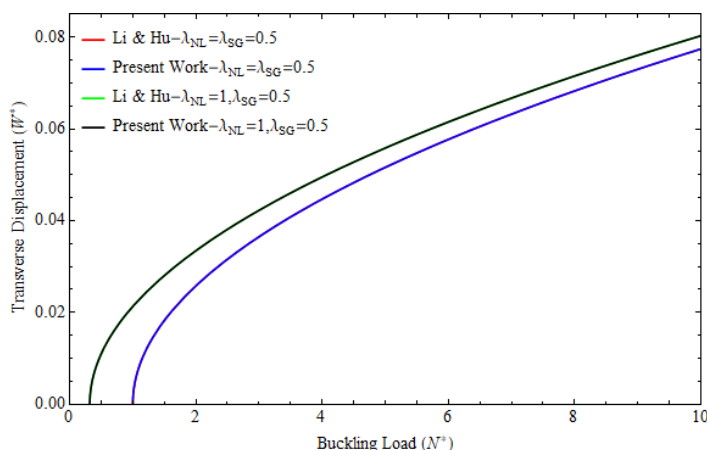
شکل ۳ نمودار جابجایی بدون بعد وسط تیر برحسب بار کمانش برای تعداد لایه‌های مختلف و توزیع‌های الف) U-GPLRC و ب) X-O-GPLRC

همان‌طور که از نمودارها مشخص است، تغییرات $W_{dimless}$ برای تعداد لایه‌های ۱۰ تا ۱۴ خیلی به یکدیگر نزدیک می‌شوند

و می‌توان گفت که از تعداد ۱۰ لایه به بالا مسئله از تعداد لایه مستقل می‌باشد. بنابراین در ادامه تعداد لایه‌ها ۱۰ در نظر گرفته می‌شود.

۵- اعتبارسنجی حل

به منظور اعتبارسنجی حل برای یک ماده ایزوتروپیک، تغییرات جابجایی عرضی بدون بعد $W^* = W(0.25)$ برحسب بار کمانش بدون بعد $N^* = \beta_1/\pi^2$ با نتایج لی و هو [۲۰] مقایسه می‌شوند. این مقایسه برای دو حالت $\lambda_{NL}=\lambda_{SG}=0.5$ و $\lambda_{NL}=1, \lambda_{SG}=0.5$ و با فرض $L/h=10$ انجام می‌گردد که نتایج مطابقت بسیار خوبی را نمایش می‌دهند. شکل ۴ نتیجه‌ی این مقایسه را نشان می‌دهد.

