



Exact analysis of transverse free vibration behavior of AFGM Timoshenko beams with general boundary conditions and tip masses

Najmeh Salemian ^a, Mohsen Bambaechee ^{b*}

^a Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering Science, Quchan University of Technology, Quchan,
Postcode 94771-77870, Iran

Original Article

Use your device to scan
and read the article online



Citation: Salemian N, Bambaechee M. Exact analysis of transverse free vibration behavior of AFGM Timoshenko beams with general boundary conditions and tip masses. *Mechanics of Advanced and Smart Materials*. 2024;4(2):272-307

 <https://10.61186/masm.4.2.272>

KEYWORDS

exact analysis,
transverse free vibration,
AFGM Timoshenko beam
theory,
elastic supports,
tip mass.

ABSTRACT

This paper proposes an approach for the exact solution of the transverse free vibration of exponential axially functionally graded material (AFGM) Timoshenko beams with concentrated tip masses and general boundary conditions. Initially, by utilizing the governing equilibrium equations of a Timoshenko beam, the main differential equation for the free vibration of the AFGM Timoshenko beam is obtained. Then, the beam deformation function is achieved by solving the governing equation of the beam vibration exactly. Subsequently, by applying the boundary conditions, the constant coefficient matrix of the beam becomes available. By making the determinant of the constant coefficients zero, the characteristic equation of the system and consequently, the beam's natural frequencies are obtained. It is noteworthy that the final relation is presented so that it can be used to find the exact frequencies of homogeneous and inhomogeneous Euler-Bernoulli, Rayleigh, and shear beams, too. Numerical examples demonstrate the accuracy of the results obtained by the proposed method. In the next section of the paper, the effect of the exponential gradient index, elastic end supports, concentrated tip mass, rotational inertia of the concentrated mass, and thickness-to-length ratio on the natural frequencies and mode shapes of the Timoshenko beam is investigated. The results show that the exponential gradient index, boundary conditions, concentrated tip mass, and thickness-to-length ratio play an influential role in the dynamic behavior of AFGM beams.

Extended Abstract

1. Introduction

In previous years, with the expansion of the industry and the need for a material resistant to extended thermal and mechanical loading, Functionally graded material (FGM) was introduced as a thermal coating in a space shuttle project. Today, the concept of FGM is a very new idea that has wide applications in various fields of engineering. The material properties of beams made of FGM can be changed in the direction of thickness, in axially functionally graded material (AFGM) or bi-directional functionally graded material (BDFGM). In this research, the behavior of the second category, that is, AFGM beams, has been investigated. Since FGM beams are mostly used as moving components in engineering structures, the vibration analysis of these components has been studied by many researchers. For example, Tang et al. [1] presented an exact solution for the free vibration of an

* Corresponding author. Tel.: +98 5147017231; Fax: +98 5147343001

E-mail address: m.bambaechee@qiet.ac.ir

DOI: <https://10.61186/masm.4.2.272>

Received: April 26, 2024; Received in revised form: July 15, 2024; Accepted: August 13, 2024

© Author



axial-graded Timoshenko beam with exponential gradient and common boundary conditions. Rajasekaran and Norouzzadeh [2] investigated the free vibration characteristics of Timoshenko beams with cross-sectional characteristics and different material properties along the beam axis. Since the use of the differential transformation method (DTM) does not provide satisfactory answers, they presented the differential transformation element method (DTEM) which significantly increases the accuracy of the answers. Mohammadnejad et al. [3] presented a simple method to analyze the free vibration of the Timoshenko beam with the help of weakened integral equations. By transforming the governing differential equation into a weakened form and approximating the vibration mode shape function with a power series, they obtained a system of linear algebraic equations. Shi et al. [4] made available the free vibration analysis of Timoshenko beams with elastic supports by using the Fourier series. Ghannadiasl and Mofid [5] investigated the free vibration solution of Timoshenko beams with elastic supports which are under the effect of axial force and on Winkler's elastic foundation. Green's function has been utilized to accurately model a uniform Timoshenko beam with arbitrary boundary conditions in their research. Yuan et al. [6] introduced a novel approach to streamline the equations that govern the natural oscillation of Timoshenko beams with varying properties along the beam axis. This research evaluates the functions of exponential gradient, power, and their combination. Da Costa et al. [7] examined the transverse vibrations of a uniform Timoshenko beam with elastic supports, employing the finite element method (FEM). Bambill et al. [8] studied the transverse free vibrations of beams that have varying cross-sections and are axially graded. The equations of motion were derived using Hamilton's principle, the desired points were obtained using Chebyshev polynomials, and the problem was solved using the difference quadrature method (DQM). Huang et al. [9] examined the buckling behavior of non-uniform Timoshenko beams with varying material properties and compared it to the behavior of uniform Timoshenko beams. They utilized definite functions and power series in their evaluation. They compared the findings they obtained with the exact values of the critical buckling load of a Timoshenko beam and an Euler-Bernoulli beam. Soltani [10] studied the free vibration characteristics of a graded tapering Timoshenko beam subjected to an axial load and concentrated forces at both ends. The semi-analytical method of power series was employed for the analysis. Bozyigit et al. [11] studied the impact of compressive axial force and viscous damping on the natural frequencies of the Timoshenko beam under various boundary conditions using the differential transformation method (DTM) and dynamic stiffness method (DSM). Zhang et al. [12] conducted a comprehensive review of the research carried out in the field of stability, buckling, and free vibration of FGM materials in the past decade. Kumar [13] compared the results of the dynamic behavior of a Timoshenko beam and an Euler-Bernoulli beam with a graded function on an elastic foundation. Zahedinejad et al. [14] explored the structural characteristics of graded functional materials and provided a concise overview of the analytical and numerical methods used for vibration analysis of FG beams and micro-beams. Pala et al. [15] studied the damped vibration of a Timoshenko beam with uniform cracks, where the ends were restrained by linear and rotational damper springs. This review discusses the intricate frequency equations for Euler-Bernoulli and cracked Timoshenko beams. Fogang [16] introduced an approach utilizing the finite difference method (FDM), known as the direct time integration method (DTIM). This approach enables the analysis of free vibration of nonradiative Timoshenko beams with axially functionally graded (AFG) by considering damping, through the introduction of additional points at the boundaries and discontinuity points. Bambaeechee [17] studied the free vibration of polynomial and exponential axially functionally graded (AFG) beams with lumped end masses and elastic supports. In addition, the researcher examined the impact of axial eccentricity and rotational inertia of concentrated masses using the Euler-Bernoulli beam theory. Sharma et al. [18] introduced a computational model that examines the vibration characteristics of beams with exponential gradients in a common support condition. In this study, the beam's mechanical properties exhibit exponential variation along its length, while the width of the beam also changes exponentially in the same direction. Bambaeechee et al. [19] provided a comprehensive analysis of the free transverse vibration of AFGM beams with exponential gradient and general boundary conditions, utilizing the Euler-Bernoulli beam approach. The study examined how different factors, such as elastic supports, connected tip mass, and exponential gradient index, influenced the natural frequencies and vibration mode shapes of AFGM beams with both symmetric and asymmetric boundary conditions. Gautam et al. [20] modeled the FGM beam under an extended exponential law and common boundary conditions using MATLAB software. Khorshidi et al. [21] investigated the effect of various parameters on the vibration properties and energy harvesting of FG beams based on modified shear deformation theories. Hosseini-Hashemi et al. [22] proposed a unique approach to investigate the free vibrations of non-uniform and FG Euler-Bernoulli beams using Cauchy's formula. In another research, Hosseini-Hashemi et al. [23] presented the exact characteristic equation of frequency and mode shape for transverse vibrations of non-uniform and non-homogeneous Euler-Bernoulli beam with general non-classical

boundary conditions at both ends. Reviewing the research conducted in the field of free vibration of beams, it is evident that there is a gap in the investigation of the effect of elastic supports and end-centered mass on the functionally graded Timoshenko beam with variable display characteristics, despite the various methods used to study the transverse vibrations of heterogeneous beams. This research aims to provide a solution for the differential equation of free vibration of an axially functionally graded material (AFGM) beam. The Timoshenko beam theory is used, considering the impact of end elastic supports and end concentrated mass. With the proposed solution, it becomes possible to differentiate between different types of beams and comprehensively solve these beam models. It is reminded that, based on the applicants of FGM such as the biomaterial in biomedical engineering, rocket structures and the outer wall of spacecraft in the aerospace industry, thermoelectric sensors and generators in industrial automation and electromagnetic [24], better recognition and more accurate evaluation of the dynamic behavior of FGM beams, especially with various support conditions, is an inevitable thing that can lead to more suitable and optimal final designs in these areas.

2. Theoretical Formulation

A beam of length L with axial coordinate x is shown in Figure 1. The material properties, i.e., mass density, elastic modulus, and shear modulus of the AFGM beam continuously vary in the axial direction as the following exponential functions [18]:

$$\rho(x) = (\rho)_0 e^{2\beta(x/L)}, E(x) = (E)_0 e^{2\beta(x/L)}, G(x) = (G)_0 e^{2\beta(x/L)} \quad (1)$$

Where β is the dimensionless exponential gradient index, E , G , and ρ denote the modulus of elasticity, shear modulus, and mass density, respectively. Further, to model the elastic supports, linear rotational and translational springs are utilized. The subscripts 0 and L refer to the start and end of the beam, respectively. k_{R0} , k_{RL} , k_{T0} , and k_{TL} denote the rotational spring stiffness at the start, rotational spring stiffness at the end, translational spring stiffness at the start, and translational spring stiffness at the end of the beam, respectively. For simplicity, the following dimensionless mass ratios (α_0 , α_L , γ_0 , and γ_L), stiffness coefficient (K_{R0} , K_{RL} , K_{T0} , and K_{TL}), and stiffness ratios (R_0 , R_L , T_0 , and T_L) are introduced:

$$\alpha_0 = \frac{M_0}{\rho AL}, \alpha_L = \frac{M_L}{\rho AL}, \gamma_0 = \sqrt{\frac{J_0}{\rho AL^3}}, \gamma_L = \sqrt{\frac{J_L}{\rho AL^3}} \quad (2)$$

$$K_{R0} = \frac{k_{R0}L}{EI}, K_{RL} = \frac{k_{RL}L}{EI}, K_{T0} = \frac{k_{T0}L^3}{EI}, K_{TL} = \frac{k_{TL}L^3}{EI}. \quad (3)$$

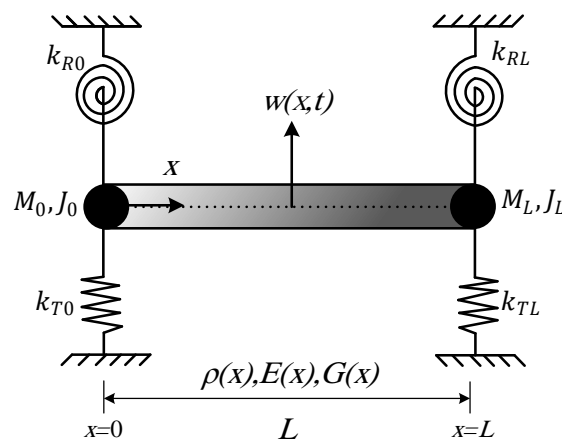


Figure 1. Schematic of the exponential AFGM beam with general boundary conditions and tip masses

$$R_0 = \frac{K_{R0}}{1 + K_{R0}}, R_L = \frac{K_{RL}}{1 + K_{RL}}, T_0 = \frac{K_{T0}}{1 + K_{T0}}, T_L = \frac{K_{TL}}{1 + K_{TL}}. \quad (4)$$

Accordingly, when the stiffness coefficients (K_{R0} , K_{RL} , K_{T0} , and K_{TL}) vary from 0 to ∞ , the corresponding stiffness ratios (R_0 , R_L , T_0 , and T_L) take values from 0 to 1. Next, by utilizing the Timoshenko beam theory, two basic governing differential equations representing the dynamic rotational and transverse equilibrium of a beam element are expressed:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\kappa A G_0 e^{2\beta(x/L)} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \varphi \right) \right] - \rho_0 A e^{2\beta(x/L)} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[E_0 I e^{2\beta(x/L)} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] - \kappa A G_0 e^{2\beta(x/L)} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \varphi \right) - \rho_0 I e^{2\beta(x/L)} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad (6)$$

Where A is the cross-sectional area, I is the second-order moment of cross-sectional area, κ is the shear correction factor, φ is the rotation of the cross-section at the neutral surface, and w is the transverse deflection of the neutral surface. By separating the variable φ in Equation (5), the following relation holds:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{2\beta}{L} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\rho_0 A}{\kappa A G_0} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{2\beta}{L} \varphi \quad (7)$$

Finally, by substituting the derivatives of Equation (7) into the derivative of Equation (6) with respect to x , the governing differential equation for the free vibration of the AFGM Timoshenko beam is obtained as follows:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{4\beta}{L} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \left(\frac{2\beta}{L}\right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \left[\frac{\rho_0 A}{\kappa A G_0} + \frac{\rho_0 I}{E_0 I} \right] \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} - \frac{2\beta}{L} \left[\frac{\rho_0 A}{\kappa A G_0} + \frac{\rho_0 I}{E_0 I} \right] \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} + \frac{\rho_0 A}{E_0 I} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\rho_0 A \rho_0 I}{\kappa A G_0 E_0 I} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} = 0 \quad (8)$$

Since only harmonic vibration is considered, one may take w and φ in the form:

$$w(x, t) = W(x) \sin \omega t, \quad \varphi(x, t) = \psi(x) \sin \omega t \quad (9)$$

Where W and ψ are the amplitudes of vibration and bending rotation, and ω is the angular frequency. For the convenience of later analysis, let us introduce the following dimensionless quantities:

$$\xi = \frac{x}{L}, U = \frac{W}{L}, r^2 = \frac{\rho_0 I}{\rho_0 A L^2}, s^2 = \frac{E_0 I}{\kappa A G_0 L^2}, \Omega^2 = \frac{\rho_0 A}{E_0 I} L^4 \omega^2 \quad (10)$$

The parameter r reflects the effect of rotational inertia of the cross-section, and s characterizes the effect of shear deformation. By substituting the response functions and utilizing Equations (10), Equations (7) and (8) can be rewritten as [1]:

$$\frac{d\psi}{d\xi} + 2\beta\psi = -\frac{d^2 U}{d\xi^2} - 2\beta \frac{dU}{d\xi} - s^2 \Omega^2 U, \quad (11)$$

$$\frac{d^4 U}{d\xi^4} + 4\beta \frac{d^3 U}{d\xi^3} + [4\beta^2 + (r^2 + s^2)\Omega^2] \frac{d^2 U}{d\xi^2} + 2\beta(r^2 + s^2)\Omega^2 \frac{dU}{d\xi} + (r^2 s^2 \Omega^2 - 1)\Omega^2 U = 0 \quad (12)$$

for a functionally graded Timoshenko beam, we have $s \neq 0$ and $r \neq 0$. A functionally graded Rayleigh beam can be reduced only if setting $s = 0$, while a shear beam can be reduced by setting $r = 0$, respectively. If further setting $r = 0$ and $s = 0$ simultaneously, an axially graded Euler–Bernoulli beam is recovered, where both shear deformation and rotational inertia are neglected. It should be noted that by using the relationship between the shear model and elastic modulus, it can be said that by keeping Poisson's ratio ($\nu=0.3$) and the shear correction factor for a rectangular section ($\kappa=5/6$) constant, the effect of rotational inertia (r) and the effect of shear deformation of the section (s) which were introduced in Equation (12), only depend on the thickness-to-length ratio of the beam (h/L) [25]:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}, r^2 = \frac{1}{12} \left(\frac{h}{L}\right)^2, s^2 = \frac{(1+\nu)}{6\kappa} \left(\frac{h}{L}\right)^2 \quad (13)$$

Subsequently, the general solution for the lateral deformation of the beam per unit length (U) and the rotation due to bending deformations (ψ) can be expressed by the following functions:

$$U(\xi) = C e^{\lambda \xi}, \psi(\xi) = H e^{\lambda \xi} \quad (14)$$

Where C and H are the unknown constants related to the functions $U(\xi)$ and $\psi(\xi)$, respectively. The characteristic equation of Equation (12) is:

$$\lambda^4 + 4\beta\lambda^3 + [4\beta^2 + (r^2 + s^2)\Omega^2]\lambda^2 + 2\beta(r^2 + s^2)\Omega^2\lambda + (r^2 s^2 \Omega^2 - 1)\Omega^2 = 0 \quad (15)$$

Solving the above equation results in four roots as follows:

$$\lambda_{1,3} = \begin{cases} -\beta \pm \delta_1, \Omega < \Omega_{cr}^{[1]} \\ -\beta \pm i\delta_1, \Omega \geq \Omega_{cr}^{[1]} \end{cases}, \lambda_{2,4} = \begin{cases} -\beta \pm \delta_2, \Omega < \Omega_{cr}^{[2]} \\ -\beta \pm i\delta_2, \Omega \geq \Omega_{cr}^{[2]} \end{cases} \tag{16}$$

where we have used notations

$$\Omega_{cr}^{[1]} = \beta^2 \sqrt{\frac{2}{1 + \beta^2(r^2 + s^2) + \sqrt{1 + 2\beta^2(r^2 + s^2) + \beta^4(r^2 - s^2)^2}}}} \tag{17}$$

$$\Omega_{cr}^{[2]} = \frac{1}{rs} \sqrt{\frac{1 + \beta^2(r^2 + s^2) + \sqrt{1 + 2\beta^2(r^2 + s^2) + \beta^4(r^2 - s^2)^2}}{2}} \tag{18}$$

$$\delta_1 = \begin{cases} \frac{\sqrt{4\beta^2 - 2[\sqrt{(r^2 - s^2)^2\Omega^4 + 4\Omega^2 + (r^2 + s^2)\Omega^2]}}}{2}, \Omega < \Omega_{cr}^{[1]} \\ 0, \Omega = \Omega_{cr}^{[1]} \\ \frac{\sqrt{2[\sqrt{(r^2 - s^2)^2\Omega^4 + 4\Omega^2 + (r^2 + s^2)\Omega^2]} - 4\beta^2}}{2}, \Omega > \Omega_{cr}^{[1]} \end{cases} \tag{19}$$

$$\delta_2 = \begin{cases} \frac{\sqrt{4\beta^2 + 2[\sqrt{(r^2 - s^2)^2\Omega^4 + 4\Omega^2 - (r^2 + s^2)\Omega^2]}}}{2}, \Omega < \Omega_{cr}^{[2]} \\ 0, \Omega = \Omega_{cr}^{[2]} \\ \frac{\sqrt{2[(r^2 + s^2)\Omega^2 - \sqrt{(r^2 - s^2)^2\Omega^4 + 4\Omega^2}] - 4\beta^2}}{2}, \Omega > \Omega_{cr}^{[2]} \end{cases} \tag{20}$$

We can directly write the corresponding expressions for the mode shape with the three possible cases above. They are:

$$U(\xi) = e^{-\beta\xi} [C_1 \cosh(\delta_1\xi) + C_2 \sinh(\delta_1\xi) + C_3 \cosh(\delta_2\xi) + C_4 \sinh(\delta_2\xi)], \Omega < \Omega_{cr}^{[1]} \tag{21}$$

$$U(\xi) = e^{-\beta\xi} [C_1 \cos(\delta_1\xi) + C_2 \sin(\delta_1\xi) + C_3 \cosh(\delta_2\xi) + C_4 \sinh(\delta_2\xi)], \Omega_{cr}^{[1]} < \Omega < \Omega_{cr}^{[2]} \tag{22}$$

$$U(\xi) = e^{-\beta\xi} [C_1 \cos(\delta_1\xi) + C_2 \sin(\delta_1\xi) + C_3 \cos(\delta_2\xi) + C_4 \sin(\delta_2\xi)], \Omega > \Omega_{cr}^{[2]} \tag{23}$$

$$U(\xi) = e^{-\beta\xi} [C_1 + C_2\xi + C_3 \cosh(\delta_2\xi) + C_4 \sinh(\delta_2\xi)], \Omega = \Omega_{cr}^{[1]} \tag{24}$$

$$U(\xi) = e^{-\beta\xi} [C_1 + C_2\xi + C_3 \cos(\delta_1\xi) + C_4 \sin(\delta_1\xi)], \Omega = \Omega_{cr}^{[2]} \tag{25}$$

If considering the frequencies lying in $\Omega_{cr}^{[1]} < \Omega < \Omega_{cr}^{[2]}$, the mode shape of rotation ψ can be expressed as:

$$\psi(\xi) = e^{-\beta\xi} [H_1 \cos(\delta_1\xi) + H_2 \sin(\delta_1\xi) + H_3 \cosh(\delta_2\xi) + H_4 \sinh(\delta_2\xi)] \tag{26}$$

Substituting Eq. (22) and Eq. (26) into Eq. (11) leads to

$$H = J^{-1}NC \tag{27}$$

With

$$J = \begin{bmatrix} \beta & \delta_1 & 0 & 0 \\ -\delta_1 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & \delta_2 \\ 0 & 0 & \delta_2 & \beta \end{bmatrix} \tag{28}$$

$$N = \begin{bmatrix} -s^2\Omega^2 + \beta^2 + \delta_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -s^2\Omega^2 + \beta^2 + \delta_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -s^2\Omega^2 + \beta^2 - \delta_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s^2\Omega^2 + \beta^2 - \delta_2^2 \end{bmatrix} \tag{29}$$

$$H = [H_1 \ H_2 \ H_3 \ H_4]^T, C = [C_1 \ C_2 \ C_3 \ C_4]^T \tag{30}$$

Where C_j and H_j are constants, the superscript T specifies the transpose of a vector or matrix, and the superscript -1 stands for the inverse of a matrix. Additionally, substituting Eq. (27) with Eq. (26) gives the rotation.

$$\psi(\xi) = e^{-\beta\xi} H^T V = e^{-\beta\xi} C^T N^T (J^{-1})^T V \tag{31}$$

Where

$$V = [\cos(\delta_1 \xi) \quad \sin(\delta_1 \xi) \quad \cosh(\delta_2 \xi) \quad \sinh(\delta_2 \xi)]^T \quad (32)$$