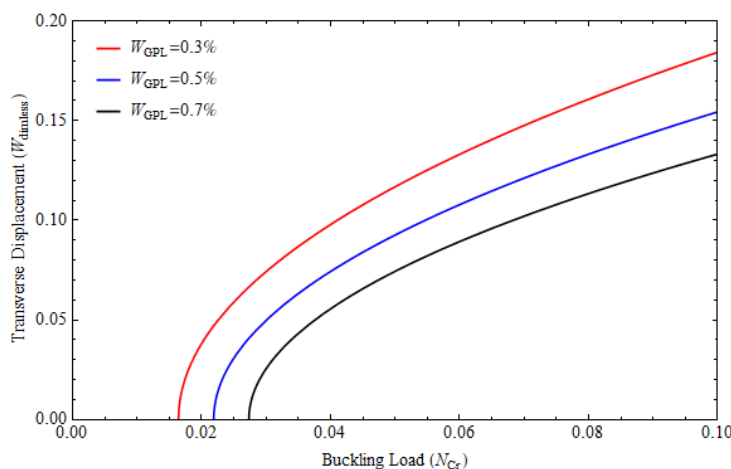


شکل ۴ نمودار جابجایی بدون بعد برحسب بار کمانش

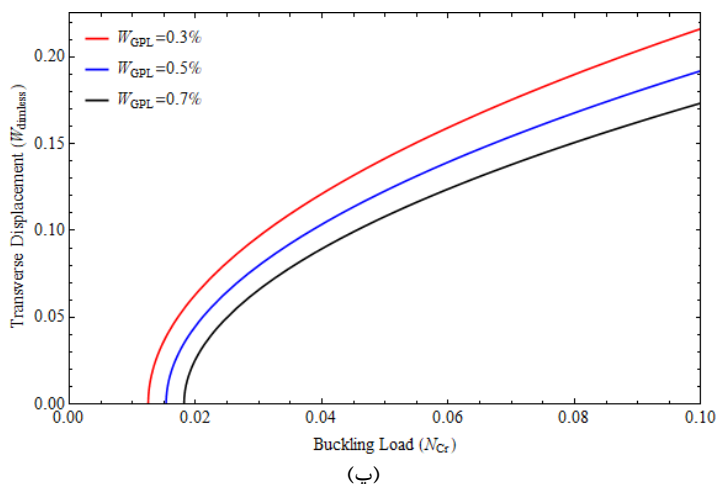
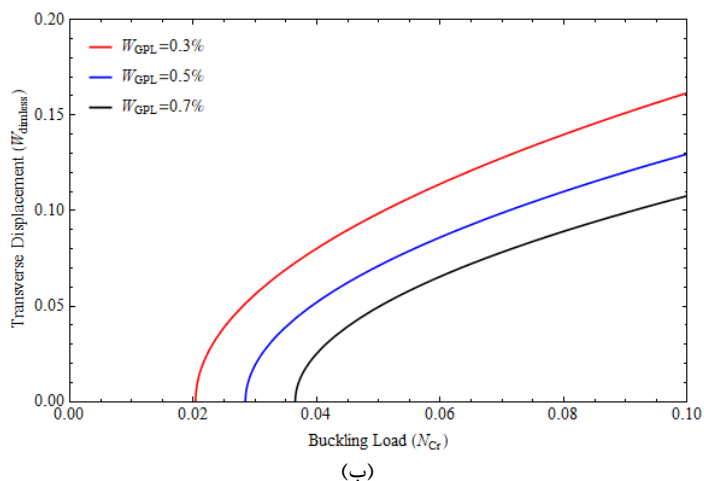
۶- نتایج و بحث

در این قسمت به بررسی اثر تغییرات کسر وزنی، پارامترهای غیر موضعی و تئوری گرادیان کرنش و نسبت L/h بر روی رفتار کمانشی و پسا کمانشی پرداخته می‌شود که خواص مکانیکی ماده مطابق جدول ۱ در نظر گرفته می‌شود.

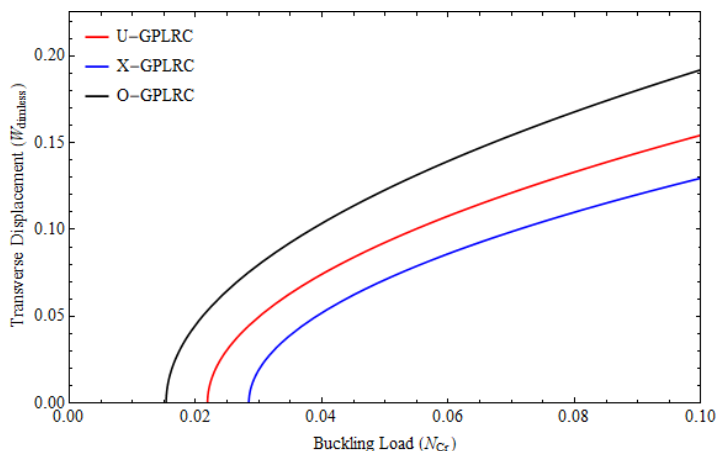
شکل ۵ نمودارهای تغییرات جابجایی بدون بعد وسط تیر را برحسب بار کمانش بدون بعد، برای الگوهای مختلف توزیع نانوپلاکت‌های گرافنی، حالت $\lambda_{NL}=\lambda_{SG}=0.5$ و فرض $L/h=10$ نشان می‌دهد. همان‌طور که در این نمودارها مشخص است با افزایش مقدار کسر وزنی از ۰/۳ درصد به ۰/۷ درصد، بار کمانش بحرانی افزایش می‌یابد و به علت اینکه سختی تیر افزایش می‌یابد، مقدار جابجایی وسط تیر کاهش پیدا می‌کند.