Finally, the following relations are proposed to calculate the lateral deformation of the beam per unit length (U), rotation due to bending deformations (ψ), bending moment (M), and shear force (Q):

$$U = e^{-\beta \xi} C^T V, \psi = e^{-\beta \xi} C^T N^T (J^{-1})^T V \quad (33)$$

$$M = \frac{E_0 I}{L} e^{\beta \xi} C^T N^T (J^{-1})^T \left(-\beta + \frac{d}{d\xi} \right) V, Q = \kappa A G_0 e^{\beta \xi} C^T \left(-\beta + \frac{d}{d\xi} + N^T (J^{-1})^T \right) V \quad (34)$$

By substituting the relations for bending moment (M) and shear force (Q), the general boundary conditions of the AFGM Timoshenko beam can be written as:

$$(1 - R_0) \frac{d\psi}{d\xi} - R_0 \psi(\xi) + (1 - R_0) \gamma_0^2 \Omega^2 \psi(\xi) = 0 \quad \xi = 0 \quad (35-a)$$

$$\frac{(1 - T_0)}{s^2} \left(\frac{dU}{d\xi} + \psi \right) - T_0 U(\xi) + (1 - T_0) \alpha_0 \Omega^2 U(\xi) = 0 \quad \xi = 0 \quad (35-b)$$

$$(1 - R_L) e^{2\beta \xi} \frac{d\psi}{d\xi} + R_L e^{2\beta \xi} \psi(\xi) - (1 - R_L) \gamma_L^2 \Omega^2 \psi(\xi) = 0 \quad \xi = 1 \quad (35-c)$$

$$\frac{(1 - T_L)}{s^2} e^{2\beta \xi} \left(\frac{dU}{d\xi} + \psi \right) + T_L e^{2\beta \xi} U(\xi) - (1 - T_L) \alpha_L \Omega^2 U(\xi) = 0 \quad \xi = 1 \quad (35-d)$$

Subsequently, by utilizing the proposed relations to calculate the lateral deformation of the beam per unit length (U) and rotation due to bending deformations (ψ) in Equation (35) and arrange them based on the unknown constants, a four equation-four the unknown system is obtained in matrix form as follows:

$$KC = 0, K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} \quad (36)$$

Where C and K are the vectors of unknown constants of lateral deformation and the matrix of constant coefficients of free vibration of the beam, respectively. The above system of equations has a solution only if the determinant of the coefficient matrix becomes zero. The characteristic equation of the determinant of the beam is obtained by making a coefficient matrix govern the free vibration of the structure zero. This is based on the principle that the characteristic equation is derived by setting the determinant equal to zero. The system's natural frequencies and, consequently, the structure's mode shapes become available by finding the real roots of the characteristic equation. The characteristic equation obtained from Expression (36) is presented in such a way that the principle governing Equation (12) also applies to the characteristic equation of the AFGM Timoshenko beam with general boundary conditions. In other words, if in the characteristic equation of the exponential functionally graded Timoshenko beam obtained from Expression (36), the effects of rotational inertia (r) and shear deformation (s) are neglected, the characteristic equation reduces to that of the exponential functionally graded Euler-Bernoulli beam. If only the effect of shear deformation (s) is neglected, the characteristic equation becomes that of the inhomogeneous Rayleigh beam. If only the effect of rotational inertia (r) is assumed to be zero in the final characteristic equation, the characteristic equation of the axial graded shear beam is obtained. By considering the exponential gradient index (β) as zero in the final characteristic equation, the characteristic equation of the homogeneous beam is obtained. It should be added that the equations obtained are used only for the free vibration of beams on a macroscopic scale. Accordingly, the forced vibration of beams or considering the microscopic scale can be evaluated in future research.

3. Numerical Comparisons

In this section, to validate the proposed formulation, the natural frequency coefficient (Ω_n) is calculated for an example with elastic boundary conditions and the results are presented in Table 1. The examined sample is a homogeneous beam with different thickness-to-length ratios (h/L) in which all the rotational and translational stiffness coefficients at the start and end of the beam are variable ($\beta=0, R_0=R_L=var., T_0=T_L=var$) Based on the findings in Table 1, it is evident that the proposed formulation has high efficiency and accuracy in comparison with valid research.

Table 1. Comparison of non-dimensional frequency for the uniform beam with elastic rotational and translational end supports

h/L	$T_o=T_L$	$R_o=R_L$	Ω_n	Present	Bambaechee et al., [19]	Bambaechee [26]	Ghannadisl and Mofid [5]	Lai et al., [27]
0.0	5/6	5/6	$n=1$	3.10979	3.10979	3.10993	-	-
			$n=2$	8.83788	8.83790	8.83813	-	-
			$n=3$	31.80149	31.80148	31.80170	-	-
0.0	10/11	10/11	$n=1$	4.36082	4.36083	4.36100	4.3608	4.36100
			$n=2$	10.69890	10.69859	10.69879	10.699	10.69879
			$n=3$	34.89180	34.89182	34.89147	34.892	34.89147
		1/2	$n=1$	1.40219	-	-	1.4022	-
			$n=2$	4.64050	-	-	4.6405	-
			$n=3$	18.93359	-	-	18.934	-
0.1	1/2	10/11	$n=1$	1.40704	-	-	1.4070	-
			$n=2$	7.59296	-	-	7.5930	-
			$n=3$	23.42314	-	-	23.423	-

Table 2. Comparison of non-dimensional frequency for the elastic cantilever AFGM beam with tip mass

h/L	Ω_n	$R_L=T_L=\alpha_o=\gamma_o$		
		0.1 (low stiffness)	0.5 (moderate stiffness)	0.9 (high stiffness)
0.0	$n=1$	0.36816	0.92162	1.76845
	$n=2$	1.44503	3.05967	5.71078
	$n=3$	19.85696	18.49921	22.17594
0.2	$n=1$	0.36782	0.89372	1.15789
	$n=2$	1.38021	1.93018	2.63125
	$n=3$	14.21979	6.41007	7.87456
0.4	$n=1$	0.36732	0.88741	1.14957
	$n=2$	1.31991	1.91399	2.50470
	$n=3$	12.61241	5.91137	7.10390

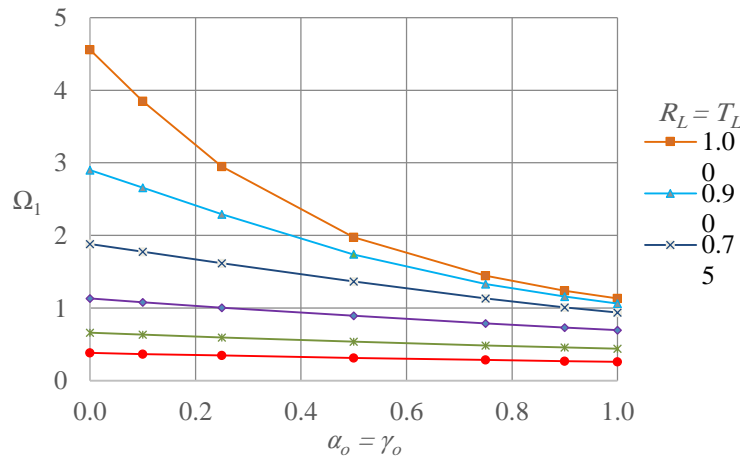


Figure 2. Variation of the first non-dimensional frequency for the elastic cantilever AFGM beam with tip mass ($h/L=0.2$)

In the following, to present the effects of the elastic supports and tip mass on the free vibration analysis, the natural frequency coefficient (Ω_n) is calculated for an elastic cantilever AFGM beam with tip mass and the samples of numerical and graphical results are shown in Table 2 and Figure 2, respectively. The examined sample is an inhomogeneous beam with different thickness-to-length ratios (h/L) in which the rotational and translational stiffness coefficients at the end of the beam and dimensionless mass ratios at the start of the beam are variable ($\beta=0.5$, $R_L=T_L=var.$, $\alpha_o = \gamma_o=var.$). Based on the results in Table 2 and Figure 2, it is found that the elastic supports, concentrated tip mass, and thickness-to-length ratio play an influential role in the dynamic responses of AFGM beams.

4. Conclusion

This paper proposed an exact formulation to calculate the natural frequencies with general boundary conditions encompassing different beam deformation patterns. The findings of this research can be used to verify other analytical and numerical methods. Based on the obtained responses from evaluating the effect of various factors on the exact values of natural frequencies in different patterns, the following conclusions can be drawn:

- 1- When examining the impact of various theories of beam deformation on beams with common boundary conditions, it was found that Timoshenko's AFGM beam had the lowest fundamental natural frequency, while Euler-Bernoulli's double-ended AFGM beam with the exponential gradient index absolute value of one ($|\beta|=1$) had the highest.
- 2- Upon examining various deformation theories, it has been observed that shear beams are a reliable approximation for modeling Timoshenko beams. For instance, in the case of a homogeneous beam with common boundary conditions, the natural frequency of the first mode of the Timoshenko beam is found to be less than one percent different from that of the shear beam.
- 3- By increasing the thickness-to-length ratio for all boundary conditions, the natural frequency coefficient of the system decreases. However, the intensity of frequency reduction in higher modes is more significant. Additionally, at higher thickness-to-length ratios, the intensity of frequency reduction is more pronounced.
- 4- By increasing the stiffness of elastic supports, the natural frequencies of the system increase. However, the intensity and range of changes in natural frequency are higher in lower modes compared to higher modes.
- 5- By increasing the concentrated mass coefficient, natural frequencies decrease. The range of changes in vibration frequencies in lower concentrated mass coefficients (0 to 0.1 range) is more than other ranges.
- 6- Increasing the stiffness of elastic supports at higher thickness-to-length ratios decreases the intensity and range of changes in natural frequencies. In other words, vibration frequencies in thicker beams have less sensitivity to variations in the stiffness of rotational and translational springs. For example, in the AFGM beam with both rotational and rotational elastic supports, increasing the stiffness of rotational and rotational elastic supports has the least effect on the natural frequencies of the beam with a thickness-to-length ratio of 0.4; In such a way that in high hardness, the natural frequency of the first mode will be about 8.5 times compared to the minimum mode. Against that, increasing the stiffness of elastic supports has the greatest effect on the natural frequencies of the Euler-Bernoulli beam ($h/L=0$); In such a way that in high hardness, the natural frequency of its first mode will be 9 times compared to the minimum mode.
- 7- The effect of variations in the stiffness of translational springs on vibration frequencies of the system is greater than the stiffness of rotational springs.
- 8- For the AFGM beam with elastic boundary conditions and symmetric tip mass, the minimum natural frequency occurs for the homogeneous beam ($\beta = 0$). Also, due to the symmetric boundary conditions of the beam, the graph of natural frequency changes against the change index is symmetric.
- 9- Increasing the thickness-to-length ratio of a beam and adding concentrated mass can have a significant impact on the deformation of vibration modes. However, the effect of increasing the ratio of beam thickness to length becomes weaker in the presence of concentrated mass.
- 10- Increasing the thickness-to-length ratio of a beam and the stiffness of its elastic supports can significantly affect its vibration modes. However, as the stiffness of the supports reduces, the effect of increasing the thickness-to-length ratio of the beam becomes weaker.
- 11- By investigating the effect of thickness increase on the mode shapes of AFGM beam vibration, it was found that the influence of shear in higher vibration modes is more noticeable compared to lower vibration modes due to the decrease in the half wavelength of the mode.



تحلیل دقیق رفتار ارتعاش آزاد عرضی تیرهای تیموشنکوی تابعی درجه‌ای محوری با شرط‌های مرزی کلی و جرم‌های انتهایی

نجمه سالمیان الف، محسن بمبائی چی ب*

الف کارشناسی ارشد، گروه مهندسی عمران، دانشکده علوم مهندسی، دانشگاه صنعتی قوچان، قوچان، ایران، salemian1372.n@gmail.com
ب استادیار، گروه مهندسی عمران، دانشکده علوم مهندسی، دانشگاه صنعتی قوچان، قوچان، ایران، m.bambaechee@qiet.ac.ir

چکیده	واژگان کلیدی
این پژوهش، راهکاری برای حل دقیق ارتعاش آزاد عرضی تیرهای تیموشنکوی تابعی درجه‌ای محوری نمایی با جرم‌های متمرکز انتهایی و شرط‌های مرزی کلی، ارائه می‌دهد. در آغاز، با بهره‌جویی از معادلات تعادل حاکم بر تیر تیموشنکو، معادله دیفرانسیل اصلی ارتعاش آزاد تیر تیموشنکوی AFGM به دست می‌آید. سپس، با حل دقیق معادله‌ی حاکم بر ارتعاش آزاد تیر، تابع تغییر شکل تیر به دست می‌آید. در ادامه، با وارد کردن شرط‌های مرزی، ماتریس ضریب‌های ثابت تیر در دسترس قرار می‌گیرد. با صفر پنداشتن درمیان ضریب‌های ثابت، معادله مشخصه‌ی سیستم و به دنبال آن، فرکانس‌های طبیعی تیر به دست می‌آیند. شایان توجه است رابطه‌ی نهایی به‌گونه‌ای ارائه شده است که می‌تواند برای یافتن فرکانس‌های دقیق تیرهای همگن و ناهمگن اولر- برنولی، ریلی و برشی هم مورد استفاده قرار گیرد. نمونه‌های عددی، گویای درستی پاسخ‌های حاصل از روش پیشنهادی می‌باشند. در بخش بعدی نوشتار، تأثیر شاخص تغییرات نمایی، تکیه‌گاه‌های کشسان انتهایی، جرم متمرکز انتهایی، اینرسی چرخشی جرم متمرکز و نسبت ضخامت به طول تیر، بر روی فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای ارتعاشی تیر تیموشنکو بررسی شده است. نتایج نشان می‌دهد که شاخص تغییرات نمایی، تکیه‌گاه‌های انتهایی، جرم متمرکز انتهایی و نسبت ضخامت به طول تیر، نقش مؤثری در رفتار دینامیکی تیرهای AFGM دارند.	تحلیل دقیق، ارتعاش آزاد عرضی، الگوی تیر تیموشنکوی AFGM، تکیه‌گاه‌های کشسان، جرم متمرکز.
	تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۰۲/۰۷
	تاریخ بازنگری: ۱۴۰۳/۰۴/۲۵
	تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۰۵/۲۳

۱- مقدمه

در سال‌های پیشین، با گسترش صنعت و نیاز به ماده‌ای مقاوم در برابر بارگذاری حرارتی و مکانیکی، مواد تابعی مدرج^۱ (FGM) در یک پروژه‌ی شاتل فضایی به‌عنوان روکش گرمایی معرفی شدند. امروزه مفهوم FGM، یک ایده‌ی بسیار نوین و جدید است که کاربردهای گسترده‌ای در زمینه‌های مختلف مهندسی دارد. از این مواد به سبب برتری‌های مکانیکی و ترمودینامیکی می‌توان در تجهیزات همجوشی مواد، مواد زیست پزشکی مانند استخوان و ایمپلنت‌های دندانپزشکی، صنایع هوافضا، هواپیماسازی، دفاعی و خودروسازی، کاربردهای الکترومغناطیسی مانند پیزوالکتریک‌ها، سپرهای مغناطیسی، وسایل ترموالکتریکی و سنسورها، پوشش عایق حرارتی پره‌های توربین‌ها، پوشش‌های حفاظت زرهی نظامی، موتورهای سرامیکی، تجهیزات ورزشی و صنایع

^۱ Functionally Graded Materials

هسته‌ای بهره جست. خواص مواد تیرهای ساخته شده از FGM می‌تواند در جهت ضخامت، در جهت محوری^۱ (AFGM) و یا در هر دو جهت^۲ (BDFGM) تغییر کند. در این پژوهش، رفتار دسته دوم، یعنی تیرهای AFGM مورد بررسی قرار گرفته است. از آنجایی که تیرهای FGM بیشتر به‌عنوان اجزای متحرک در سازه‌های مهندسی استفاده می‌شوند، تحلیل ارتعاش این اجزاء، توسط پژوهشگران بسیاری مورد مطالعه قرار گرفته است. برای نمونه، تانگ و همکاران [۱] حل دقیقی برای ارتعاش آزاد تیر تیموشنکوی تابعی درجه‌ای محوری با تغییرات نمایی و شرط‌های مرزی رایج، ارائه کردند. رجسکاران و نوروززاده [۲] به بررسی ویژگی‌های ارتعاش آزاد تیرهای تیموشنکو با مشخصات سطح مقطع و خواص مواد متفاوت در امتداد محور تیر، پرداختند. از آنجایی که استفاده از روش تبدیل دیفرانسیلی^۳ (DTM) پاسخ‌های رضایت بخشی را به دست نمی‌دهد، روش المان تبدیل دیفرانسیلی^۴ (DTEM) را ارائه کردند که دقت پاسخ‌ها را به‌طور قابل توجهی افزایش می‌دهد. محمدنژاد و همکاران [۳] یک روش ساده برای تحلیل ارتعاش آزاد تیر تیموشنکو به کمک معادلات انتگرالی ضعیف شده ارائه کردند. آن‌ها با تبدیل معادله دیفرانسیل حاکم به فرم ضعیف شده و تقریب تابع شکل مود ارتعاش با یک سری توانی، دستگاه معادلات جبری خطی را به دست آوردند. شی و همکاران [۴] تحلیل ارتعاش آزاد تیرهای تیموشنکو با تکیه‌گاه‌های کشسان را با بهره‌جویی از سری فوریه در دسترس قرار دادند. قنادی اصل و مفید [۵] حل ارتعاش آزاد تیرهای تیموشنکو با تکیه‌گاه‌های کشسان که زیر اثر نیروی محوری و بر روی بستر کشسان وینکلر^۵ قرار دارد را بررسی کردند. در پژوهش آن‌ها، از تابع گرین^۶ جهت مدل‌سازی دقیق تیر تیموشنکوی یکنواخت، با شرط‌های مرزی دلخواه بهره‌جویی شده است. یوان و همکاران [۶] روشی جدید برای ساده کردن معادلات حاکم بر ارتعاش آزاد تیرهای تیموشنکوی غیریکنواخت و ناهمگن در امتداد محور تیر، ارائه دادند. در این پژوهش، تابع‌های تغییرات نمایی، توانی و ترکیبی از آن‌ها، مورد ارزیابی قرار گرفته است. داکاستا و همکاران [۷] به تحلیل ارتعاشات عرضی تیر تیموشنکوی یکنواخت با تکیه‌گاه‌های کشسان، با استفاده از روش اجزای محدود^۷ (FEM) پرداختند. بمبیل و همکاران [۸] ارتعاشات آزاد عرضی تیرهای درجه‌بندی‌شده‌ی محوری با سطح مقطع متغیر را بررسی کردند. آن‌ها، معادلات حرکت را با استفاده از اصل همیلتون استخراج کردند؛ نقاط مورد نظر را با استفاده از چندجمله‌ای چیشیف^۸ به دست آوردند و از روش تفاضل مربعات^۹ (DQM)، برای حل مسئله بهره جستند. هوانگ و همکاران [۹] رفتار کمانشی تیر تیموشنکوی ناهمگن غیریکنواخت و تیر تیموشنکوی یکنواخت را با استفاده از تابع معین و سری توانی ارزیابی کردند. آن‌ها یافته‌های به‌دست‌آمده را با مقادیر دقیق بار کمانش بحرانی تیر تیموشنکو و تیر اولر-برنولی مقایسه کردند. سلطانی [۱۰] عامل‌های ارتعاش آزاد تیر تیموشنکوی باریک‌شونده‌ی درجه‌بندی‌شده زیر اثر بار محوری که نیروی متمرکزی در دو انتهای آن قرار داشت، با استفاده از روش نیمه‌تحلیلی سری‌های توانی بررسی کرد. بوزیگیگ و همکاران [۱۱] با بهره‌گیری از روش تبدیل دیفرانسیل (DTM) و روش سختی دینامیکی^{۱۰} (DSM)، اثرهای نیروی محوری فشاری و میرایی و اسکوز بر فرکانس‌های طبیعی تیر تیموشنکو در شرایط مرزی مختلف را بررسی کردند. ژانگ و همکاران [۱۲] مروری کلی بر پژوهش‌های صورت گرفته در زمینه‌ی پایداری، کمانش و ارتعاش آزاد مواد FGM در دهه‌ی اخیر انجام دادند. کومار [۱۳] یافته‌های حاصل از رفتار دینامیکی تیر تیموشنکو و تیر اولر-برنولی تابعی درجه‌بندی‌شده بر روی بستر کشسان را با یکدیگر مقایسه کرد. زاهدی‌نژاد و همکاران [۱۴] به بررسی ویژگی‌های ساختاری مواد تابعی درجه‌بندی‌شده و مرور کوتاه روش-های تحلیلی و عددی ارائه شده برای تحلیل ارتعاش تیرها و میکروتیرهای FG، پرداختند. پالا و همکاران [۱۵] ارتعاش میرای یک تیر تیموشنکوی یکنواخت ترک خورده با انتهای مهار شده با فنرهای دمپر، خطی و دورانی را بررسی کردند. در این بررسی،