شکل ۵ نمودار جابجایی بدون بعد وسط تیر برحسب بار کمانش برای کسر وزنی مختلف و توزیع الف (U-GPLRC) (شکل ادامه دارد)

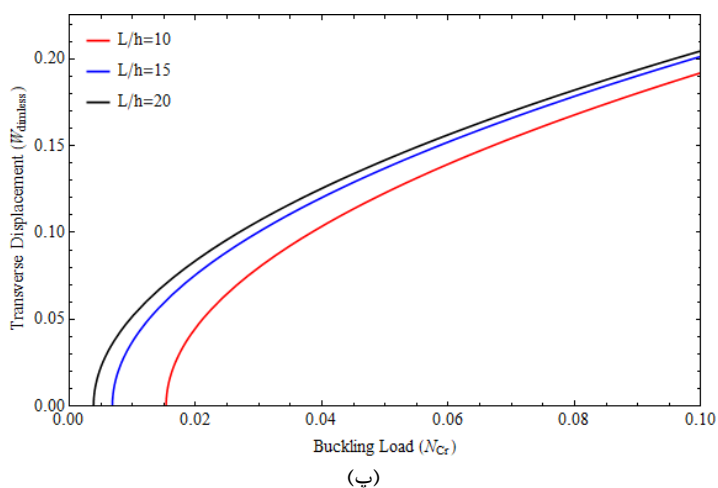
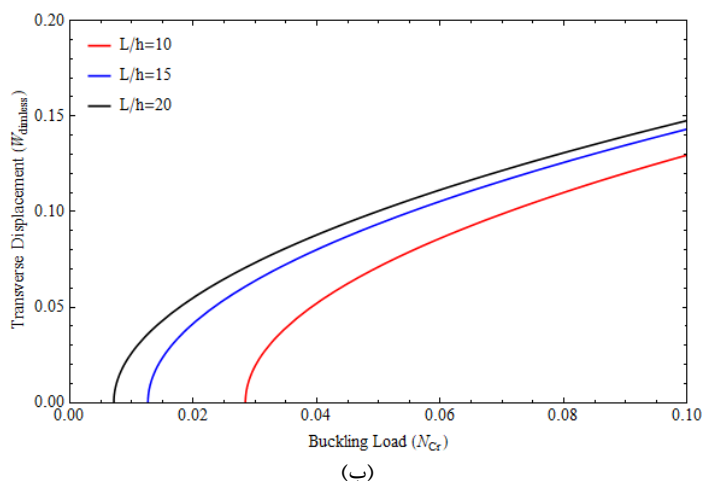
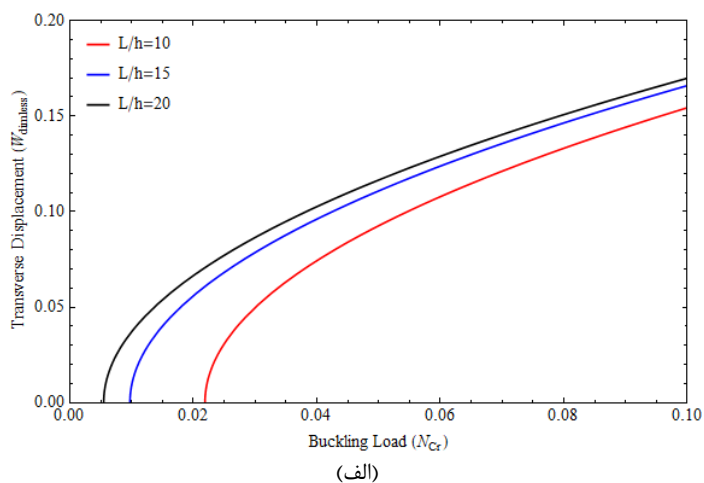


شکل ۵ نمودار جابجایی بدون بعد وسط تیر برحسب بار کمانش برای کسر وزنی مختلف و توزیع‌های (ب) X-GPLRC و (پ) O-GPLRC
 شکل ۶ نمودار مقایسه‌ی تغییرات جابجایی بدون بعد وسط تیر برای الگوهای مختلف توزیع نانو پلاکت‌های گرافنی را برحسب بار کمانش بدون بعد نشان می‌دهد. این نمودار برای کسر وزنی ۰/۵ درصد، حالت $\lambda_{NL}=\lambda_{SG}=0.5$ و فرض $L/h=10$ به دست آمده است. همان‌طور که در شکل قابل مشاهده است، بیشترین بار کمانش بحرانی به ترتیب در الگوی توزیع X سپس در الگوی توزیع U و در نهایت در الگوی توزیع O اتفاق می‌افتد. علت این امر آن است که هرچه لبه‌ی بالایی و پائینی تیر توسط نانو پلاکت‌های گرافنی تقویت شود، مقاومت تیر در برابر کمانش افزایش می‌یابد و همچنین جابجایی عرضی وسط تیر نیز کاهش خواهد یافت.



شکل ۶ نمودار مقایسه‌ی تغییرات جابجایی بدون بعد وسط تیر برای الگوهای مختلف توزیع نانو پلاکت‌های گرافنی
 نمودارهای تغییرات جابجایی بدون بعد وسط تیر برای الگوهای مختلف توزیع نانو پلاکت‌های گرافنی برحسب بار کمانش بدون

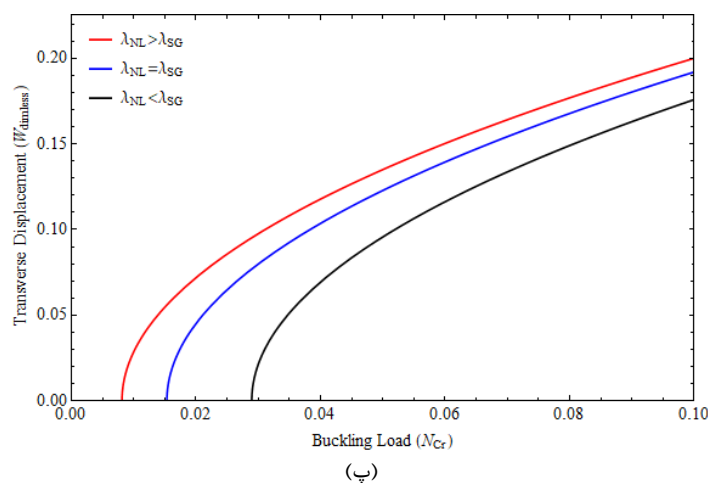
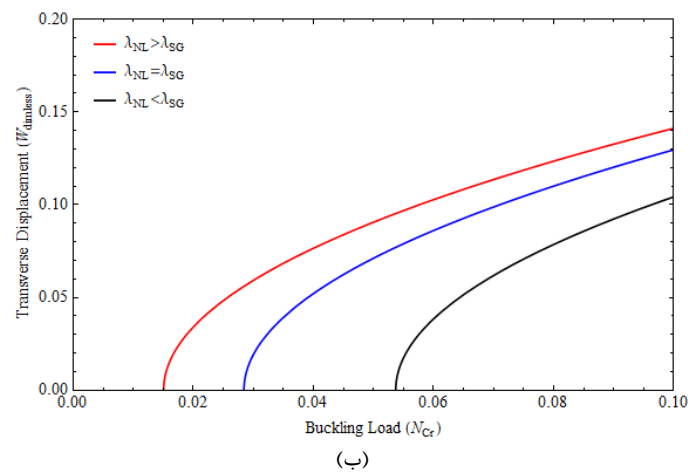
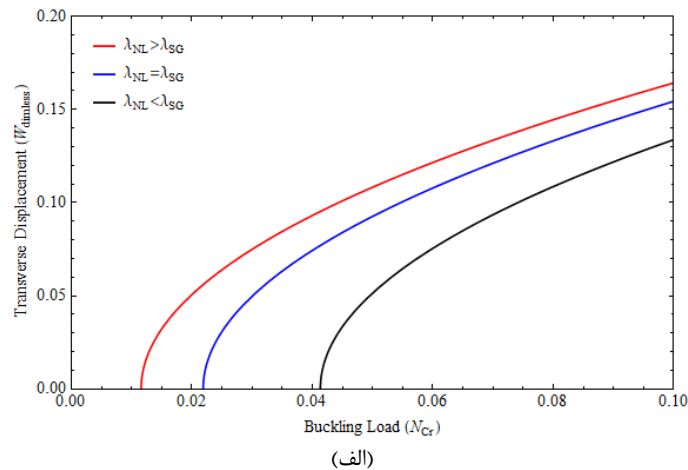
بعد در شکل ۷ قابل مشاهده هستند. این نمودارها برای نسبت‌های مختلف L/h ، کسر وزنی ۰/۵ درصد و حالت $\lambda_{NL}=\lambda_{SG}=0.5$ به دست آمده‌اند.