¹ Axially Functionally Graded Materials

² Bi-Directional Functionally Graded Materials

³ Differential Transformation Method

⁴ Differential Transformation Element Method

⁵ Winkler Elastic Foundation

⁶ Green Function

⁷ Finite Element Method

⁸ Chebyshev

⁹ Difference Quadrature Method

¹⁰ Dynamic Stiffness Method

معادلات پیچیده‌ی فرکانس برای هر دو تیر اولر- برنولی و تیموشنکوی ترک خورده ارائه شده است. فوگانگ [۱۶] رویکردی مبتنی بر روش تفاوت محدود^۱ (FDM) ارائه کرد که روش ادغام زمان مستقیم^۲ (DTIM) نام گرفت. این رویکرد با معرفی نقاط اضافی در مرزها و نقاط ناپیوستگی، تحلیل ارتعاش آزاد تیرهای تیموشنکوی غیر منشوری با درجه‌بندی تابعی محوری را با در نظر گرفتن میرایی امکان‌پذیر ساخت. بمبائی‌چی [۱۷] به بررسی ارتعاش آزاد تیر چندجمله‌ای و نمایی محوری درجه‌بندی عملکردی (AFG) دارای جرم متمرکز انتهایی و تکیه‌گاه‌های الاستیک پرداخت. وی با بهره‌جویی از الگوی تیر اولر-برنولی، اثر خروج از مرکز محوری و اینرسی چرخشی توده‌های جرم متمرکز را بررسی کرد. شارما و همکاران [۱۸] مدل محاسباتی یک تیر تابعی درجه‌ای با تغییرات نمایی را برای نشان دادن ویژگی‌های ارتعاش این تیرها در شرطهای تکیه‌گاهی رایج، ارائه دادند. در این پژوهش، ویژگی‌های مکانیکی تیر به صورت نمایی در جهت طولی متغیر است و عرض تیر، با یک تابع نمایی در جهت طولی تغییر می‌کند. بمبائی‌چی و همکاران [۱۹] حل دقیق ارتعاش عرضی آزاد تیرهای AFGM با تغییرات نمایی و شرطهای مرزی کلی، با بهره‌جویی از نگره‌ی تیر اولر-برنولی را ارائه کردند. آن‌ها، اثرهای تکیه‌گاه‌های کشسان، جرم نوک متصل و شاخص گرادیان نمایی بر فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای ارتعاشی تیرهای AFGM با شرطهای مرزی متقارن و نامتقارن را بررسی کردند. گوتام و همکاران [۲۰] به مدل‌سازی تیر FGM با تغییرات نمایی و شرطهای مرزی رایج با بهره‌جویی از نرم‌افزار MATLAB پرداختند. خورشیدی و همکاران [۲۱] به بررسی تأثیر عامل‌های مختلف بر مشخصات ارتعاشی و برداشت انرژی تیرهای تابعی مدرج با بهره‌جویی از تئوری تغییر شکل برشی اصلاح‌شده پرداختند. حسینی هاشمی و همکاران [۲۲] یک معادله یکتا جهت بررسی ارتعاشات آزاد تیرهای اولر- برنولی غیریکنواخت و مدرج تابعی محوری با شرایط مرزی کلی را با به‌کارگیری رابطه کوشی در دسترس قرار دادند. به دنبال آن و در پژوهش دیگری، حسینی هاشمی و همکاران [۲۳] به ارائه معادله مشخصه دقیق فرکانسی و شکل مودها برای ارتعاشات عرضی تیر اولر-برنولی غیریکنواخت و ناهمگن با شرایط مرزی غیرکلاسیک کلی در دو انتها با حل دقیق معادله دیفرانسیل حاکم پرداختند. مروری بر پژوهش‌های صورت گرفته در زمینه‌ی ارتعاش آزاد تیرهای FGM نشان می‌دهد که با وجود روش‌های مختلف برای بررسی ارتعاشات عرضی تیرهای ناهمگن، اثر تکیه‌گاه‌های کشسان و جرم متمرکز انتهایی بر تیر تیموشنکوی مدرج تابعی با ویژگی‌های نمایی متغیر، بررسی نشده است. در این پژوهش، برای نخستین بار، راهکاری برای حل دقیق معادله دیفرانسیل ارتعاش آزاد تیر تابعی درجه‌ای محوری بر اساس الگوی تیر تیموشنکو، با در نظر گرفتن اثرهای هم‌زمان تکیه‌گاه‌های کشسان انتهایی و اثر جرم متمرکز انتهایی و ممان اینرسی آن، ارائه شود. بر اساس راهکار پیشنهادی می‌توان بین تیرهای همگن و ناهمگن تیموشنکو، تیرهای اولر- برنولی، تیرهای ریلی و تیرهای برشی تمایز قائل شد و این مدل‌های تیر را به روشی یکپارچه حل کرد. یادآوری می‌کند، بر پایه نمونه‌های کاربردی مواد FGM به‌عنوان بیومتریال در مهندسی پزشکی، سازه راکت و دیواره خارجی سفینه‌های فضایی در صنعت هوافضا، سنسورها و ژنراتورهای ترموالکتریک در صنایع الکترومغناطیس [۲۴]، شناخت بهتر و ارزیابی دقیق تر رفتار پویا و دینامیکی جزءها و تیرهای FGM، به‌ویژه با شرایط تکیه‌گاهی گوناگون، امری اجتناب‌ناپذیر است که می‌تواند به طرح‌های نهایی مناسب‌تر و بهینه‌تری در این حوزه‌ها بینجامد.

۲- رابطه‌سازی پیشنهادی

تیری به طول L و با مختصات محوری x ، در شکل ۱، نشان داده شده است. ویژگی‌های مواد، یعنی چگالی جرم، مدول کشسانی و مدول برشی تیر AFGM، به‌طور پیوسته و در جهت محوری به‌صورت توابع نمایی زیر تغییر می‌کنند [۱۸]:

$$\rho(x) = (\rho)_0 e^{2\beta(x/L)}, E(x) = (E)_0 e^{2\beta(x/L)}, G(x) = (G)_0 e^{2\beta(x/L)} \quad (1)$$

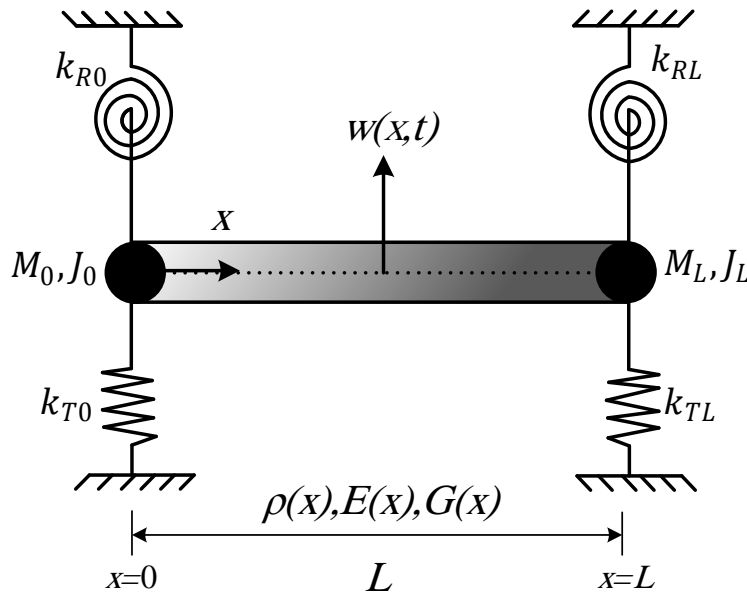
در رابطه‌های بالا، β ، شاخص تغییرات نمایی بدون یکا است. E ، مدول کشسانی، G ، مدول برشی و ρ ، چگالی جرمی می‌باشند. بر این پایه، جرم توزیع شده در واحد طول، اینرسی چرخشی توزیع شده در واحد طول، سفتی خمشی و سفتی برشی تیر AFGM نمایی، به‌صورت زیر به دست می‌آید:

¹ Finite Difference Method

² Direct Time Integration Method

$$\rho(x)A = \rho_0 A e^{2\beta(x/L)}, \rho(x)I = \rho_0 I e^{2\beta(x/L)}, E(x)I = E_0 I e^{2\beta(x/L)}, \kappa A G(x) = \kappa A G_0 e^{2\beta(x/L)} \quad (2)$$

که در آن، A ، سطح مقطع، I ، ممان مرتبه دوم سطح مقطع و κ ، ضریب تصحیح برش می‌باشد. در ادامه، جهت مدل‌سازی تکیه‌گاه‌های کشسان، از فنرهای دورانی و انتقالی خطی استفاده می‌شود. پانویس‌های 0 و L به ترتیب، به ابتدا و انتهای تیر، اشاره دارند. k_{RL} و k_{R0} به ترتیب، سختی فنر دورانی در ابتدا و انتهای تیر و k_{TL} و k_{T0} به ترتیب، سختی فنر انتقالی در ابتدا و انتهای تیر می‌باشند.



شکل ۱ تیر AFGM دوسر تکیه‌گاه کشسان دورانی و انتقالی با جرم‌های متمرکز انتهایی

به ترتیب، K_{RL} و K_{R0} عامل‌های بدون یکای سختی دورانی در ابتدا و انتهای تیر و K_{TL} و K_{T0} به ترتیب، عامل‌های بدون یکای سختی انتقالی در ابتدا و انتهای تیر می‌باشند. این عامل‌ها، در ادامه معرفی می‌شوند:

$$K_{R0} = \frac{k_{R0}L}{EI}, K_{RL} = \frac{k_{RL}L}{EI}, K_{T0} = \frac{k_{T0}L^3}{EI}, K_{TL} = \frac{k_{TL}L^3}{EI} \quad (3)$$

برای ساده‌سازی رابطه‌ها و درک بهتر مقدار سختی‌ها، ضریب‌های سختی دورانی و انتقالی در ابتدا و انتهای تیر، به ترتیب، با نمادهای R_0, R_L, T_0, T_L معرفی می‌گردند و به قرار زیر پنداشته می‌شوند:

$$R_0 = \frac{K_{R0}}{1 + K_{R0}}, R_L = \frac{K_{RL}}{1 + K_{RL}}, T_0 = \frac{K_{T0}}{1 + K_{T0}}, T_L = \frac{K_{TL}}{1 + K_{TL}} \quad (4)$$

هنگامی که عامل‌های بدون یکای سختی از صفر تا بی‌نهایت تغییر کنند، ضریب‌های سختی R_0, R_L, T_0, T_L بین صفر و یک تغییر خواهند کرد. جرم متمرکز M_0 با اینرسی چرخشی J_0 در ابتدای تیر و جرم متمرکز M_L با اینرسی چرخشی J_L در انتهای تیر، پنداشته می‌شوند. ضریب‌های بدون یکای جرم متمرکز در ابتدا و انتهای تیر و ضریب‌های بدون یکای اینرسی چرخشی در ابتدا و انتهای تیر، به ترتیب، با $\alpha_0, \alpha_L, \gamma_0, \gamma_L$ نشان داده می‌شوند و به قرار زیر است:

$$\alpha_0 = \frac{M_0}{\rho A L}, \alpha_L = \frac{M_L}{\rho A L}, \gamma_0 = \sqrt{\frac{J_0}{\rho A L^3}}, \gamma_L = \sqrt{\frac{J_L}{\rho A L^3}} \quad (5)$$

با بهره‌جویی از الگوی تیر تیموشنکو، دو معادله دیفرانسیل حاکم بر آن، شامل تغییر مکان عرضی (w) و دوران سطح مقطع (φ)، به قرار زیر است:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\kappa A G_0 e^{2\beta(x/L)} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \varphi \right) \right] - \rho_0 A e^{2\beta(x/L)} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[E_0 I e^{2\beta(x/L)} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] - \kappa A G_0 e^{2\beta(x/L)} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \varphi \right) - \rho_0 I e^{2\beta(x/L)} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad (7)$$

در رابطه‌های بالا، φ ، دوران ناشی از تغییر شکل‌های خمشی و w ، تغییر شکل جانبی تیر می‌باشد. از سوی دیگر، گشتاور خمشی M و نیروی برشی Q ، به ترتیب، به قرار زیر می‌باشند:

$$M = E_0 I e^{2\beta(x/L)} \frac{\partial \varphi}{\partial x}, Q = \kappa A G_0 e^{2\beta(x/L)} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \varphi \right) \quad (8)$$

در این مرحله، می‌بایست متغیر φ ، در رابطه‌های ۶ و ۷ حذف گردد. با جداسازی متغیر φ در رابطه‌ی ۶، رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{2\beta}{L} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{(\rho_0 A)_0}{(\kappa G A)_0} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{2\beta}{L} \varphi \quad (9)$$

در نهایت، با جایگذاری مشتق‌های رابطه‌ی ۹ در مشتق رابطه‌ی ۷ نسبت به x ، معادله دیفرانسیل ارتعاش آزاد حاکم بر تیر تیموشنکوی AFGM همانند رابطه‌ی ۱۰ به دست می‌آید:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{4\beta}{L} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \left(\frac{2\beta}{L} \right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \left[\frac{\rho_0 A}{\kappa A G_0} + \frac{\rho_0 I}{E_0 I} \right] \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} - \frac{2\beta}{L} \left[\frac{\rho_0 A}{\kappa A G_0} + \frac{\rho_0 I}{E_0 I} \right] \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} + \frac{\rho_0 A}{E_0 I} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\rho_0 A \rho_0 I}{\kappa A G_0 E_0 I} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} = 0 \quad (10)$$

با فرض ارتعاش هارمونیک، تابع‌های پاسخ تغییر شکل تیر، به قرار زیر است:

$$w(x, t) = W(x) \sin \omega t, \varphi(x, t) = \psi(x) \sin \omega t \quad (11)$$

که در آن، $W(x)$ ، دامنه‌ی ارتعاش، $\psi(x)$ ، دامنه‌ی دوران ناشی از خمش و ω ، فرکانس زاویه‌ای می‌باشد. در ادامه، برای سادگی کار، کمیت‌های بدون بعد زیر معرفی می‌شود:

$$\xi = \frac{x}{L}, U = \frac{W}{L}, r^2 = \frac{\rho_0 I}{\rho_0 A L^2}, s^2 = \frac{E_0 I}{\kappa A G_0 L^2}, \Omega^2 = \frac{\rho_0 A}{E_0 I} L^4 \omega^2 \quad (12)$$

در رابطه‌ی بالا، عامل r ، نشانگر اثر اینرسی چرخشی و عامل s ، نشانگر تغییر شکل برشی مقطع می‌باشد. با جایگذاری تابع‌های پاسخ و با بهره‌جویی از برابری‌های ۱۲، رابطه‌های ۸، ۹ و ۱۰، به شکل زیر بازنویسی می‌شوند [۱]:

$$M = e^{2\beta \xi} \frac{E_0 I}{L} \frac{d\psi}{d\xi}, Q = \kappa A G_0 e^{2\beta \xi} \left(\frac{dU}{d\xi} + \psi \right) \quad (13)$$

$$\frac{d\psi}{d\xi} + 2\beta \psi = -\frac{d^2 U}{d\xi^2} - 2\beta \frac{dU}{d\xi} - s^2 \Omega^2 U, \quad (14)$$

$$\frac{d^4 U}{d\xi^4} + 4\beta \frac{d^3 U}{d\xi^3} + [4\beta^2 + (r^2 + s^2)\Omega^2] \frac{d^2 U}{d\xi^2} + 2\beta(r^2 + s^2)\Omega^2 \frac{dU}{d\xi} + (r^2 s^2 \Omega^2 - 1)\Omega^2 U = 0 \quad (15)$$

با توجه به معادله‌ی درجه چهارم بالا، می‌توان بین تیرهای همگن ($\beta = 0$) و ناهمگن ($\beta \neq 0$) تیموشنکو، تیرهای اولر، تیرهای ریلی و تیرهای برشی تمایز قائل شده و الگوهای مختلف تیر را به روشی یکپارچه حل کرد. به سخن دیگر، برای یک تیر تیموشنکو، $s \neq 0$ و $r \neq 0$ می‌باشد. برای یک تیر برشی، $r = 0$ می‌باشد و تنها اثر برش لحاظ می‌شود. در مورد یک تیر ریلی، $s = 0$ می‌باشد و تنها اثر اینرسی چرخشی در نظر گرفته می‌شود. اگر به‌طور هم‌زمان $r = 0$ و $s = 0$ پنداشته شود، رابطه‌های تیر اولر-برنولی، بازیابی می‌شود که در آن، تغییر شکل برشی و اینرسی چرخشی، نادیده گرفته خواهد شد. باید دانست که با استفاده از رابطه‌ی میان مدل برشی و مدول کشسانی، می‌توان گفت که با ثابت پنداشتن ضریب پواسون ($\nu = 0.3$) و ثابت پنداشتن ضریب تصحیح برشی برای مقطع مستطیلی ($\kappa = \frac{5}{6}$)، اثر اینرسی چرخشی (r) و اثر تغییر شکل برشی مقطع (s) که در رابطه‌ی ۱۲ معرفی شده است، تنها به نسبت ضخامت به طول تیر (h/L)، وابسته است [۲۵]:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}, r^2 = \frac{1}{12} \left(\frac{h}{L} \right)^2, s^2 = \frac{(1+\nu)}{6\kappa} \left(\frac{h}{L} \right)^2 \quad (16)$$

در ادامه، پاسخ کلی تابع‌های تغییر شکل جانبی تیر در واحد طول (U) و دوران ناشی از تغییر شکل‌های خمشی (ψ) را می‌توان با تابع‌های زیر بیان کرد:

$$U(\xi) = Ce^{\lambda\xi}, \psi(\xi) = He^{\lambda\xi} \quad (17)$$

که در آن C و H ، به ترتیب، ثابت‌های مجهول مربوط به تابع‌های $U(\xi)$ و $\psi(\xi)$ می‌باشند. معادله مشخصه‌ی رابطه‌ی ۱۵، به قرار زیر است:

$$\lambda^4 + 4\beta\lambda^3 + [4\beta^2 + (r^2 + s^2)\Omega^2]\lambda^2 + 2\beta(r^2 + s^2)\Omega^2\lambda + (r^2s^2\Omega^2 - 1)\Omega^2 = 0 \quad (18)$$

از حل معادله‌ی ۱۸، چهار ریشه‌ی زیر، حاصل می‌شود:

$$\lambda_{1,3} = \begin{cases} -\beta \pm \delta_1, \Omega < \Omega_{cr}^{[1]} \\ -\beta \pm i\delta_1, \Omega \geq \Omega_{cr}^{[1]} \end{cases}, \lambda_{2,4} = \begin{cases} -\beta \pm \delta_2, \Omega < \Omega_{cr}^{[2]} \\ -\beta \pm i\delta_2, \Omega \geq \Omega_{cr}^{[2]} \end{cases} \quad (19)$$

که در آن‌ها:

$$\Omega_{cr}^{[1]} = \beta^2 \sqrt{\frac{2}{1 + \beta^2(r^2 + s^2) + \sqrt{1 + 2\beta^2(r^2 + s^2) + \beta^4(r^2 - s^2)^2}}}, \quad (20)$$

$$\Omega_{cr}^{[2]} = \frac{1}{rs} \sqrt{\frac{1 + \beta^2(r^2 + s^2) + \sqrt{1 + 2\beta^2(r^2 + s^2) + \beta^4(r^2 - s^2)^2}}{2}}, \quad (21)$$

$$\delta_1 = \begin{cases} \frac{\sqrt{4\beta^2 - 2[\sqrt{(r^2 - s^2)^2\Omega^4 + 4\Omega^2} + (r^2 + s^2)\Omega^2]}}{2}, \Omega < \Omega_{cr}^{[1]} \\ 0, \Omega = \Omega_{cr}^{[1]} \\ \frac{\sqrt{2[\sqrt{(r^2 - s^2)^2\Omega^4 + 4\Omega^2} + (r^2 + s^2)\Omega^2] - 4\beta^2}}{2}, \Omega > \Omega_{cr}^{[1]} \end{cases} \quad (22)$$

$$\delta_2 = \begin{cases} \frac{\sqrt{4\beta^2 + 2[\sqrt{(r^2 - s^2)^2\Omega^4 + 4\Omega^2} - (r^2 + s^2)\Omega^2]}}{2}, \Omega < \Omega_{cr}^{[2]} \\ 0, \Omega = \Omega_{cr}^{[2]} \\ \frac{\sqrt{2[(r^2 + s^2)\Omega^2 - \sqrt{(r^2 - s^2)^2\Omega^4 + 4\Omega^2}] - 4\beta^2}}{2}, \Omega > \Omega_{cr}^{[2]} \end{cases} \quad (23)$$

با استفاده از رابطه‌های بالا، تابع‌های مود شکل تیر، به صورت زیر پنداشته می‌شوند:

$$U(\xi) = e^{-\beta\xi} [C_1 \cosh(\delta_1\xi) + C_2 \sinh(\delta_1\xi) + C_3 \cosh(\delta_2\xi) + C_4 \sinh(\delta_2\xi)], \Omega < \Omega_{cr}^{[1]} \quad (24)$$

$$U(\xi) = e^{-\beta\xi} [C_1 \cos(\delta_1\xi) + C_2 \sin(\delta_1\xi) + C_3 \cosh(\delta_2\xi) + C_4 \sinh(\delta_2\xi)], \Omega_{cr}^{[1]} < \Omega < \Omega_{cr}^{[2]} \quad (25)$$

$$U(\xi) = e^{-\beta\xi} [C_1 \cos(\delta_1\xi) + C_2 \sin(\delta_1\xi) + C_3 \cos(\delta_2\xi) + C_4 \sin(\delta_2\xi)], \Omega > \Omega_{cr}^{[2]} \quad (26)$$

$$U(\xi) = e^{-\beta\xi} [C_1 + C_2\xi + C_3 \cosh(\delta_2\xi) + C_4 \sinh(\delta_2\xi)], \Omega = \Omega_{cr}^{[1]} \quad (27)$$

$$U(\xi) = e^{-\beta\xi} [C_1 + C_2\xi + C_3 \cos(\delta_1\xi) + C_4 \sin(\delta_1\xi)], \Omega = \Omega_{cr}^{[2]} \quad (28)$$

در رابطه‌های کنونی، $\Omega_{cr}^{[1]}$ و $\Omega_{cr}^{[2]}$ فرکانس‌های بحرانی و در واقع، نشانگر تغییر فاز می‌باشد. تمام فرکانس‌ها را می‌توان در سه دسته‌ی مختلف طبقه‌بندی کرد. دسته‌ی یکم، در محدوده‌ی ($\Omega < \Omega_{cr}^{[1]}$) قرار می‌گیرد. دومی، در محدوده فرکانس‌های پایین ($\Omega_{cr}^{[1]} < \Omega < \Omega_{cr}^{[2]}$) قرار دارد و پایانی، نشان‌دهنده‌ی محدوده فرکانس‌های بالا ($\Omega > \Omega_{cr}^{[2]}$) می‌باشد. با توجه به رابطه‌ی ۲۴، به‌راحتی قابل درک است که برای $\Omega < \Omega_{cr}^{[1]}$ ، تابع‌های درگیر، تابع‌های هذلولی هستند. بنابراین، معادله‌ی ۲۴، نشانگر امواج

غیرقابل انتشار خواهد بود. در نتیجه، شکل موده‌های استخراجی از رابطه‌های ۲۵ و ۲۶، حاصل می‌شود. در ادامه، بیشتر تمرکز این نوشتار، بر روی شکل موده‌های استخراجی از رابطه‌ی ۲۵، در حالت $\Omega_{cr}^{[1]} < \Omega < \Omega_{cr}^{[2]}$ می‌باشد که بهره‌جویی از آن در پژوهش‌های انجام گرفته، رایج‌تر است. در صورتی که مقدار فرکانس طبیعی در بازه‌ی $\Omega_{cr}^{[1]} < \Omega < \Omega_{cr}^{[2]}$ قرار گیرد، تابع دوران تیر می‌تواند با رابطه‌ی زیر، بیان شود:

$$\psi(\xi) = e^{-\beta\xi} [H_1 \cos(\delta_1\xi) + H_2 \sin(\delta_1\xi) + H_3 \cosh(\delta_2\xi) + H_4 \sinh(\delta_2\xi)] \quad (۲۹)$$

در ادامه، با جایگزینی رابطه‌های ۲۵ و ۲۹، در رابطه‌ی ۱۴ و ساده‌سازی، رابطه‌ی زیر حاصل می‌شود:

$$JH = NC, \quad (۳۰-الف)$$

$$H = J^{-1}NC \quad (۳۰-ب)$$

که در آن:

$$J = \begin{bmatrix} \beta & \delta_1 & 0 & 0 \\ -\delta_1 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & \delta_2 \\ 0 & 0 & \delta_2 & \beta \end{bmatrix} \quad (۳۱)$$

$$N = \begin{bmatrix} -s^2\Omega^2 + \beta^2 + \delta_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -s^2\Omega^2 + \beta^2 + \delta_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -s^2\Omega^2 + \beta^2 - \delta_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s^2\Omega^2 + \beta^2 - \delta_2^2 \end{bmatrix} \quad (۳۲)$$

$$H = [H_1 \ H_2 \ H_3 \ H_4]^T, C = [C_1 \ C_2 \ C_3 \ C_4]^T \quad (۳۳)$$

در رابطه‌های بالا، C_j و H_j ثابت‌های مجهول هستند، بالانویس T ، ترانهاده‌ی یک بردار یا ماتریس را مشخص می‌کند و بالانویس ۱- نشانگر معکوس یک ماتریس است. با جایگزینی معادله‌ی (۳۰-ب) در معادله‌ی ۲۹، رابطه‌ی ۳۴ به دست می‌آید:

$$\psi(\xi) = e^{-\beta\xi} H^T V = e^{-\beta\xi} C^T N^T (J^{-1})^T V \quad (۳۴)$$

که در آن:

$$V = [\cos(\delta_1\xi) \ \sin(\delta_1\xi) \ \cosh(\delta_2\xi) \ \sinh(\delta_2\xi)]^T \quad (۳۵)$$

در صورتی که $\Omega > \Omega_{cr}^{[2]}$ باشد، رابطه‌های ۳۰ و ۳۴ همچنان برقرار است. با این تفاوت که ماتریس‌های J و N و بردار V به ترتیب، با رابطه‌های زیر جایگزین می‌شوند:

$$J = \begin{bmatrix} \beta & \delta_1 & 0 & 0 \\ -\delta_1 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & \delta_2 \\ 0 & 0 & -\delta_2 & \beta \end{bmatrix} \quad (۳۶)$$

$$N = \begin{bmatrix} -s^2\Omega^2 + \beta^2 + \delta_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -s^2\Omega^2 + \beta^2 + \delta_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -s^2\Omega^2 + \beta^2 + \delta_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s^2\Omega^2 + \beta^2 + \delta_2^2 \end{bmatrix} \quad (۳۷)$$

$$V = [\cos(\delta_1\xi) \ \sin(\delta_1\xi) \ \cos(\delta_2\xi) \ \sin(\delta_2\xi)]^T \quad (۳۸)$$

در نهایت، رابطه‌های زیر جهت محاسبه‌ی تغییر شکل جانبی تیر در واحد طول (U)، دوران ناشی از تغییر شکل‌های خمشی (ψ)، گشتاور خمشی (M) و نیروی برشی (Q)، پیشنهاد می‌شوند:

$$U = e^{-\beta\xi} C^T V, \psi = e^{-\beta\xi} C^T N^T (J^{-1})^T V \quad (39)$$

$$M = \frac{E_0 I}{L} e^{\beta\xi} C^T N^T (J^{-1})^T \left(-\beta + \frac{d}{d\xi}\right) V, Q = \kappa A G_0 e^{\beta\xi} C^T \left(-\beta + \frac{d}{d\xi} + N^T (J^{-1})^T\right) V \quad (40)$$

با جایگزینی رابطه‌های مربوط به گشتاور خمشی (M) و نیروی برشی (Q)، شرایط مرزی تیر تیموشنکوی تابعی درجه‌ای محوری با تکیه‌گاه‌های کشسان انتهایی و جرم متمرکز انتهایی، با لحاظ اثر اینرسی چرخشی جرم متمرکز، به قرار زیر خواهد بود:

$$\frac{d\psi}{d\xi} - K_{R0} \psi(\xi) + \gamma_0^2 \Omega^2 \psi(\xi) = 0, \quad \xi = 0 \quad (41\text{-الف})$$

$$\kappa A G_0 \left(\frac{dU}{d\xi} + \psi\right) - \frac{K_{T0} E_0 I}{L^3} U(\xi) L + \alpha_0 \Omega^2 U(\xi) = 0, \quad \xi = 0 \quad (41\text{-ب})$$

$$e^{2\beta} \frac{d\psi}{d\xi} + K_{RL} e^{2\beta} \psi(\xi) - \gamma_L^2 \Omega^2 \psi(\xi) = 0, \quad \xi = 1 \quad (41\text{-ج})$$

$$\kappa A G_0 e^{2\beta} \left(\frac{dU}{d\xi} + \psi\right) + \frac{K_{TL} E_0 I e^{2\beta}}{L^3} U(\xi) L - \alpha_L \Omega^2 U(\xi) = 0 \quad \xi = 1 \quad (41\text{-د})$$

با جایگزینی ضریب‌های سختی دورانی و انتقالی در ابتدا و انتهای تیر، که به ترتیب، با نمادهای R_L, R_0, T_L و T_0 در رابطه‌ی ۴ معرفی شده است، شرط‌های مرزی کلی تیر تیموشنکوی AFGM، همانند برابری‌های زیر در دسترس قرار می‌گیرند:

$$(1 - R_0) \frac{d\psi}{d\xi} - R_0 \psi(\xi) + (1 - R_0) \gamma_0^2 \Omega^2 \psi(\xi) = 0, \quad \xi = 0 \quad (42\text{-الف})$$

$$\frac{(1 - T_0)}{s^2} \left(\frac{dU}{d\xi} + \psi\right) - T_0 U(\xi) + (1 - T_0) \alpha_0 \Omega^2 U(\xi) = 0, \quad \xi = 0 \quad (42\text{-ب})$$

$$(1 - R_L) e^{2\beta\xi} \frac{d\psi}{d\xi} + R_L e^{2\beta\xi} \psi(\xi) - (1 - R_L) \gamma_L^2 \Omega^2 \psi(\xi) = 0, \quad \xi = 1 \quad (42\text{-ج})$$

$$\frac{(1 - T_L)}{s^2} e^{2\beta\xi} \left(\frac{dU}{d\xi} + \psi\right) + T_L e^{2\beta\xi} U(\xi) - (1 - T_L) \alpha_L \Omega^2 U(\xi) = 0 \quad \xi = 1 \quad (42\text{-د})$$

در ادامه، با بهره‌جویی از رابطه‌های پیشنهادی برای یافتن تغییر شکل جانبی تیر در واحد طول (U) و دوران ناشی از تغییر شکل‌های خمشی (ψ)، در رابطه‌ی ۴۲، و مرتب‌سازی آن برحسب ثابت‌های مجهول، یک دستگاه چهار معادله-چهار مجهول، همانند رابطه‌ی ماتریسی زیر به دست می‌آید:

$$KC = 0 \quad (43)$$

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} \quad (44)$$

که در آن C و K به ترتیب، بردار ثابت‌های مجهول تغییر شکل جانبی و ماتریس ضریب‌های ثابت ارتعاش آزاد تیر است. درایه‌های ماتریس K در پیوست آمده‌اند. دستگاه معادله بالا، تنها در صورتی دارای پاسخ است که دترمینان ماتریس ضریب‌های ثابت، برابر صفر شود. بر این پایه، با صفر پنداشتن دترمینان ماتریس ضریب‌های ثابت ارتعاش آزاد سازه، معادله مشخصه‌ی تیر به دست می‌آید. با به دست آوردن ریشه‌های حقیقی معادله مشخصه، فرکانس‌های طبیعی سیستم و به دنبال آن، شکل‌های ارتعاشی سازه در دسترس خواهد بود. برای این منظور، از نرم‌افزار ریاضی Maple بهره‌جویی می‌شود. معادله مشخصه‌ی حاصل از عبارت ۴۴ به گونه‌ای ارائه شده است که اصل حاکم بر معادله‌ی ۱۵، در مورد معادله مشخصه‌ی تیر تیموشنکوی AFGM با شرط‌های مرزی کلی نیز، برقرار است. به بیان دیگر، در صورتی که در معادله مشخصه‌ی تیر تیموشنکوی تابعی درجه‌بندی‌شده‌ی محوری حاصل از عبارت ۴۴، اثرهای اینرسی چرخشی (r) و تغییر شکل برشی مقطع (s)، صفر پنداشته شوند، معادله مشخصه‌ی

تیر اولر- برنولی تابعی درجه‌بندی شده‌ی محوری، به دست می‌آید. در صورتی که تنها اثر تغییر شکل برشی مقطع (s) صفر پنداشته شود، معادله مشخصه‌ی تیر ریلی ناهمگن در دسترس خواهد بود. در صورتی که در معادله مشخصه‌ی نهایی، تنها اثر اینرسی چرخشی (r) صفر پنداشته شود، معادله مشخصه‌ی تیر برشی درجه‌بندی شده‌ی محوری، به دست می‌آید. یادآوری می‌کند، با صفر پنداشتن شاخص تغییرات نمایی (β) در معادله مشخصه‌ی نهایی، معادله مشخصه‌ی تیر همگن به دست خواهد آمد. باید افزود، رابطه‌های به‌دست‌آمده تنها برای ارتعاش آزاد تیرها در مقیاس میکروسکوپی کاربرد خواهد داشت. بر این پایه، ارتعاش اجباری تیرها و یا در نظر گرفتن مقیاس میکروسکوپی، با توجه به محدودیت‌های حل دقیق، می‌توانند در پژوهش‌های آتی مورد ارزیابی قرار گیرند.

۳- مقایسه‌های عددی

در این بخش، برای صحت‌سنجی رابطه‌سازی پیشنهادی، ضریب فرکانس طبیعی (Ω_n)، برای یک نمونه از شرطهای مرزی کشسان حساب و پاسخ‌ها در جدول ۱ درج شده‌اند. با توجه به اینکه برای تیر تیموشنکوی AFGM با تغییرات نمایی و شرطهای مرزی کشسان پاسخی در دسترس نیست، از یافته‌های تیر تیموشنکوی همگن برای مقایسه بهره‌جویی می‌شود. نمونه‌ی بررسی شده، تیر همگن با نسبت ضخامت به طول (h/L) متفاوت است که همه‌ی ضریب‌های سختی (دورانی و انتقالی) ابتدا و انتهای تیر، متغیر می‌باشد ($\beta=0, R_0=R_L=var., T_0=T_L=var.$). بر پایه‌ی یافته‌های جدول ۱، آشکار است که رابطه‌سازی پیشنهادی در سنجش با پژوهش‌های معتبر، کارایی و دقت بالایی دارد.

جدول ۱ راستی‌آزمایی رابطه پیشنهادی برای تیر همگن با تکیه‌گاه‌های کشسان دورانی و انتقالی انتهایی

لای و همکاران [۲۷]	قنای اصل و مفید [۵]	بمبائی چی [۲۶]	بمبائی چی و همکاران [۱۹]	روش پیشنهادی	Ω_n	$R_0=R_L$	$T_0=T_L$	h/L
-	-	۳/۱۰۹۹۳	۳/۱۰۹۷۹	۳/۱۰۹۷۹	$n=1$			
-	-	۸/۸۳۸۱۳	۸/۸۳۷۹۰	۸/۸۳۷۸۸	$n=2$	۵/۶	۵/۶	
-	-	۳۱/۸۰۱۷۰	۳۱/۸۰۱۴۸	۳۱/۸۰۱۴۹	$n=3$			
۴/۳۶۱۰۰	۴/۳۶۰۸	۴/۳۶۱۰۰	۴/۳۶۰۸۳	۴/۳۶۰۸۲	$n=1$			۰/۰
۱۰/۶۹۸۷۹	۱۰/۶۹۹	۱۰/۶۹۸۷۹	۱۰/۶۹۸۵۹	۱۰/۶۹۸۶۰	$n=2$	۱۰/۱۱	۱۰/۱۱	
۳۴/۸۹۱۴۷	۳۴/۸۹۲	۳۴/۸۹۱۴۷	۳۴/۸۹۱۸۲	۳۴/۸۹۱۸۰	$n=3$			
-	۱/۴۰۲۲	-	-	۱/۴۰۲۱۹	$n=1$			
-	۴/۶۴۰۵	-	-	۴/۶۴۰۵۰	$n=2$	۱/۲		
-	۱۸/۹۳۴	-	-	۱۸/۹۳۳۵۹	$n=3$		۱/۲	
-	۱/۴۰۷۰	-	-	۱/۴۰۷۰۴	$n=1$			۰/۱
-	۷/۵۹۳۰	-	-	۷/۵۹۲۹۶	$n=2$	۱۰/۱۱		
-	۲۳/۴۲۳	-	-	۲۳/۴۲۳۱۴	$n=3$			

۴- ارزیابی اثر عامل‌ها بر فرکانس‌های ارتعاشی

در این بخش، اثر عامل‌های مختلفی همچون الگوهای متفاوت تغییر شکل تیرها، شاخص تغییرات نمایی، تکیه‌گاه‌های کشسان انتقالی و دورانی، جرم متمرکز انتهایی، اینرسی چرخشی جرم متمرکز و نسبت ضخامت به طول (عمق) تیر، بر روی مقدارهای دقیق فرکانس‌های طبیعی در نمونه‌های مختلف بررسی می‌شود.

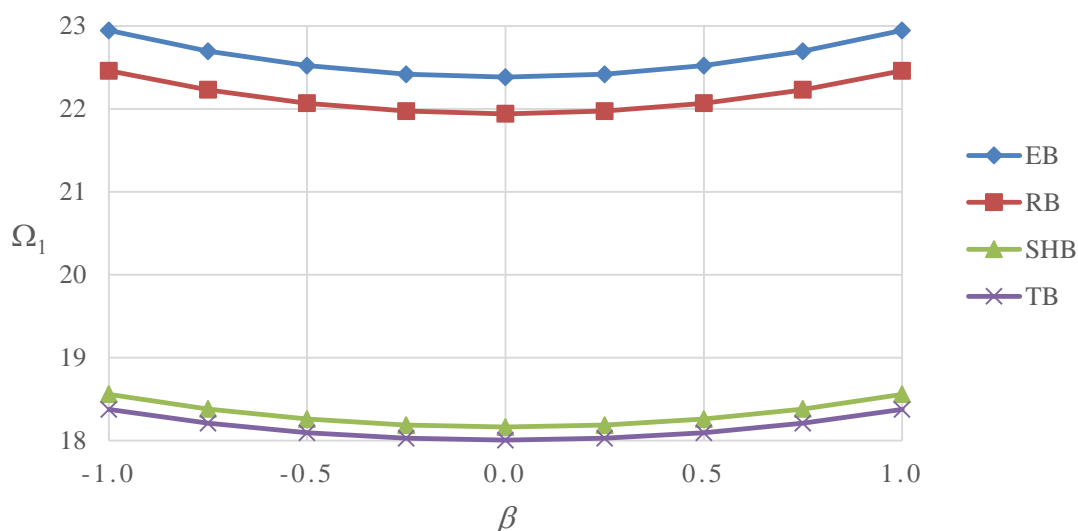
۴-۱- اثر الگوهای متفاوت تغییر شکل تیرها در تیر با شرطهای مرزی رایج

در این بخش، اثر الگوهای متفاوت تغییر شکل تیرها بر نمودار تغییرات ضریب فرکانس طبیعی مود یکم تیر AFGM با شرطهای تکیه‌گاهی دو سر گیردار (C-C)، دو سر مفصل (P-P)، یکسر گیردار- یکسر آزاد (C-F)، یکسر آزاد- یکسر گیردار (F-C) یکسر گیردار- یکسر مفصل (C-P)، و یکسر مفصل- یکسر گیردار (P-C)، در برابر تغییر شاخص تغییرات نمایی (β)، به ترتیب

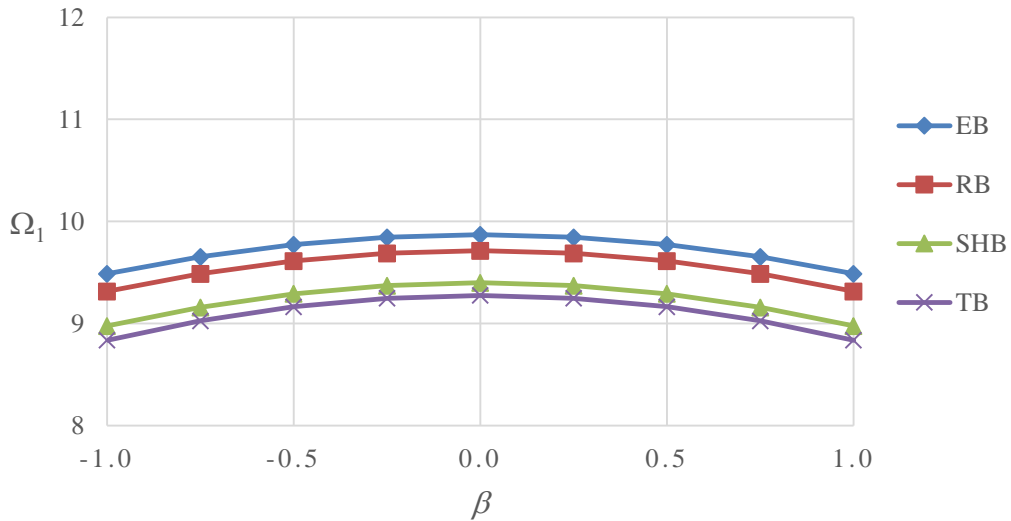
همانند شکل‌های ۲ تا ۷، بررسی شده است. نمادهای TB، SHB، RB و EB، به ترتیب، نشانگر تیر تیموشنکو ($h/L=0.2$)، تیر برشی، تیر ریلی و تیر اولر- برنولی می‌باشد. بر این پایه و در میان نمونه‌های بررسی شده، تیر طره‌ی AFGM تیموشنکو و تیر دوسر گیردار AFGM اولر- برنولی با قدر مطلق شاخص تغییرات یک ($|\beta|=1$)، به ترتیب، دارای کمترین و بیشترین فرکانس‌های طبیعی اساسی می‌باشند. می‌توان دریافت که مقدارهای فرکانس طبیعی تیرهای برشی و تیرهای تیموشنکو، تفاوت اندکی دارند. به سخن دیگر، اثرهای اینرسی چرخشی بر مقدارهای فرکانس طبیعی تیر تیموشنکو با شرایط تکیه‌گاهی رایج، ناچیز می‌باشد. برای نمونه، در مورد تیر دو سر گیردار همگن ($\beta=0$)، فرکانس طبیعی مود یکم تیر اولر-برنولی، نزدیک به ۲۴ درصد بیشتر از فرکانس طبیعی تیر تیموشنکو می‌باشد. بهره‌جویی از الگوی تیر ریلی و تیر برشی، به ترتیب، سبب افزایش حدودی ۱۸ درصدی و ۱ درصدی فرکانس طبیعی مود یکم تیر تیموشنکو می‌شود. افزون بر این، با مقایسه‌ی نمودار شرط‌های تکیه‌گاهی متفاوت، دیده می‌شود که برش بر روی فرکانس‌های طبیعی تیر دو سر گیردار، تأثیر بیشتری دارد.

۲-۴- اثرهای نسبت ضخامت به طول تیر و تکیه‌گاه کشسان در تیر با تکیه‌گاه‌های کشسان دورانی و انتقالی (شرایط مرزی متقارن)

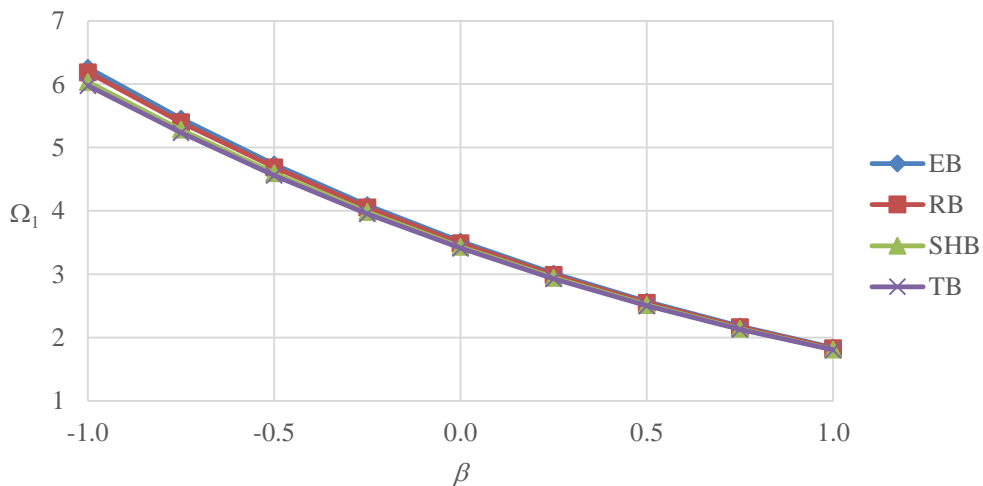
در این بخش، برای شناخت بهتر اثر تکیه‌گاه‌های کشسان بر فرکانس‌های طبیعی تیر AFGM با تغییرات نمایی، نمودار تغییرات ضریب فرکانس طبیعی مود نخست تیر با تکیه‌گاه‌های کشسان دورانی و انتقالی، همانند شکل ۸، در برابر تغییر ضریب‌های سختی‌های فنرهای دورانی و انتقالی، برای دو نسبت ضخامت به طول مختلف (0.4 و 0.2 ، h/L)، به ترتیب در نمودارهای شکل‌های ۹ و ۱۰ بررسی شده است. در ابتدای تیر، یک فنر انتقالی و یک فنر دورانی، (k_{TO} و k_{RO}) و در انتهای آن نیز یک فنر انتقالی و یک فنر دورانی، (k_{TL} و k_{RL}) مدل‌سازی شده است. ضریب تغییرات سختی فنر انتقالی در ابتدا و انتهای تیر (T_L و T_O) و ضریب تغییرات سختی فنر دورانی در ابتدا و انتهای تیر (R_L و R_O)، بین 0.1 تا 1 است. در این بررسی، شاخص تغییرات نمایی برابر 0.5 است. آشکار است که با افزایش ضریب سختی فنر دورانی و انتقالی ابتدا و انتهای تیر، فرکانس‌های سیستم افزایش می‌یابد. با وجود این، فرکانس‌های ارتعاشی به تغییرات سختی فنرهای انتقالی، حساسیت بیشتری نشان می‌دهند. افزون بر این، اثر افزایش فرکانس‌های ارتعاشی، در ضریب‌های سختی بالاتر، چشم‌گیرتر است. با افزایش نسبت ضخامت به طول تیر (h/L)، شدت افزایش و دامنه تغییرات فرکانس‌های طبیعی کاهش می‌یابد. به سخن دیگر، در تیرهای با ضخامت کمتر، تکیه‌گاه‌های کشسان اثر بیشتری بر افزایش مقدار و دامنه تغییرات فرکانس‌های طبیعی دارند.