شکل ۷ نمودار جابجایی بدون بعد وسط تیر بر حسب بار کمانش برای نسبت L/h مختلف و توزیع‌های الف) U-GPLRC و ب) X-GPLRC و پ) O-GPLRC

همان‌طور که از شکل مشخص است، با افزایش نسبت L/h از ۱۰ به ۲۰ از مقاومت تیر در برابر کمانش کاسته می‌شود و در نتیجه بار کمانش بحرانی کاهش می‌یابد. نتیجه‌ی حاصل در هر سه الگوی توزیع نانو پلاکت‌های گرافنی قابل مشاهده می‌باشد.

شکل ۸ اثرات تغییر پارامترهای غیر موضعی و تئوری گرادیان کرنش را بر روی بار کمانش بحرانی و جابجایی عرضی وسط تیر برای الگوهای توزیع مختلف نانو پلاک‌های گرافنی نشان می‌دهد. این نمودار برای کسر وزنی ۰/۵ درصد و فرض $L/h=10$ به دست آمده است. با توجه به شکل می‌توان دریافت که در حالتی که پارامتر غیر موضعی از پارامتر گرادیان کرنش بزرگ‌تر است، بار کمانش بحرانی کمتر از حالتی است که پارامتر غیر موضعی از پارامتر گرادیان کرنش کوچک‌تر باشد. همچنین در حالتی که پارامتر غیر موضعی از پارامتر گرادیان کرنش کوچک‌تر باشد، تیر مقاومت بیشتری را از خود در برابر کمانش نشان می‌دهد و بنابراین جابجایی وسط تیر کاهش می‌یابد.