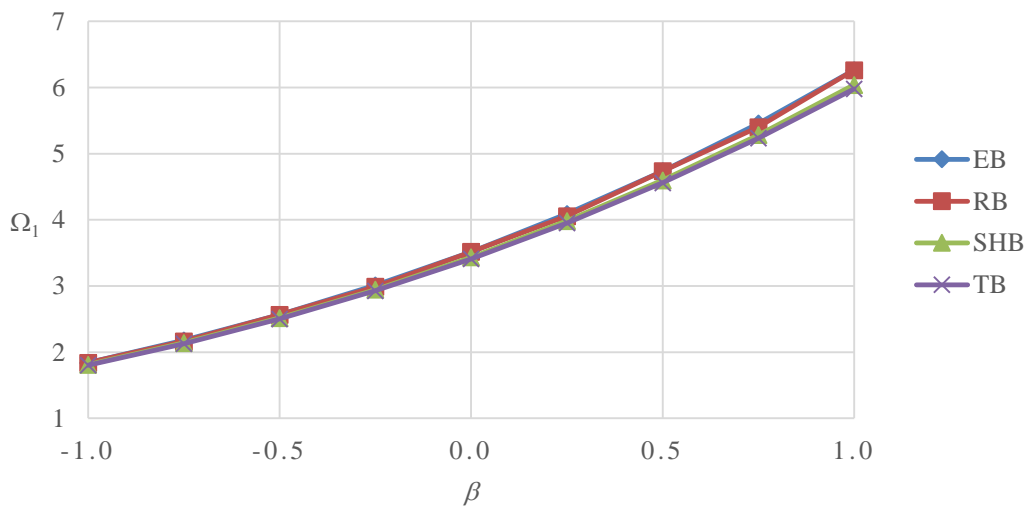
شکل ۲ فرکانس طبیعی مود یکم (Ω_1) در برابر شاخص تغییرات (β) برای الگوهای مختلف تغییر شکل تیر دوسر گیردار



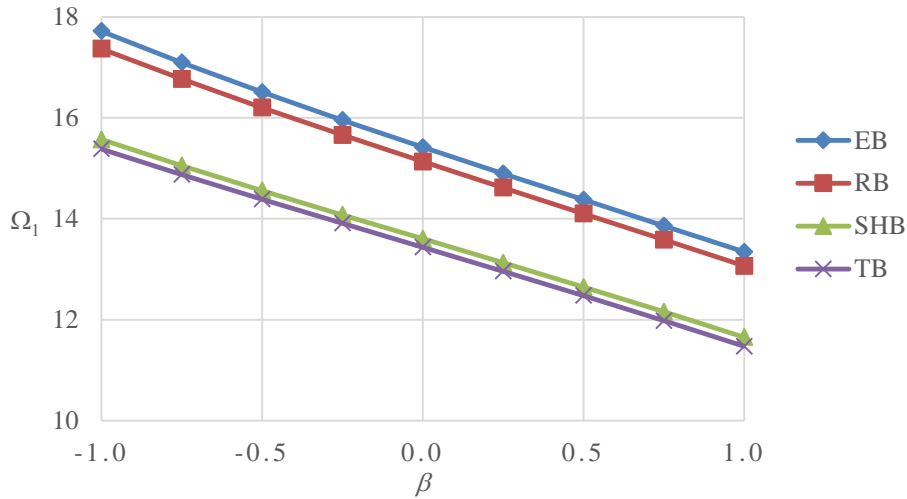
شکل ۳ فرکانس طبیعی مود یکم (Ω_1) در برابر شاخص تغییرات (β) برای الگوهای مختلف تغییر شکل تیر دوسر مفصل



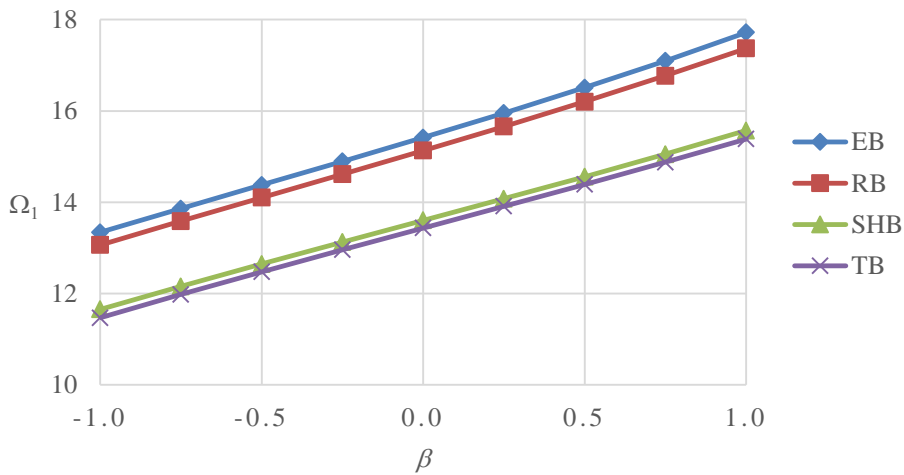
شکل ۴ فرکانس طبیعی مود یکم (Ω_1) در برابر شاخص تغییرات (β) برای الگوهای مختلف تغییر شکل تیر یکسر گیردار - یکسر آزاد



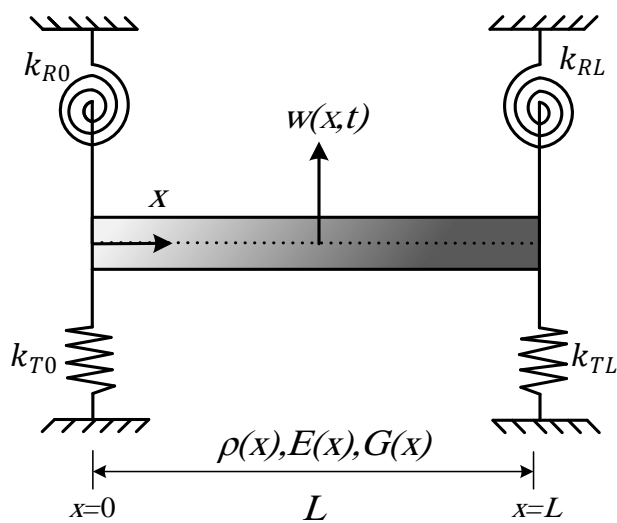
شکل ۵ فرکانس طبیعی مود یکم (Ω_1) در برابر شاخص تغییرات (β) برای الگوهای مختلف تغییر شکل تیر یکسر آزاد - یکسر گیردار



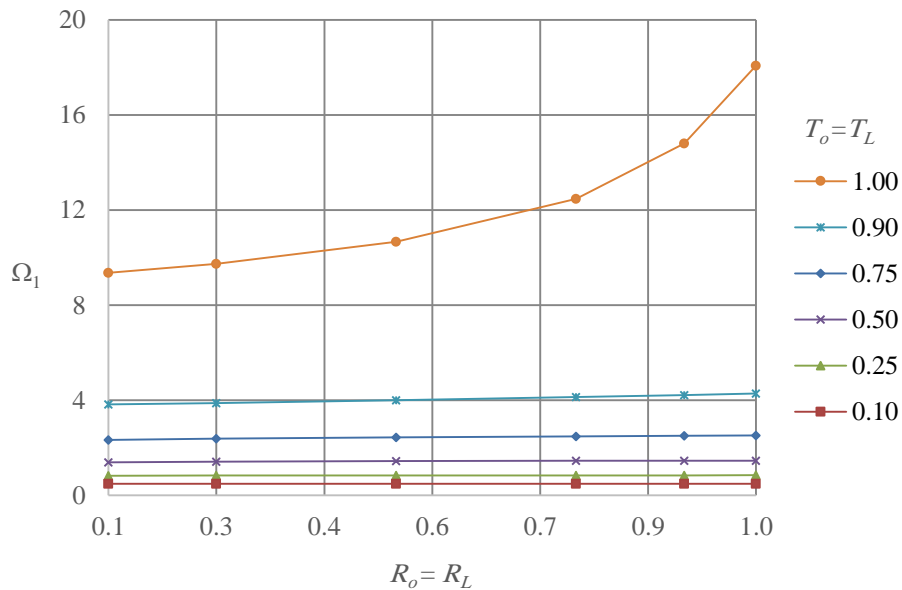
شکل ۶ فرکانس طبیعی مود یکم (Ω_1) در برابر شاخص تغییرات (β) برای الگوهای مختلف تغییر شکل تیر یکسر گیردار - یکسر مفصل



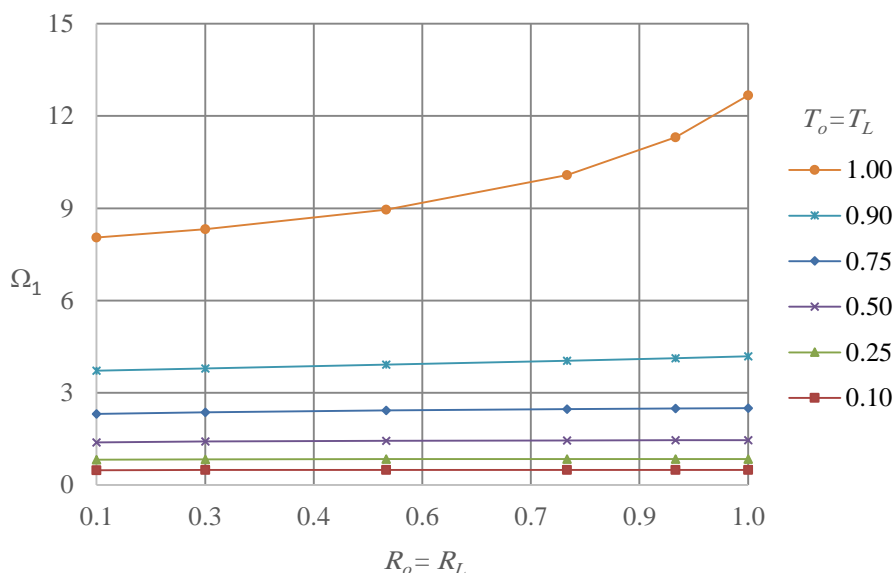
شکل ۷ فرکانس طبیعی مود یکم (Ω_1) در برابر شاخص تغییرات (β) برای الگوهای مختلف تغییر شکل تیر یکسر مفصل - یکسر گیردار



شکل ۸ تیر AFGM دوسر تکیه‌گاه کشسان دورانی و انتقالی متقارن ($\beta = \pm 0.5, R_0 = R_L = \text{var.}, T_0 = T_L = \text{var.}$)



شکل ۹ نمودار تغییرات ضریب فرکانس طبیعی مود نخست در برابر تغییر ضریب‌های سختی تیر AFGM دوسر تکیه‌گاه کشسان دورانی و انتقالی متقارن با نسبت ضخامت به طول $(h/L=0.2) \cdot 0.2$



شکل ۱۰ نمودار تغییرات ضریب فرکانس طبیعی مود نخست در برابر تغییر ضریب‌های سختی تیر AFGM دوسر تکیه‌گاه کشسان دورانی و انتقالی متقارن با نسبت ضخامت به طول $(h/L=0.4) \cdot 0.4$

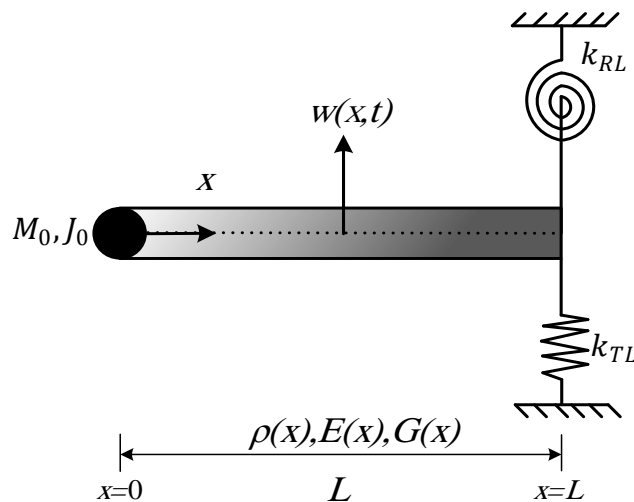
در ادامه، پاسخ‌های ضریب فرکانس‌های طبیعی نظیر ضریب سختی کم (۱۰ درصد)، میانه (۵۰ درصد) و ضریب سختی زیاد (۹۰ درصد) در سه مود نخست، با نسبت‌های ضخامت به طول متفاوت، در جدول ۲ آمده است. بر پایه‌ی پاسخ‌های جدول ۲، افزایش سختی تکیه‌گاه‌های کشسان انتقالی و دورانی، کمترین اثر را بر فرکانس‌های طبیعی تیر با نسبت ضخامت به طول برابر 0.4 دارد؛ به گونه‌ای که در سختی میانه و زیاد، فرکانس طبیعی مود یکم آن، به ترتیب، کمتر از ۳ برابر و حدود $8/5$ برابر خواهد شد. در برابر آن، افزایش سختی تکیه‌گاه‌های کشسان، بیشترین اثر را بر فرکانس‌های طبیعی تیر اولر-برنولی ($h/L=0$) دارد؛ به گونه‌ای که در سختی زیاد، فرکانس طبیعی مود یکم آن نسبت به حالت کمینه، ۹ برابر خواهد شد. در سختی میانه، فرکانس طبیعی مود یکم، بیش از ۳ برابر خواهد شد. افزون بر این، با افزایش نسبت ضخامت به طول، شدت کاهش فرکانس‌ها در مدهای بالاتر، چشم‌گیرتر است.

۳-۴ اثرهای نسبت ضخامت به طول تیر و جرم متمرکز در تیر طره با تکیه‌گاه‌های کشسان دورانی و انتقالی زیر اثر جرم متمرکز (شرایط مرزی نامتقارن)

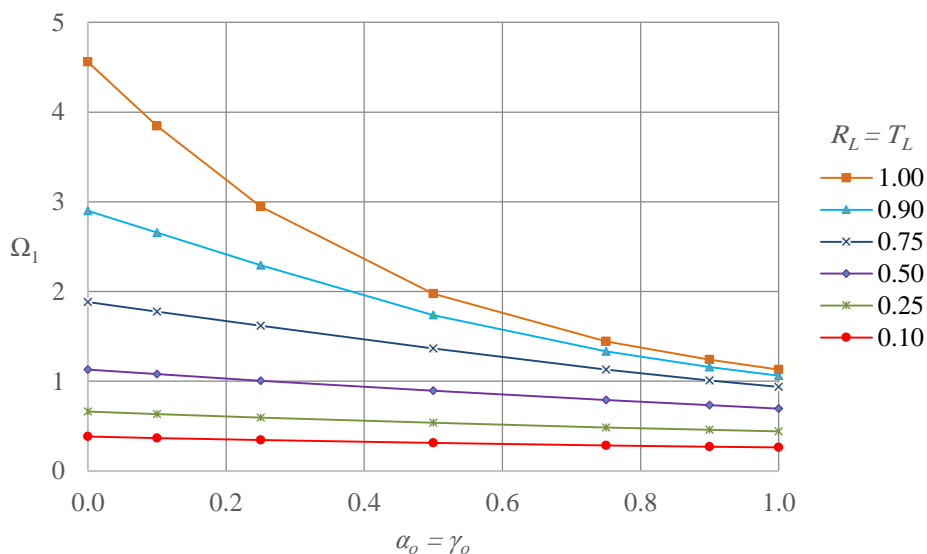
در این بخش، به بررسی تأثیر جرم متمرکز (M_0) بر تیر AFGM که در انتهای آن یک فنر انتقالی (k_{TL}) و یک فنر دورانی (k_{RL}) مدل‌سازی شده است، همانند شکل ۱۱، پرداخته می‌شود. نمودار تغییرات ضریب فرکانس طبیعی مود نخست تیر طره کشسان AFGM با جرم متمرکز، در برابر تغییر ضریب‌های جرم متمرکز و اینرسی چرخشی جرم متمرکز، برای دو نسبت ضخامت به طول مختلف ($h/L=0.2$ و 0.4)، به ترتیب در نمودارهای شکل‌های ۱۲ و ۱۳ آمده است. ضریب تغییرات سختی فنر دورانی انتهای تیر (R_L) و ضریب تغییرات سختی فنر انتقالی انتهای تیر (T_L)، بین 0.1 تا 1 است. ضریب جرم متمرکز (α_0) و ضریب اینرسی چرخشی جرم متمرکز (γ_0)، بین 0 تا 1 تغییر می‌کند. در این بررسی، شاخص تغییرات $\beta=0.5$ در نظر گرفته شده است. با بررسی نمودارهای شکل‌های ۱۲ و ۱۳، آشکار است که با افزایش هم‌زمان ضریب‌های جرم متمرکز و اینرسی چرخشی آن، فرکانس‌های طبیعی کاهش می‌یابند. دامنه‌ی تغییرات فرکانس ارتعاشی، در ضریب جرم متمرکز پایین‌تر (بازه صفر تا 0.1) و در ضریب سختی بالاتر، بیشتر از دامنه‌های دیگر است. همچنین، با افزایش سختی تکیه‌گاه‌های کشسان، فرکانس‌های سیستم افزایش پیدا می‌کند. افزون بر این، با افزایش نسبت ضخامت به طول تیر، شدت افزایش و دامنه‌ی تغییرات فرکانس‌های طبیعی کاهش می‌یابد.

جدول ۲ مقدارهای متفاوت ضریب فرکانس طبیعی (Ω_n) تیر دوسر تکیه‌گاه کشسان انتقالی و دورانی در سه مود نخست با نسبت ضخامت به طول متفاوت

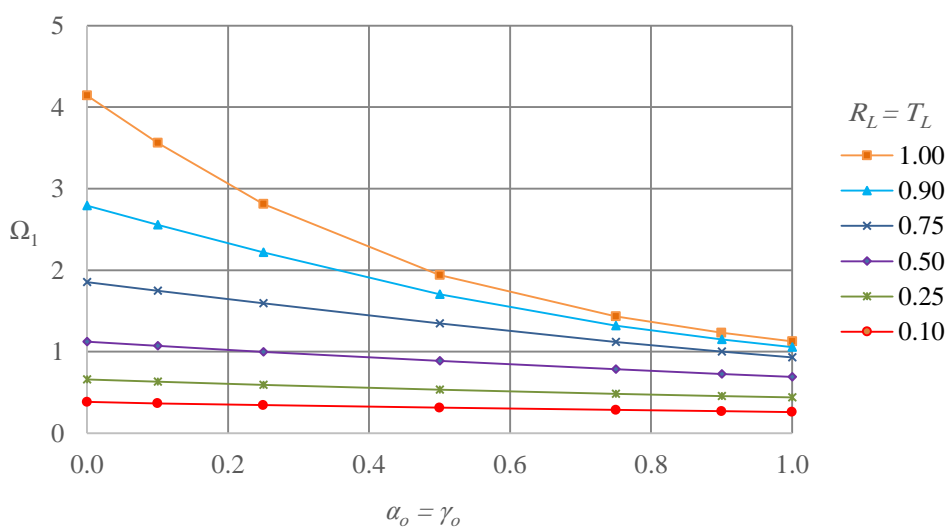
$R_0 = R_L = T_0 = T_L$			Ω_n	h/L
سختی زیاد (0.9)	سختی میانه (0.5)	سختی کم (0.1)		
۴/۲۵۹۱۱	۱/۴۴۹۴۶	۰/۴۸۵۲۲	$n=1$	۰/۰ (تیر اولر- برنولی)
۱۰/۵۸۵۹۳	۵/۱۸۳۰۰	۰/۸۹۷۰۷	$n=2$	
۳۴/۶۸۲۱۹	۲۵/۸۲۳۸۰	۲۲/۹۵۵۹۰	$n=3$	
۴/۲۲۴۸۷	۱/۴۴۸۰۹	۰/۴۸۵۱۵	$n=1$	۰/۲
۱۰/۱۷۱۶۱	۵/۰۴۳۹۶	۱/۸۵۷۱۰	$n=2$	
۲۹/۳۶۶۷۰	۲۲/۶۰۸۶۶	۲۰/۲۷۱۸۲	$n=3$	
۴/۱۲۶۱۶	۱/۴۴۳۹۸	۰/۴۸۴۹۶	$n=1$	۰/۴
۹/۲۸۶۸۸	۴/۷۰۲۳۹	۱/۷۵۰۹۹	$n=2$	
۲۲/۳۹۰۴۰	۱۷/۸۰۶۲۳	۱۶/۰۹۳۷۱	$n=3$	



شکل ۱۱ تیر طره با تکیه‌گاه‌های کشسان دورانی و انتقالی زیر اثر جرم متمرکز در سر آزاد ($\beta=\pm 0.5, T_L = R_L = \text{var.}, \alpha_0 = \gamma_0 = \text{var.}$)



شکل ۱۲ نمودار تغییرات ضریب فرکانس طبیعی مود نخست در برابر جرم متمرکز برای تیر طره‌ای کشسان AFGM با جرم متمرکز به ازای $\beta=0.5$ و سختی‌های متفاوت در نسبت ضخامت به طول $0.2, 0.4$ ($h/L=0.2$)



شکل ۱۳ نمودار تغییرات ضریب فرکانس طبیعی مود نخست در برابر جرم متمرکز برای تیر طره‌ای کشسان AFGM با جرم متمرکز به ازای $\beta=0.5$ و سختی‌های متفاوت در نسبت ضخامت به طول $0.4, 0.6$ ($h/L=0.4$)

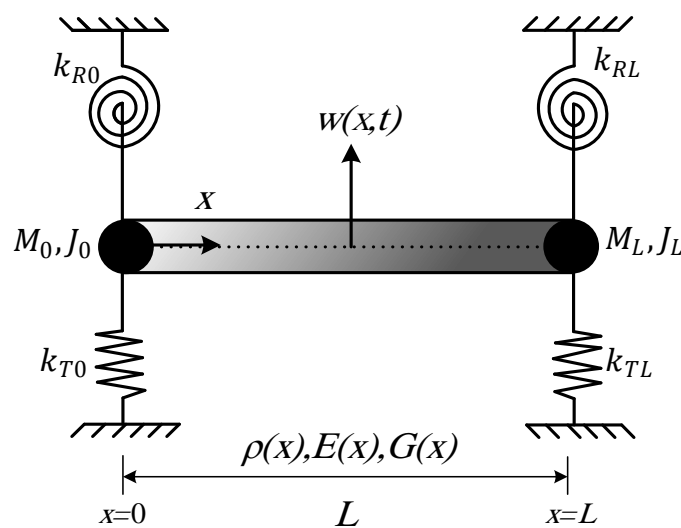
در ادامه، پاسخ‌های ضریب فرکانس‌های طبیعی نظیر ضریب سختی کم (۱۰ درصد)، میانه (۵۰ درصد) و ضریب سختی زیاد (۹۰ درصد)، در سه مود نخست با نسبت ضخامت به طول متفاوت، در جدول ۳ آمده است. بر پایه‌ی پاسخ‌های جدول ۳، افزایش هم‌زمان سختی تکیه‌گاه‌های کشسان انتهایی و جرم متمرکز ابتدای تیر، کمترین اثر را بر فرکانس‌های طبیعی تیر با نسبت ضخامت به طول برابر ۰/۴ دارد؛ به‌گونه‌ای که در سختی میانه و زیاد، فرکانس طبیعی مود یکم آن، به ترتیب، کمتر از ۲/۵ برابر و حدود ۳ برابر خواهد شد. در برابر آن، افزایش هم‌زمان سختی تکیه‌گاه‌های کشسان انتهایی و جرم متمرکز ابتدای تیر، بیشترین اثر را بر فرکانس‌های طبیعی تیر اولر-برنولی ($h/L=0$) دارد؛ به‌گونه‌ای که در سختی زیاد، فرکانس طبیعی مود یکم آن نسبت به حالت کمینه، ۵ برابر خواهد شد. در سختی میانه، فرکانس طبیعی مود یکم، بیش از ۲/۵ برابر خواهد شد. افزون بر این، با افزایش نسبت ضخامت به طول، شدت کاهش فرکانس‌ها در مودهای بالاتر، چشم‌گیرتر است.

جدول ۳ مقادیرهای متفاوت ضریب فرکانس طبیعی (Ω_n) تیر با جرم متمرکز و تکیه‌گاه‌های کشسان دورانی و انتقالی انتهایی در سه مود نخست با نسبت ضخامت به طول متفاوت

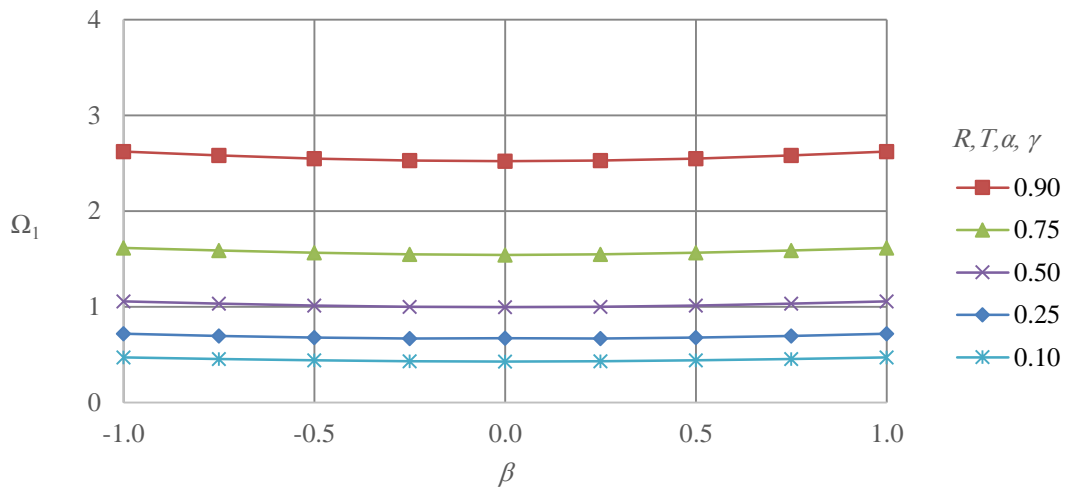
$R_L = T_L = \alpha_0 = \gamma_0$			Ω_n	h/L
سختی زیاد (۰/۹)	سختی متوسط (۰/۵)	سختی کم (۰/۱)		
۱/۷۶۸۴۵	۰/۹۲۱۶۲	۰/۳۶۸۱۶	$n=1$	۰/۰ (تیر اولر- برنولی)
۵/۷۱۰۷۸	۳/۰۵۹۶۷	۱/۴۴۵۰۳	$n=2$	
۲۲/۱۷۵۹۴	۱۸/۴۹۹۲۱	۱۹/۸۵۶۹۶	$n=3$	
۱/۱۵۷۸۹	۰/۸۹۳۷۲	۰/۳۶۷۸۲	$n=1$	۰/۲
۲/۶۳۱۲۵	۱/۹۳۰۱۸	۱/۳۸۰۲۱	$n=2$	
۷/۸۷۴۵۶	۶/۴۱۰۰۷	۱۴/۲۱۹۷۹	$n=3$	
۱/۱۴۹۵۷	۰/۸۸۷۴۱	۰/۳۶۷۳۲	$n=1$	۰/۴
۲/۵۰۴۷۰	۱/۹۱۳۹۹	۱/۳۱۹۹۱	$n=2$	
۷/۱۰۳۹۰	۵/۹۱۱۳۷	۱۲/۶۱۲۴۱	$n=3$	

۴-۴ اثرهای نسبت ضخامت به طول تیر و شاخص تغییرات بر تیر AFGM دوسر تکیه‌گاه کشسان دورانی و انتقالی با جرم‌های متمرکز انتهایی (شرایط مرزی متقارن کلی)

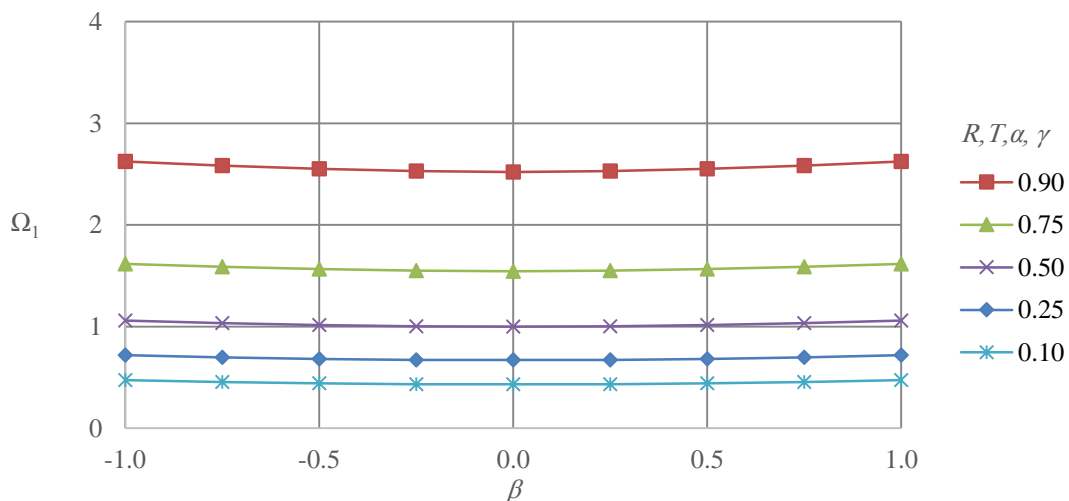
در این بخش، برای شناخت بهتر اثر شاخص تغییرات (β) بر فرکانس‌های طبیعی تیر AFGM با تکیه‌گاه‌های کشسان کلی، همانند شکل ۱۴، نمودار تغییرات ضریب فرکانس طبیعی مود نخست تیر متقارن AFGM دارای فنرهای انتقالی و دورانی به همراه جرم‌های متمرکز، در برابر تغییر شاخص تغییرات (β)، برای دو نسبت ضخامت به طول مختلف (۰/۲ و ۰/۴)، به ترتیب در نمودارهای شکل‌های ۱۵ و ۱۶ نمایش داده شده است. در ابتدای تیر، یک فنر انتقالی و یک فنر دورانی (k_{T0} و k_{R0}) به همراه جرم متمرکز (M_0) و در انتهای آن نیز، یک فنر انتقالی و یک فنر دورانی (k_{TL} و k_{RL}) و جرم متمرکز (M_L) مدل‌سازی شده است. ضریب تغییرات سختی فنر انتقالی در ابتدا و انتهای تیر (T_0 و T_L) و ضریب تغییرات سختی فنر دورانی در ابتدا و انتهای تیر (R_0 و R_L)، بین ۰/۱ تا ۰/۹ است. ضریب جرم متمرکز (α_0 و α_L) و ضریب اینرسی چرخشی جرم متمرکز (γ_0 و γ_L)، بین ۰ تا ۱ تغییر می‌کند. در این بررسی، شاخص تغییرات بین ۱- تا ۱ متغیر است. با توجه به نمودارهای شکل‌های ۱۵ و ۱۶ دیده می‌شود که برای تیر AFGM با شرایط مرزی کشسان و جرم نوک متقارن، حداقل فرکانس طبیعی، برای تیر همگن رخ می‌دهد. همچنین، به دلیل شرایط مرزی متقارن تیر، نمودار تغییرات فرکانس طبیعی در برابر شاخص تغییرات، متقارن است.



شکل ۱۴ تیر متقارن AFGM دارای فنرهای انتقالی و دورانی به همراه جرم‌های متمرکز ($\beta = \pm \text{var.}$, $R_0 = R_L = T_0 = T_L = \alpha_0 = \alpha_L = \gamma_0 = \gamma_L = \text{var.}$)



شکل ۱۵ نمودار تغییرات ضریب فرکانس طبیعی مود نخست در برابر شاخص تغییرات (β) برای تیرمتقارن AFGM دارای فنرهای انتقالی و دورانی به همراه جرم‌های متمرکز در نسبت ضخامت به طول $(h/L=0.2) \cdot 0.2$



شکل ۱۶ نمودار تغییرات ضریب فرکانس طبیعی مود نخست در برابر شاخص تغییرات (β) برای تیرمتقارن AFGM دارای فنرهای انتقالی و دورانی به همراه جرم‌های متمرکز در نسبت ضخامت به طول $(h/L=0.4) \cdot 0.4$

در ادامه، پاسخ‌های ضریب فرکانس‌های طبیعی نظیر ضریب سختی کم (۱۰ درصد)، میانه (۵۰ درصد) و ضریب سختی زیاد (۹۰ درصد)، در سه مود نخست با نسبت ضخامت به طول متفاوت، در جدول ۴ آمده‌اند. در این بررسی، شاخص تغییرات (β) برابر ۰/۵ است. یادآوری می‌کند، در نگره‌ی تیر اولر- برنولی، نسبت ضخامت به طول برابر صفر پنداشته می‌شود. می‌توان دید با افزایش نسبت ضخامت به طول (h/L)، فرکانس‌های طبیعی همواره کاهش می‌یابند. هر چند، شدت کاهش فرکانس‌ها در مودهای بالاتر، چشم‌گیرتر است. با افزایش نسبت ضخامت به طول تیر، شدت افزایش و دامنه تغییرات فرکانس‌های طبیعی کاهش می‌یابد. افزون بر این، مقدارهای مود یکم و دوم، با افزایش هم‌زمان سختی و نسبت جرم، افزایش می‌یابد. این روند برای فرکانس طبیعی سوم، متفاوت است. به طوری که با افزایش ضرایب جرم و سختی، در بازه‌ی ۰/۱ تا ۰/۵، تأثیر افزایش جرم بیشتر از تأثیر افزایش سختی می‌باشد و فرکانس طبیعی کاهش یافته است. در بازه‌ی ۰/۵ تا ۰/۹، افزایش سختی برتری داشته و فرکانس طبیعی افزایش یافته است.

جدول ۴ مقدهای متفاوت ضریب فرکانس طبیعی (Ω_n) تیر AFGM دارای فنرهای انتقالی و دورانی به همراه جرم‌های متمرکز در

سه مود نخست با نسبت ضخامت به طول متفاوت

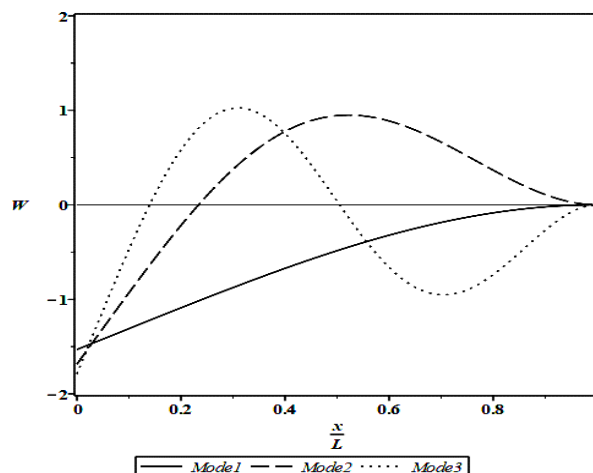
$R_0 = R_L = T_0 = T_L = \alpha_0 = \alpha_L = \gamma_0 = \gamma_L$			Ω_n	h/L
سختی زیاد (۰/۹)	سختی میانه (۰/۵)	سختی کم (۰/۱)		
۲/۵۵۹۰۳	۱/۰۱۵۸۳	۰/۴۴۱۳۷	$n=1$	۰/۰ (تیر اولر- برنولی)
۴/۷۳۰۱۷	۲/۶۹۴۳۰	۱/۵۰۴۶۱	$n=2$	
۲/۰۸۶۸۴	۱۵/۰۴۴۰۳	۱۷/۷۷۲۲۱	$n=3$	
۲/۵۵۰۳۸	۱/۰۱۴۷۴	۰/۴۴۱۲۸	$n=1$	۰/۲
۳/۲۲۸۴۳	۱/۷۴۲۷۵	۱/۳۷۸۶۳	$n=2$	
۳/۶۸۴۴۷	۳/۴۴۶۵۳	۱۱/۳۱۱۹۹	$n=3$	
۲/۵۴۲۴۱	۱/۰۱۴۰۵	۰/۴۴۱۱۷	$n=1$	۰/۴
۳/۲۱۶۸۷	۱/۷۲۹۳۵	۱/۳۳۲۷۷	$n=2$	
۳/۶۷۹۴۲	۳/۴۲۹۹۶	۱۰/۴۲۶۱۵	$n=3$	

۵- شکل موده‌های ارتعاشی تیر

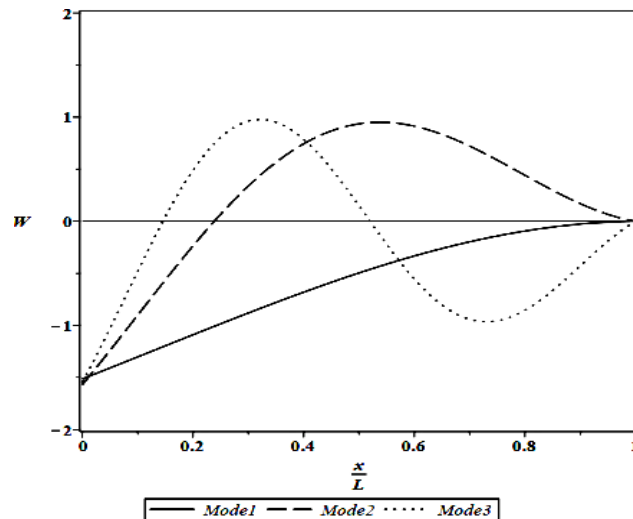
در این بخش، برای شناخت بهتر اثر عامل‌های مختلف مانند جرم متمرکز انتهایی، سختی تکیه‌گاه‌های کشسان و نسبت ضخامت به طول تیر بر شکل موده‌های ارتعاشی تیر AFGM، نمودار تغییرات شکل موده‌های یکم تا سوم تیرهای AFGM با تأثیر جرم متمرکز در نسبت‌های ضخامت به طول مختلف، در شکل‌های ۱۷ تا ۲۰ و نمودار تغییرات شکل موده‌های یکم تا سوم تیرهای AFGM با تأثیر سختی تکیه‌گاه کشسان در نسبت‌های ضخامت به طول مختلف در شکل‌های ۲۱ تا ۲۴ آمده است.

۵-۱- تأثیر جرم متمرکز با نسبت ضخامت به طول متفاوت

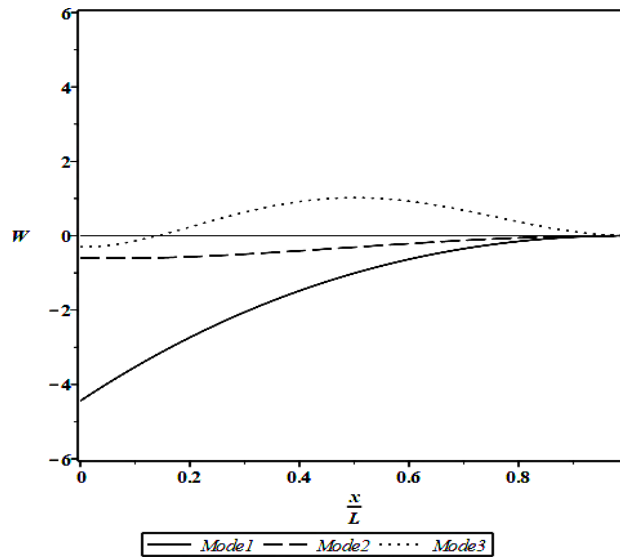
در این بخش، به بررسی دو نمونه پرداخته می‌شود. هر دو نمونه، تیر طره است که در آن ضریب‌های تغییرات سختی فنرهای دورانی و انتقالی ابتدای تیر، برابر صفر ($R_0=T_0=0$) و ضریب‌های تغییرات سختی فنرهای دورانی و انتقالی انتهایی تیر، برابر یک ($R_L=T_L=1$) است. با این تفاوت که در نمونه‌ی دوم، جرم متصل در ابتدای تیر (M_0) به مدل‌سازی افزوده می‌شود. ضریب جرم متمرکز (α_0) و ضریب اینرسی چرخشی (γ_0) جرم متصل، برابر ۱ پنداشته می‌شود. برای در نظر گرفتن اثر ضخامت تیر، هر یک از نمونه‌ها با نسبت ضخامت به طول (h/L) برابر صفر (تیر اولر- برنولی) و نسبت ضخامت به طول (h/L) برابر ۰/۲، ارزیابی شده است. در این بررسی، شاخص تغییرات (β) برابر ۰/۵ در نظر گرفته شده است. با توجه به نمودارهای بررسی شده در شکل‌های ۱۷ تا ۲۰، دیده می‌شود که افزودن جرم متمرکز و افزایش نسبت ضخامت به طول تیر، اثر قابل‌توجهی بر تغییر شکل موده‌های ارتعاشی خواهد داشت. با وجود این، اثر افزایش نسبت ضخامت به طول تیر با حضور جرم متمرکز، کمتر می‌شود.