شکل ۸ نمودار جابجایی بدون بعد وسط تیر بر حسب بار کمانش برای پارامترهای غیر موضعی و تئوری گرادیان کرنش مختلف و توزیع‌های الف) U-GPLRC ب) X-GPLRC و پ) O-GPLRC

۷- نتیجه گیری

در این مقاله به بررسی رفتار کمانشی و پسا کمانشی تیر اویلر- برنولی کامپوزیتی تقویت شده با نانو پلاکت های گرافنی با در نظر گرفتن تئوری گرادیان کرنش غیر موضعی پرداخته شد. بدین صورت که با استفاده از قوانین مخلوط ها و مدل هالپین-تسای، خواص الاستیک نانوکامپوزیت تقویت شده با نانو پلاکت های گرافنی محاسبه شد و سپس با استفاده از اصل کار مجازی، تئوری گرادیان کرنش غیر موضعی و میدان کرنش فون کارمن، معادلات حاکم بر نانوتیر اویلر برنولی استخراج گردید. در نهایت معادلات با استفاده از روش تحلیلی حل شدند و اثرات تغییر پارامترهای غیر موضعی و تئوری گرادیان کرنش، تغییر کسر وزنی و الگوی توزیع نانو پلاکت های گرافنی و تغییر نسبت L/h بر روی رفتار کمانشی و پسا کمانشی تیر مورد بررسی قرار گرفت. در ادامه به خلاصه ای از نتایج به دست آمده اشاره می شود.

- افزایش مقدار کسر وزنی از $0/3$ درصد به $0/7$ درصد باعث افزایش بار کمانش بحرانی می شود.
- با افزایش کسر وزنی مقاومت تیر در برابر کمانش افزایش می یابد و بنابراین جابجایی وسط تیر کاهش خواهد یافت.
- برای یک کسر وزنی ثابت، بیشترین بار کمانش بحرانی ابتدا در الگوی توزیع X سپس در الگوی توزیع U و در نهایت در الگوی توزیع O اتفاق می افتد.
- هرچه لبه ی بالایی و پائینی تیر توسط نانو پلاکت های گرافنی تقویت شود، مقاومت تیر در برابر کمانش افزایش می یابد.
- با افزایش نسبت L/h از 10 به 20 بار کمانش بحرانی کاهش می یابد.
- بار کمانش بحرانی در حالتی که پارامتر غیر موضعی از پارامتر گرادیان کرنش بزرگ تر است، کمتر از حالتی است که پارامتر غیر موضعی از پارامتر گرادیان کرنش کوچک تر باشد.
- در حالتی که پارامتر غیر موضعی از پارامتر گرادیان کرنش کوچک تر باشد، تیر مقاومت بیشتری را از خود در برابر کمانش نشان می دهد و بنابراین جابجایی وسط تیر کاهش می یابد.

۸- فهرست علائم

پارامتر	تعریف
E	مدول الاستیک
ρ	چگالی
ν	ضریب پواسون
N_{Cr}	بار کمانش بحرانی بدون بعد
V	کسر حجمی
W	کسر جرمی
ea	فاکتور غیر موضعی
l_s	پارامتر مقیاس طول گرادیان کرنش

Authorship Contribution Statement

Dr. Ahmad Haghani



Biography: Assistant professor at department of Mechanical Engineering, Shahrekord Branch, Islamic Azad University, Shahrekord, Iran.

Contribution Statement: Conceptualization, Methodology, Validation, Formal analysis, Investigation, Software, Visualization, Writing – original draft, Writing – review & editing, Resources, Supervision, Project administration.

۹- مراجع

- [1] Haghani A, Jahangiri M, Ghaderi R. Nonlinear vibrations of Timoshenko nanobeam using stress driven nonlocal theory. *Physica Scripta*. 2022;97:095206.
- [2] Zaera R, Serrano Ó, Fernández-Sáez J. On the consistency of the nonlocal strain gradient elasticity. *International Journal of Engineering Science*. 2019;138:65-81.
- [3] Wu Q, Chen H, Gao W. Nonlocal strain gradient forced vibrations of FG-GPLRC nanocomposite microbeams. *Engineering with Computers*. 2020;36:1739-50.
- [4] Ghandourah EE, Daikh AA, Alhawsawi AM, Fallatah OA, Eltaher MA. Bending and buckling of FG-GRNC laminated plates via quasi-3D nonlocal strain gradient theory. *Mathematics*. 2022;10:1321.
- [5] Gan L-L, She G-L. Nonlinear snap-buckling and resonance of FG-GPLRC curved beams with different boundary conditions. *Geomechanics and Engineering*. 2023;32:541-51.
- [6] Lv Y, Zhang J, Li L. Thermal buckling and postbuckling of functionally graded multilayer GPL-reinforced composite beams on nonlinear elastic foundations. *Heliyon*. 2023;9.
- [7] Babaei H, Kiani Y, Žur KK. New insights into nonlinear stability of imperfect nanocomposite beams resting on a nonlinear medium. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2023;118:106993.
- [8] Sahmani S, Fattahi AM, Ahmed N. Analytical treatment on the nonlocal strain gradient vibrational response of postbuckled functionally graded porous micro-/nanoplates reinforced with GPL. *Engineering with Computers*. 2020;36:1559-78.
- [9] Zhang J, Yao Y. Strain gradient theory-based vibration analyses for functionally graded microbeams reinforced by GPL. *Physica Scripta*. 2024;99:045966.
- [10] Pham SD, Karamanli A, Wattanasakulpong N, Vo TP. A Quasi-3D theory for bending, vibration and buckling analysis of FG-CNTRC and GPLRC curved beams. *Structures: Elsevier*; 2024. 106431.
- [11] Zhang L, Xu Z, Gao M, Xu R, Wang G. Static, dynamic and buckling responses of random functionally graded beams reinforced by graphene platelets. *Engineering Structures*. 2023;291:116476.
- [12] Shahmohammadi MA, Azhari M, Salehipour H, Thai H-T. Buckling of multilayered CNT/GPL/fibre/polymer hybrid composite plates resting on elastic support using modified nonlocal first-order plate theory. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*. 2022;52:1785-810.
- [13] Hosseini S, Torabi J, Ansari R, Zabihi A. Geometrically nonlinear electromechanical instability of FG nanobeams by nonlocal strain gradient theory. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. 2021;21:2150051.
- [14] Jorshari TD, Roudbari MA. A Review on the Mechanical Behavior of Size-Dependent Beams and Plates using the Nonlocal Strain-Gradient Model. *Journal of Basic & Applied Sciences*. 2021;17:184-93.
- [15] Khorshidi K, Ghasemi M, Bahrami M. Buckling Analysis of a Functionally Graded unidirectional rectangular Plate considering the surface effect. *Mechanics of Advanced and Smart Materials*. 2023;3(1)21-53.
- [16] Khorshidi K, Karimi M, Rezaeisaray M. Piezoelectric Energy Harvesting from Functionally Graded Beams Using Modified Shear Deformation Theories. *Mechanics of Advanced and Smart Materials*. 2022;1(2):136-154.
- [17] Hosseini-Hashemi K, Talebitooti R, Hosseini-Hashemi SH. The exact characteristic equation of frequency and mode shape for transverse vibrations of non-uniform and nonhomogeneous Euler Bernoulli beam with general non-classical boundary conditions at both ends. *Mechanics of Advanced and Smart Materials*. 2023; 3(1): 1-20.
- [18] Taheri M, Ghane F. Investigating the effective parameters on the mechanical properties of composites reinforced by jute fiber in the compression molding process. *Mechanics of Advanced and Smart Materials*. 2024;3(4):413-431.
- [19] Lim C, Zhang G, Reddy J. A higher-order nonlocal elasticity and strain gradient theory and its applications in wave propagation. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2015;78:298-313.
- [20] Li L, Hu Y. Buckling analysis of size-dependent nonlinear beams based on a nonlocal strain gradient theory. *International Journal of Engineering Science*. 2015;97:84-94.

- [21] Haghani A, Kiani Y. Closed Form Expressions for Nonlinear Analysis of FG-GPLRC Beam Under Thermal Loading: Thermal Postbuckling and Nonlinear Bending. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. 2024;24:2450016.