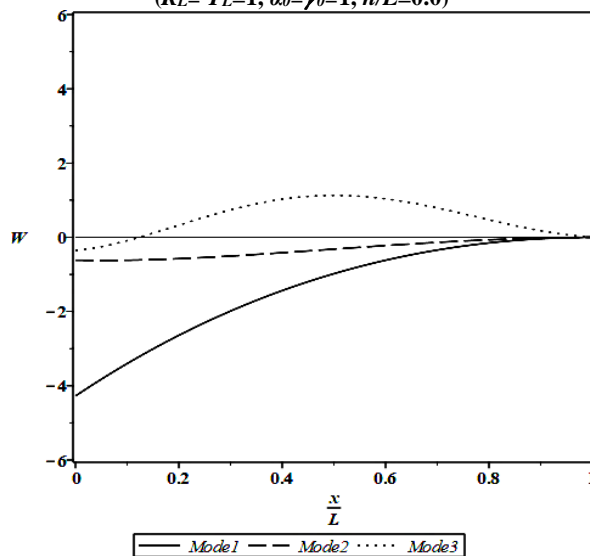
شکل ۱۷ تأثیر جرم متمرکز بر شکل موده‌های یکم تا سوم تیر طره AFGM با نسبت ضخامت به طول صفر در نمونه یکم ($R_L = T_L = 1, \alpha_0 = \gamma_0 = 0, h/L = 0.0$)



شکل ۱۸ تأثیر جرم متمرکز بر شکل مودهای یکم تا سوم تیر طره AFGM با نسبت ضخامت به طول ۰٫۲ در نمونه یکم ($R_L = T_L = 1, \alpha_0 = \gamma_0 = 0, h/L = 0.2$)



شکل ۱۹ تأثیر جرم متمرکز بر شکل مودهای یکم تا سوم تیر طره AFGM با نسبت ضخامت به طول صفر در نمونه دوم ($R_L = T_L = 1, \alpha_0 = \gamma_0 = 1, h/L = 0.0$)



با نسبت ضخامت به طول ۰٫۲ در نمونه دوم AFGM شکل ۲۰ تأثیر جرم متمرکز بر شکل مودهای یکم تا سوم تیر طره ($R_L = T_L = 1, \alpha_0 = \gamma_0 = 1, h/L = 0.2$)

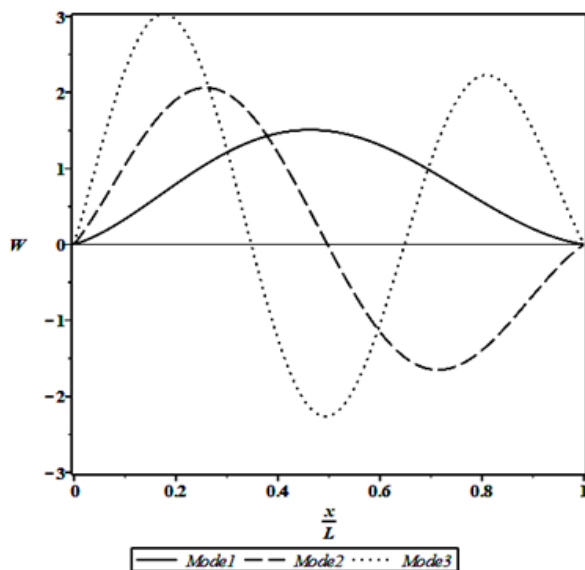
۵-۲ - تأثیر سختی تکیه‌گاه‌های کشسان با نسبت ضخامت به طول متفاوت

در این بخش، به بررسی دو نمونه تیر دوسر کشسان پرداخته می‌شود. نمونه‌ی یکم، تیر دوسر کشسان با سختی بیشینه، یعنی، همان تیر دوسرگیردار است که در آن همه‌ی ضریب‌های سختی (دورانی و انتقالی) ابتدا و انتهای تیر، برابر ۱ است. نمونه‌ی دوم، تیر دوسر تکیه‌گاه کشسان دورانی و انتقالی است که در آن همه‌ی ضریب‌های سختی (دورانی و انتقالی) ابتدا و انتهای تیر، برابر $0/9$ پنداشته می‌شود. برای در نظر گرفتن اثر ضخامت تیر، هر یک از نمونه‌ها با نسبت ضخامت به طول (h/L) برابر صفر (تیر اولر- برنولی) و نسبت ضخامت به طول (h/L) برابر $0/2$ ، ارزیابی شده‌است. در این بررسی، شاخص تغییرات (β) برابر $0/5$ در نظر گرفته شده است. بر پایه نمودارهای شکل‌های ۲۱ تا ۲۴، دیده می‌شود که سختی تکیه‌گاه‌های کشسان و افزایش نسبت ضخامت به طول تیر، اثر قابل توجهی بر تغییر شکل مودهای ارتعاشی خواهد داشت. باوجوداین، اثر افزایش نسبت ضخامت به طول تیر با کاهش سختی تکیه‌گاه‌ها، کم‌رنگ‌تر می‌شود.

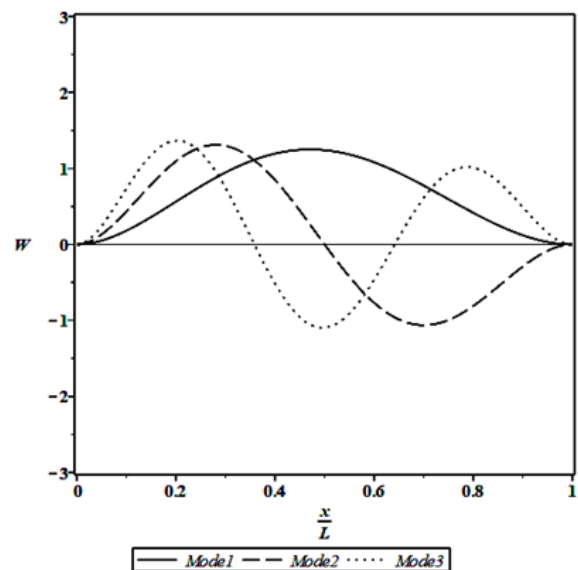
۶- نتیجه‌گیری

در این نوشتار، برای نخستین بار، به رابطه‌سازی دقیقی برای یافتن فرکانس‌های طبیعی با در نظر گرفتن شرط‌های مرزی کلی تکیه‌گاهی و اثرهای جرم متمرکز انتهایی که دربرگیرنده‌ی الگوهای مختلف تغییر شکل تیرها می‌باشد، پرداخته شد. از یافته‌های این پژوهش می‌توان برای صحت سنجی دیگر روش‌های تحلیلی و عددی بهره جست. بر پایه‌ی پاسخ‌های به‌دست‌آمده از نمونه‌های عددی بررسی شده، می‌توان به نتایج زیر دست یافت:

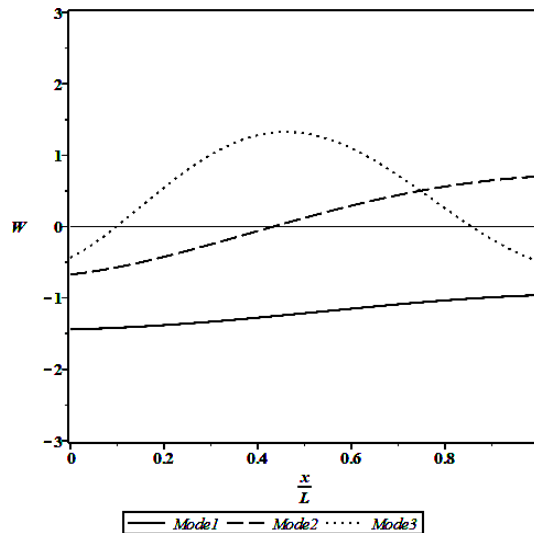
۱- در بررسی اثر الگوهای متفاوت تغییر شکل تیرها در تیر با شرط‌های مرزی رایج، تیر طره‌ی AFGM تیموشنکو و تیر دو سر گیردار AFGM اولر-برنولی با قدر مطلق شاخص تغییرات یک $(|\beta| = 1)$ ، به ترتیب، دارای کمترین و بیشترین فرکانس‌های طبیعی اساسی می‌باشند. از سوی دیگر، در نظر گرفتن اثر برش می‌تواند بیش از ۲۰ درصد، فرکانس طبیعی اساسی تیر دوسر گیردار AFGM را کاهش دهد.



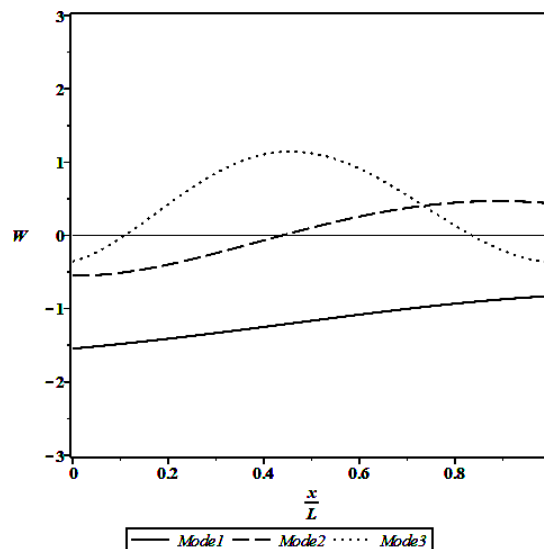
شکل ۲۲ تأثیر شرایط تکیه‌گاهی بر شکل مودهای یکم تا سوم تیر دوسر کشسان AFGM با نسبت ضخامت به طول $0/2$ در نمونه یکم $(R_0 = T_0 = R_L = T_L = 1, h/L = 0.2)$



شکل ۲۱ تأثیر شرایط تکیه‌گاهی بر شکل مودهای یکم تا سوم تیر دوسر کشسان AFGM با نسبت ضخامت به طول صفر در نمونه یکم $(R_0 = T_0 = R_L = T_L = 1, h/L = 0.0)$



شکل ۲۳ تأثیر شرایط تکیه‌گاهی بر شکل مودهای یکم تا سوم تیر دوسر کشسان AFGM با نسبت ضخامت به طول صفر در نمونه دوم ($R_0 = T_0 = R_L = T_L = 0.9, h/L = 0.0$)



شکل ۲۴ تأثیر شرایط تکیه‌گاهی بر شکل مودهای یکم تا سوم تیر دوسر کشسان AFGM با نسبت ضخامت به طول ۰/۲ در نمونه دوم ($R_0 = T_0 = R_L = T_L = 0.9, h/L = 0.2$)

۲- بررسی الگوهای متفاوت تغییر شکل‌ها، نشان می‌دهد که تیرهای برشی تقریب خوبی برای مدل‌سازی تیرهای تیموشنکو می‌باشند. برای مثال، در تیر همگن ($\beta=0$) با شرط‌های مرزی رایج، فرکانس طبیعی مود یکم تیر تیموشنکو، کمتر از یک درصد با فرکانس طبیعی تیر برشی تفاوت دارد.

۳- با افزایش نسبت ضخامت به طول، برای تمامی شرایط مرزی، ضریب فرکانس طبیعی سیستم کاهش می‌یابد؛ هر چند، شدت کاهش فرکانس‌ها در مودهای بالاتر، چشم‌گیرتر است. افزون بر این، در نسبت‌های ضخامت به طول بیشتر، شدت کاهش فرکانس‌ها بارزتر است.

۴- با افزایش سختی تکیه‌گاه‌های کشسان، فرکانس‌های طبیعی سیستم افزایش می‌یابند. با وجود این، شدت افزایش و دامنه تغییرات فرکانس طبیعی در مودهای پایین، بیشتر از مودهای بالاتر است. برای مثال، در تیر طره کشسان AFGM، افزایش ضریب‌های سختی از ۰/۱ به ۱/۰، می‌تواند سبب افزایش بیش از ۱۰ برابری فرکانس مود یکم شود.

۵- با افزایش ضریب جرم متمرکز، فرکانس‌های طبیعی کاهش می‌یابند. دامنه‌ی تغییرات فرکانس‌های ارتعاشی، در ضریب جرم متمرکز پایین‌تر (بازه صفر تا ۰/۱)، بیشتر از دامنه‌های دیگر است. برای مثال، در تیر طره AFGM با جرم انتهایی، افزایش ضریب‌های جرم از صفر به ۱/۰، می‌تواند سبب کاهش بیش از ۷۰ درصدی فرکانس مود یکم شود.

- ۶- با افزایش سختی تکیه‌گاه‌های کشسان، در نسبت‌های ضخامت به طول بیشتر، شدت افزایش و دامنه‌ی تغییرات فرکانس‌های طبیعی کاهش می‌یابد. به دیگر سخن، فرکانس‌های ارتعاشی در تیرهای ضخیم‌تر، حساسیت کمتری به تغییرات سختی فنرهای دورانی و انتقالی دارند. برای مثال، در تیر متقارن AFGM با تکیه‌گاه‌های کشسان دورانی و انتقالی، افزایش سختی تکیه‌گاه‌های کشسان انتقالی و دورانی، کمترین اثر را بر فرکانس‌های طبیعی تیر با نسبت ضخامت به طول برابر $0/4$ دارد؛ به گونه‌ای که در سختی زیاد، فرکانس طبیعی مود یکم آن نسبت به حالت کمینه، حدود $8/5$ برابر خواهد شد. در برابر آن، افزایش سختی تکیه‌گاه‌های کشسان، بیشترین اثر را بر فرکانس‌های طبیعی تیر اولر- برنولی ($h/L=0$) دارد؛ به گونه‌ای که در سختی زیاد، فرکانس طبیعی مود یکم آن نسبت به حالت کمینه، 9 برابر خواهد شد.
- ۷- تأثیر تغییرات سختی فنرهای انتقالی بر فرکانس‌های ارتعاشی سیستم، بیشتر از سختی فنرهای دورانی است.
- ۸- برای تیر AFGM با شرایط مرزی کشسان و جرم نوک متقارن، حداقل فرکانس طبیعی، برای تیر همگن ($\beta=0$) رخ می‌دهد. همچنین، به دلیل شرایط مرزی متقارن تیر، نمودار تغییرات فرکانس طبیعی در برابر شاخص تغییرات نمایی، متقارن است.
- ۹- افزودن جرم متمرکز و افزایش نسبت ضخامت به طول تیر، اثر قابل توجهی بر تغییر شکل مودهای ارتعاشی خواهد داشت. با وجود این، اثر افزایش نسبت ضخامت به طول تیر با حضور جرم متمرکز، کم‌رنگ‌تر می‌شود.
- ۱۰- سختی تکیه‌گاه‌های کشسان و افزایش نسبت ضخامت به طول تیر، اثر قابل توجهی بر تغییر شکل مودهای ارتعاشی خواهد داشت. با وجود این، اثر افزایش نسبت ضخامت به طول تیر با کاهش سختی تکیه‌گاه‌ها، کم‌رنگ‌تر می‌شود.
- ۱۲- با بررسی اثر افزایش ضخامت بر شکل مودهای ارتعاشی تیر AFGM مشخص شد که تأثیر برش در مودهای ارتعاشی بالاتر، به دلیل کاهش طول نیم موج مود، محسوس‌تر از مودهای ارتعاشی پایین است.

Authorship Contribution Statement

Najmeh Salemian



Biography: MSc Student at Quchan University of Technology.

Contribution Statement: Methodology, Software, Formal analysis, Validation, Investigation, Writing- Original draft.

Dr. Mohsen Bambaeechee



Biography: Assistant Professor in the Department of Civil Engineering at Quchan University of Technology

Contribution Statement: Conceptualization, Methodology, Software, Formal analysis, Investigation, Writing- review & editing, Visualization supervision.

۷- مراجع

- [1] Tang A-Y, Wu J-X, Li X-F, Lee K. Exact frequency equations of free vibration of exponentially non-uniform functionally graded Timoshenko beams. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2014;89:1-11.
- [2] Rajasekaran S, Norouzzadeh Tochaie E. Free vibration analysis of axially functionally graded tapered Timoshenko beams using differential transformation element method and differential quadrature element method of lowest-order. *Meccanica*. 2014;49:995-1009.
- [3] Mohammadnejad M, Saffari H, Bagheripour M. An analytical approach to vibration analysis of beams with variable properties. *Arabian Journal for Science and Engineering*. 2014;39:2561-72.

- [4] Shi D, Wang Q, Shi X, Pang F. An accurate solution method for the vibration analysis of Timoshenko beams with general elastic supports. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*. 2015;229:2327-40.
- [5] Ghannadiasl A, Mofid M. An analytical solution for free vibration of elastically restrained Timoshenko beam on an arbitrary variable Winkler foundation and under axial load. *Latin American Journal of Solids and Structures*. 2015;12:2417-38.
- [6] Yuan J, Pao Y-H, Chen W. Exact solutions for free vibrations of axially inhomogeneous Timoshenko beams with variable cross section. *Acta Mechanica*. 2016;227:2625-43.
- [7] da Costa Azevêdo AS, Vasconcelos ACA, dos Santos Hoefel S. Dynamic analysis of elastically supported Timoshenko beam. *Revista Interdisciplinar de Pesquisa em Engenharia*. 2016;2(34):71-85.
- [8] Bambill DV, Rossit CA, Felix DH. Free vibrations of stepped axially functionally graded Timoshenko beams. *Meccanica*. 2015;50:1073-87.
- [9] Huang Y, Zhang M, Rong H. Buckling analysis of axially functionally graded and non-uniform beams based on Timoshenko theory. *Acta Mechanica Solida Sinica*. 2016;29:200-7.
- [10] Soltani M. Vibration characteristics of axially loaded tapered Timoshenko beams made of functionally graded materials by the power series method. *Numerical Methods in Civil Engineering*. 2017;2:1-14.
- [11] Bozyigit B, Yesilce Y, Catal HH. Free flexural vibrations of axially loaded Timoshenko beams with internal viscous damping using dynamic stiffness formulation and differential transformation. *Seismic Isolation, Structural Health Monitoring, and Performance Based Seismic Design in Earthquake Engineering: Recent Developments*. 2019:307-28.
- [12] Zhang N, Khan T, Guo H, Shi S, Zhong W, Zhang W. Functionally graded materials: an overview of stability, buckling, and free vibration analysis. *Advances in Materials Science and Engineering*. 2019;2019:1354150.
- [13] Kumar S. Dynamic behaviour of axially functionally graded beam resting on variable elastic foundation. *Archive of Mechanical Engineering*. 2020;67:451-70.
- [14] Zahedinejad P, Zhang C, Zhang H, Ju S. A comprehensive review on vibration analysis of functionally graded beams. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. 2020;20:2030002.
- [15] Pala Y, Beycimen S, Kahya C. Damped vibration analysis of cracked Timoshenko beams with restrained end conditions. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*. 2020;42:1-16.
- [16] Fogang V. Vibration Analysis of Axially Functionally Graded Non-Prismatic Euler-Bernoulli Beams Using the Finite Difference Method. 2021.
- [17] Bambaeechee M. Exact frequencies for free vibration of exponential and polynomial AFG beams with lumped end masses and elastic supports. *Journal of Vibration Engineering & Technologies*. 2023;11:2903-26.
- [18] Sharma P, Prajapati U, Khinchi A. Computational modeling of an exponential functionally graded material (EFGM) beam. *International Journal on Interactive Design and Manufacturing (IJIDeM)*. 2022:1-9.
- [19] Bambaeechee M, Jalili Qazizadeh M, Movahedian O. Free vibration analysis of exponential AFGM beams with general boundary conditions and tip masses. *Asian Journal of Civil Engineering*. 2023;24:539-57.
- [20] Gautam M, Sharma P, Chaturvedi M. Modeling of FGM beam under an extended exponential law. *International Journal on Interactive Design and Manufacturing (IJIDeM)*. 2024;18(4):2271-6.
- [21] Khorshidi K, Karimi M, Rezaeisaray M. Piezoelectric Energy Harvesting from Functionally Graded Beams Using Modified Shear Deformation Theories. *Mechanic of Advanced and Smart Materials*. 2022; 2:136-154. (in Persian)
- [22] Hosseini-Hashemi K, Talebitooti R, Hosseini-Hashemi S, Nazemnezhad R. A unique and comprehensive approach to investigate the transverse free vibration of non-uniform and functionally graded Euler-Bernoulli beams. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*. 2023;45:551.
- [23] Hosseini-Hashemi K, Talebitooti R, Hosseini-Hashemi S. The exact characteristic equation of frequency and mode shape for transverse vibrations of non-uniform and non-homogeneous Euler Bernoulli beam with general non-classical boundary conditions at both ends. *Mechanic of Advanced and Smart Materials*. 2023;3:1-20.
- [24] Skandarzadeh-Sabet A, Jabbari M. Investigation of functional materials (FGM), properties and their application in different industries. *Journal of Iranian Ceramic Society*. 2022;16:52-65. (in Persian)

- [25] Kocattürk T, Şimşek M. Free vibration analysis of Timoshenko beams under various boundary conditions. *Sigma*. 2005;1:30-44.
- [26] Bambaechee M. Free vibration of AFG beams with elastic end restraints. *Steel and Composite Structures*. 2019;33:403-32.
- [27] Lai H-Y, Hsu J-C. An innovative eigenvalue problem solver for free vibration of Euler–Bernoulli beam by using the Adomian decomposition method. *Computers & Mathematics with Applications*. 2008;56:3204-20.

۸- پیوست

درایه‌های ماتریس ضریب‌های ثابت ارتعاش آزاد تیرکلی AFG با تکیه‌گاه‌های کشسان انتهایی و زیر اثر جرم‌های متمرکز انتهایی به قرار زیر می‌باشند:

$$K_{11} = \frac{1}{(\beta^2 + \delta_1^2)(-\beta^2 + \delta_2^2)} (-\Omega^4 \beta^3 \gamma_0^2 s^2 - \Omega^2 \beta^5 \gamma_0^2 R_0 - \Omega^2 \beta^4 \gamma_0^2 R_0 + \Omega^2 \beta^3 \gamma_0^2 \delta_1^2 - \Omega^2 \beta^3 \gamma_0^2 \delta_2^2 + \Omega^2 \beta^3 s^2 R_0 - \Omega^2 \beta^2 s^2 \delta_1^2 - \Omega^2 \beta^2 s^2 \delta_2^2 + \Omega^2 s^2 \delta_1^2 \delta_2^2 + \beta R_0 \delta_1^2 \delta_2^2 + \Omega^2 \beta^2 s^2 R_0 \delta_1^2 + \Omega^2 \beta^2 s^2 R_0 \delta_2^2 - \Omega^2 \beta \gamma_0^2 \delta_1^2 \delta_2^2 - \Omega^2 s^2 R_0 \delta_1^2 \delta_2^2 - \Omega^2 \beta s^2 R_0 \delta_2^2 + \beta^6 R_0 - \beta^5 R_0 + \beta^4 \delta_2^2 + \beta^2 \delta_1^4 - \delta_1^4 \delta_2^2 - \beta^6 - \Omega^4 \beta \gamma_0^2 s^2 R_0 \delta_2^2 + \Omega^2 \beta \gamma_0^2 R_0 \delta_1^2 \delta_2^2 + \Omega^4 \beta^3 \gamma_0^2 s^2 R_0 + \Omega^4 \beta \gamma_0^2 s^2 \delta_2^2 - \Omega^2 \beta^3 \gamma_0^2 R_0 \delta_1^2 + \Omega^2 \beta^3 \gamma_0^2 R_0 \delta_2^2 + \Omega^2 \beta^5 \gamma_0^2 + \Omega^2 \beta^4 s^2 - \beta^4 R_0 \delta_2^2 - \beta^2 R_0 \delta_1^4 + R_0 \delta_1^4 \delta_2^2 - \beta^3 R_0 \delta_1^2 + \beta^3 R_0 \delta_2^2)$$

$$K_{12} = \frac{1}{(\beta^2 + \delta_1^2)(-\beta^2 + \delta_2^2)} (\Omega^4 \beta^2 \gamma_0^2 s^2 \delta_1 - \Omega^4 \gamma_0^2 s^2 \delta_1 \delta_2^2 + \Omega^2 \beta^4 \gamma_0^2 R_0 \delta_1 + \Omega^2 \beta^2 \gamma_0^2 R_0 \delta_1^3 - \Omega^2 \gamma_0^2 R_0 R_0 \delta_1^3 \delta_2^2 + 2\Omega^2 \beta^3 s^2 R_0 \delta_1 + \Omega^2 \beta^2 \gamma_0^2 \delta_1 \delta_2^2 - \Omega^2 \beta^2 s^2 R_0 \delta_1 + 2\Omega^2 \beta s^2 \delta_1 \delta_2^2 + \Omega^2 s^2 R_0 \delta_1 \delta_2^2 - \Omega^2 \beta^2 \gamma_0^2 \delta_1^3 + \Omega^2 \gamma_0^2 \delta_1^3 \delta_2^2 - 2\Omega^2 \beta^3 s^2 \delta_1 + 2\beta^3 R_0 \delta_1 \delta_2^2 + 2\beta R_0 \delta_1^3 \delta_2^2 - \beta^2 R_0 \delta_1 \delta_2^2 - \Omega^2 \beta^4 \delta_1 - 2\beta^5 R_0 \delta_1 - 2\beta^3 R_0 \delta_1^3 + \beta^4 R_0 \delta_1 - 2\beta^3 \delta_1 \delta_2^2 + \beta^2 R_0 \delta_1^3 - 2\beta \delta_1^3 \delta_2^2 - \delta_1^3 \delta_2^2 R_0 - \Omega^4 \beta^2 \gamma_0^2 s^2 R_0 \delta_1 + \Omega^4 \gamma_0^2 s^2 R_0 \delta_1 \delta_2^2 - \Omega^2 \beta^2 \gamma_0^2 R_0 \delta_1 \delta_2^2 - 2\Omega^2 \beta s^2 R_0 \delta_1 \delta_2^2 + 2\beta^5 \delta_1 + 2\beta^3 \delta_1^3)$$

$$K_{13} = \frac{1}{(\beta^2 + \delta_1^2)(-\beta^2 + \delta_2^2)} (\Omega^4 \beta^3 \gamma_0^2 s^2 R_0 - \Omega^4 \beta \gamma_0^2 s^2 \delta_1^2 - \Omega^2 \beta^3 \gamma_0^2 R_0 \delta_1^2 + \Omega^2 \beta^3 \gamma_0^2 R_0 \delta_2^2 - \Omega^2 \beta^2 s^2 R_0 \delta_1^2 - \Omega^2 \beta^2 s^2 R_0 \delta_2^2 - \Omega^2 \beta \gamma_0^2 \delta_1^2 \delta_2^2 - \Omega^2 s^2 R_0 \delta_1^2 \delta_2^2 + \Omega^2 \beta s^2 R_0 \delta_1^2 + \Omega^2 \beta^3 \gamma_0^2 \delta_1^2 - \Omega^2 \beta^3 \gamma_0^2 \delta_2^2 + \Omega^2 \beta^3 s^2 R_0 + \Omega^2 \beta^2 s^2 \delta_1^2 + \Omega^2 \beta^2 s^2 \delta_2^2 + \Omega^2 s^2 \delta_1^2 \delta_2^2 + \beta R_0 \delta_1^2 \delta_2^2 - \Omega^4 \beta^3 \gamma_0^2 s^2 - \Omega^2 \beta^5 \gamma_0^2 R_0 - \Omega^2 \beta^4 s^2 R_0 + \Omega^2 \beta^5 \gamma_0^2 + \Omega^2 \beta^4 s^2 + \beta^4 R_0 \delta_1^2 - \beta^2 R_0 \delta_2^4 - R_0 \delta_1^2 \delta_2^4 - \beta^3 R_0 \delta_1^2 + \beta^3 R_0 \delta_2^2 - \beta^6 + \Omega^4 \beta \gamma_0^2 s^2 R_0 \delta_1^2 + \Omega^2 \beta \gamma_0^2 R_0 \delta_1^2 \delta_2^2 + \beta^2 \delta_2^4 + \delta_1^2 \delta_2^4 + \beta^6 R_0 - \beta^5 R_0 - \beta^4 \delta_1^2)$$

$$K_{14} = \frac{1}{(\beta^2 + \delta_1^2)(-\beta^2 + \delta_2^2)} (2\beta^5 \delta_2 - 2\beta^3 \delta_2^3 + 2\Omega^2 \beta s^2 R_0 \delta_1^2 \delta_2 - \Omega^4 \beta^2 \gamma_0^2 s^2 R_0 \delta_2 - \Omega^4 \gamma_0^2 2R_0 \delta_1^2 \delta_2 + \Omega^2 \beta^2 \gamma_0^2 C_4 R_0 \delta_1^2 \delta_2 - 2\beta^5 R_0 \delta_2 + 2\beta^3 R_0 \delta_2^3 + \beta^4 R_0 \delta_2 + 2\beta^3 \delta_1^2 \delta_2 - \beta^2 R_0 \delta_2^3 - 2\beta \delta_1^2 \delta_2^3 - \delta_1^2 \delta_2^3 R_0 - \Omega^2 \beta^2 s^2 R_0 \delta_2 - 2\Omega^2 \beta s^2 \delta_1^2 \delta_2 - \Omega^2 s^2 R_0 \delta_1^2 \delta_2 + \Omega^4 \beta^2 \gamma_0^2 s^2 \delta_2 + \Omega^4 \gamma_0^2 s^2 \delta_1^2 \delta_2 + \Omega^2 \beta^4 \gamma_0^2 R_0 \delta_2 - \Omega^2 \beta^2 \gamma_0^2 R_0 \delta_2^3 - \Omega^2 \gamma_0^2 R_0 \delta_1^2 \delta_2^3 + 2\Omega^2 \beta^3 s^2 R_0 \delta_2 - \Omega^2 \beta^2 \gamma_0^2 \delta_1^2 \delta_2 - \Omega^2 \beta^4 \gamma_0^2 \delta_2 + \Omega^2 \beta^2 \gamma_0^2 \delta_2^3 + \Omega^2 \gamma_0^2 \delta_1^2 \delta_2^3 - 2\Omega^2 \beta^3 s^2 \delta_2 - 2\beta^3 R_0 \delta_1^2 \delta_2 + 2\beta R_0 \delta_1^2 \delta_2^3 + \beta^2 R_0 \delta_1^2 \delta_2)$$

$$K_{21} = \frac{1}{(\beta^2 + \delta_1^2)(-\beta^2 + \delta_2^2)} (\Omega^2 \beta^2 T_0 \alpha_0 \delta_1^2 - \Omega^2 \beta^2 T_0 \alpha_0 \delta_2^2 - \Omega^2 T_0 \alpha_0 \delta_1^2 \delta_2^2 + \Omega^2 \alpha_0 \delta_2^2 + \Omega^2 \beta T_0 \delta_2^2 + \Omega^2 \beta^4 T_0 \alpha_0 - \Omega^2 \beta^2 \alpha_0 \delta_1^2 + \Omega^2 \beta^2 \alpha_0 \delta_2^2 - \Omega^2 \beta^4 T_0 - \Omega^2 \beta^3 T_0 - \Omega^2 \beta \delta_2^2 + \beta^2 T_0 \delta_1^2 - \beta^2 T_0 \delta_2^2 - T_0 \delta_1^2 \delta_2^2 + \Omega^2 \beta^3 + \beta^4 T_0)$$

$$\begin{aligned}
 K_{22} &= \frac{1}{(\beta^2 + \delta_1^2)(-\beta^2 + \delta_2^2)} (\Omega^2 \beta^2 T_0 \delta_1 - \Omega^2 T_0 \delta_2^2 \delta_1 - \Omega^2 \beta^2 \delta_1 + \Omega^2 \delta_2^2 \delta_1) \\
 K_{23} &= \frac{1}{(\beta^2 + \delta_1^2)(-\beta^2 + \delta_2^2)} (-\Omega^2 \beta T_0 \delta_1^2 + \Omega^2 \beta^4 T_0 \alpha_0 - \Omega^2 \beta^2 \alpha_0 \delta_1^2 + \Omega^2 \beta^2 \alpha_0 \delta_2^2 + \Omega^2 \alpha_0 \delta_1^2 \delta_2^2 \\
 &\quad + \Omega^2 \beta^3 + \beta^4 T_0 - \Omega^2 \beta^4 \alpha_0 - \Omega^2 \beta^3 T_0 + \Omega^2 \beta \delta_1^2 + \beta^2 T_0 \delta_1^2 - \beta^2 T_0 \delta_2^2 - T_0 \delta_1^2 \delta_2^2 \\
 &\quad + \Omega^2 \beta^2 T_0 \alpha_0 \delta_1^2 - \Omega^2 \beta^2 T_0 \alpha_0 \delta_2^2 - \Omega^2 T_0 \alpha_0 \delta_1^2 \delta_2^2) \\
 K_{24} &= \frac{1}{(\beta^2 + \delta_1^2)(-\beta^2 + \delta_2^2)} (\Omega^2 \beta^2 T_0 \delta_2 + \Omega^2 T_0 \delta_1^2 \delta_2 - \Omega^2 \beta^2 \delta_2 - \Omega^2 \delta_1^2 \delta_2) \\
 K_{31} &= \frac{1}{(\beta^2 + \delta_1^2)(-\beta^2 + \delta_2^2)} \left[(-\cos(\delta_1) e^\beta \beta^6 + 2 \sin(\delta_1) e^\beta \Omega^2 R s^2 R_L \delta_1 \delta_2^2 \right. \\
 &\quad + \frac{\gamma_L^2 \Omega^4 \cos(\delta_1) \beta s^2 R_L \delta_2^2}{e^\beta} - \frac{\gamma_L^2 \Omega^4 \sin(\delta_1) \beta^2 s^2 R_L \delta_1}{e^\beta} + \frac{\gamma_L^2 \Omega^4 \sin(\delta_1) s^2 R_L \delta_1 \delta_2^2}{e^\beta} \\
 &\quad - \frac{\gamma_L^2 \Omega^2 \cos(\delta_1) \beta R_L \delta_1^2 \delta_2^2}{e^\beta} - \frac{\gamma_L^2 \Omega^2 \sin(\delta_1) \beta^2 R_L \delta_1 \delta_2^2}{e^\beta} + \cos(\delta_1) e^\beta \beta^3 R_L \delta_1^2 \\
 &\quad - \cos(\delta_1) e^\beta \beta^3 R_L \delta_2^2 + \sin(\delta_1) e^\beta \beta^4 R_L \delta_1 + \cos(\delta_1) e^\beta \Omega^2 \beta^4 s^2 - \frac{\gamma_L^2 \Omega^2 \cos(\delta_1) \beta^5}{e^\beta} \\
 &\quad + 2 \sin(\delta_1) e^\beta \beta^3 \delta_1 \delta_2^2 + \sin(\delta_1) e^\beta \beta^2 R_L \delta_1^3 + 2 \sin(\delta_1) e^\beta \beta \delta_1^3 \delta_2^2 - \sin(\delta_1) e^\beta R_L \delta_1^3 \delta_2^2 \\
 &\quad - \cos(\delta_1) e^\beta \beta^4 R_L \delta_2^2 - \cos(\delta_1) e^\beta \beta^2 R_L \delta_1^4 + \cos(\delta_1) e^\beta R_L \delta_1^4 \delta_2^2 + 2 \sin(\delta_1) e^\beta \beta^5 R_L \delta_1 \\
 &\quad + 2 \sin(\delta_1) e^\beta \beta^3 R_L \delta_1^3 + \cos(\delta_1) e^\beta \beta^5 R_L + \cos(\delta_1) e^\beta \beta^4 \delta_2^2 + \cos(\delta_1) e^\beta \beta^2 \delta_1^4 \\
 &\quad - \cos(\delta_1) e^\beta \delta_1^4 \delta_2^2 - 2 \sin(\delta_1) e^\beta \beta^5 \delta_1 - 2 \sin(\delta_1) e^\beta \beta^3 \delta_1^3 + \cos(\delta_1) e^\beta \beta^6 R_L \\
 &\quad + \frac{\gamma_L^2 \Omega^2 \cos(\delta_1) \beta \delta_2^2 \delta_1^2}{e^\beta} - 2 \sin(\delta_1) e^\beta \beta^3 R_L \delta_1 \delta_2^2 - 2 \sin(\delta_1) e^\beta \beta R_L \delta_1^3 \delta_2^2 \\
 &\quad - \sin(\delta_1) e^\beta \Omega^2 \beta^4 s^2 R_L + \frac{\gamma_L^2 \Omega^2 \sin(\delta_1) \beta^2 R_L \delta_1^3}{e^\beta} - \frac{\gamma_L^2 \Omega^2 \sin(\delta_1) R_L \delta_1^3 \delta_2^2}{e^\beta} \\
 &\quad + \frac{\gamma_L^2 \Omega^2 \cos(\delta_1) \beta^3 R_L \delta_1^2}{e^\beta} - \frac{\gamma_L^2 \Omega^2 \cos(\delta_1) \beta^3 R_L \delta_2^2}{e^\beta} + \frac{\gamma_L^2 \Omega^2 \sin(\delta_1) \beta^4 R_L \delta_1}{e^\beta} \\
 &\quad - \frac{\gamma_L^2 \Omega^4 \cos(\delta_1) \beta^3 s^2 R_L}{e^\beta} + \cos(\delta_1) e^\beta \Omega^2 \beta s^2 R_L \delta_2^2 - \sin(\delta_1) e^\beta \Omega^2 \beta^2 s^2 R_L \delta_1 \\
 &\quad - 2 \sin(\delta_1) e^\beta \Omega^2 \beta s^2 \delta_1 \delta_2^2 + \sin(\delta_1) e^\beta \Omega^2 s^2 R_L \delta_1 \delta_2^2 + \cos(\delta_1) e^\beta \Omega^2 \beta^2 s^2 R_L \delta_1^2 \\
 &\quad + \cos(\delta_1) e^\beta \Omega^2 \beta^2 s^2 R_L \delta_2^2 + \frac{\gamma_L^2 \Omega^2 \sin(\delta_1) \delta_1 \delta_2^2 \beta^2}{e^\beta} - \frac{\gamma_L^2 \Omega^4 \cos(\delta_1) \beta \delta_2^2 s^2}{e^\beta} \\
 &\quad - \frac{\gamma_L^2 \Omega^4 \sin(\delta_1) \delta_1 \delta_2^2 s^2}{e^\beta} + \frac{r^2 \Omega^4 \sin(\delta_1) \delta_1 \beta^2 s^2}{e^\beta} - \cos(\delta_1) e^\beta \Omega^2 s^2 R_L \delta_1^2 \delta_2^2 \\
 &\quad - 2 \sin(\delta_1) e^\beta \Omega^2 \beta^3 s^2 R_L \delta_1 - \cos(\delta_1) e^\beta \Omega^2 \beta^3 s^2 R_L - \cos(\delta_1) e^\beta \Omega^2 \beta^2 s^2 \delta_1^2 \\
 &\quad - \cos(\delta_1) e^\beta \Omega^2 \beta^2 s^2 \delta_2^2 + \cos(\delta_1) e^\beta \Omega^2 s^2 \delta_1^2 \delta_2^2 + 2 \sin(\delta_1) e^\beta \Omega^2 \beta^3 s^2 \delta_1 \\
 &\quad + \frac{\gamma_L^2 \Omega^2 \cos(\delta_1) \beta^3 \delta_2^2}{e^\beta} - \frac{\gamma_L^2 \Omega^2 \cos(\delta_1) \beta^3 \delta_1^2}{e^\beta} + \frac{\gamma_L^2 \Omega^2 \sin(\delta_1) \delta_1^3 \delta_2^2}{e^\beta} \\
 &\quad - \frac{\gamma_L^2 \Omega^2 \sin(\delta_1) \delta_1 \beta^4}{e^\beta} - \frac{\gamma_L^2 \Omega^2 \sin(\delta_1) \delta_1^3 \beta^2}{e^\beta} + \frac{\gamma_L^2 \Omega^2 \cos(\delta_1) \beta^5 R_L}{e^\beta} - \cos(\delta_1) e^\beta \beta R_L \\
 &\quad \left. \delta_1^2 \delta_2^2 - \sin(\delta_1) e^\beta \beta^2 R_L \delta_1 \delta_2^2 + \frac{\gamma_L^2 \Omega^4 \cos(\delta_1) \beta^3 s^2}{e^\beta} \right] \\
 K_{32} &= \frac{1}{(\beta^2 + \delta_1^2)(-\beta^2 + \delta_2^2)} [2 \cos(\delta_1) e^\beta \beta^5 \delta_1 + 2 \cos(\delta_1) e^\beta \beta^3 \delta_1^3 + \sin(\delta_1) e^\beta \beta^5 R_L
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sin(\delta_1) e^\beta \beta^4 \delta_2^2 + \sin(\delta_1) e^\beta \beta^2 \delta_1^4 - \sin(\delta_1) e^\beta \delta_1^4 \delta_2^2 + \sin(\delta_1) e^\beta \beta^6 R_L \\
 & + \sin(\delta_1) e^\beta \Omega^2 \beta^4 s^2 + \frac{\gamma_L^2 \Omega^2 \cos(\delta_1) \delta_1 \beta^4}{e^\beta} - \frac{\gamma_L^2 \Omega^2 \cos(\delta_1) \delta_1^3 \delta_2^2}{e^\beta} - \sin(\delta_1) e^\beta \beta R_L \delta_1^2 \delta_2^2 \\
 & - \sin(\delta_1) e^\beta \Omega^2 \beta^4 s^2 R_L - 2 \cos(\delta_1) e^\beta \Omega^2 \beta^3 s^2 R_L - \sin(\delta_1) e^\beta \Omega^2 \beta^3 s^2 R_L \\
 & - \sin(\delta_1) e^\beta \Omega^2 \beta^2 s^2 \delta_1^2 - \sin(\delta_1) e^\beta \Omega^2 \beta^2 s^2 \delta_2^2 + \sin(\delta_1) e^\beta \Omega^2 s^2 \delta_1^2 \delta_2^2 \\
 & + 2 \cos(\delta_1) e^\beta \beta^3 R_L \delta_1 \delta_2^2 + 2 \cos(\delta_1) e^\beta \beta R_L \delta_1^3 \delta_2^2 + \cos(\delta_1) e^\beta \beta^2 R_L \delta_1 \delta_2^2 \\
 & + \frac{\gamma_L^2 \Omega^4 \sin(\delta_1) \beta^3 s^2}{e^\beta} + \frac{\gamma_L^2 \Omega^2 \sin(\delta_1) \beta^5 R_L}{e^\beta} - \frac{\gamma_L^2 \Omega^2 \sin(\delta_1) \beta^3 \delta_1^2}{e^\beta} \\
 & + \frac{\gamma_L^2 \Omega^2 \sin(\delta_1) \beta^3 \delta_2^2}{e^\beta} + \frac{\gamma_L^2 \Omega^2 \cos(\delta_1) \delta_1^3 \beta^2}{e^\beta} - 2 \cos(\delta_1) e^\beta \Omega^2 \beta s^2 R_L \delta_1 \delta_2^2 \\
 & + \frac{\gamma_L^2 \Omega^4 \cos(\delta_1) \beta^2 s^2 R_L \delta_1}{e^\beta} - \frac{\gamma_L^2 \Omega^4 \cos(\delta_1) s^2 R_L \delta_1 \delta_2^2}{e^\beta} + \frac{\gamma_L^2 \Omega^4 \sin(\delta_1) \beta s^2 R_L \delta_2^2}{e^\beta} \\
 & - \sin(\delta_1) e^\beta \beta^4 R_L \delta_2^2 - \sin(\delta_1) e^\beta \beta^2 R_L \delta_1^4 + \sin(\delta_1) e^\beta R_L \delta_1^4 \delta_2^2 - \cos(\delta_1) e^\beta \beta^4 R_L \delta_1 \\
 & - 2 \cos(\delta_1) e^\beta \beta^3 \delta_1 \delta_2^2 - \cos(\delta_1) e^\beta \beta^2 R_L \delta_1^3 - 2 \cos(\delta_1) e^\beta \beta \delta_1^3 \delta_2^2 + \cos(\delta_1) e^\beta R_L \delta_1^3 \delta_2^2 \\
 & + \frac{\gamma_L^2 \Omega^4 \cos(\delta_1) \delta_1 \delta_2^2 s^2}{e^\beta} - \frac{\gamma_L^2 \Omega^2 \cos(\delta_1) \delta_1 \delta_2^2 \beta^2}{e^\beta} + 2 \cos(\delta_1) e^\beta \Omega^2 \beta s^2 \delta_1 \delta_2^2 \\
 & - \cos(\delta_1) e^\beta \Omega^2 s^2 R_L \delta_1 \delta_2^2 + \sin(\delta_1) e^\beta \Omega^2 \beta s^2 R_L + 2 \cos(\delta_1) e^\beta \Omega^2 \beta^3 s^2 R_L \delta_1 \\
 & + \frac{\gamma_L^2 \Omega^2 \sin(\delta_1) \beta^3 R_L \delta_1^2}{e^\beta} - \frac{\gamma_L^2 \Omega^4 \cos(\delta_1) \delta_1 \beta^2 s^2}{e^\beta} - \frac{\gamma_L^2 \Omega^4 \sin(\delta_1) \beta \delta_2^2 s^2}{e^\beta} \\
 & + \frac{\gamma_L^2 \Omega^2 \sin(\delta_1) \beta R_L \delta_1^2}{e^\beta} - \frac{\gamma_L^2 \Omega^2 \cos(\delta_1) \delta_1 \beta^2 s^2}{e^\beta} - \frac{\gamma_L^2 \Omega^2 \sin(\delta_1) \beta \delta_2^2 s^2}{e^\beta} \\
 & + \frac{\gamma_L^2 \Omega^2 \cos(\delta_1) R_L \delta_1^3 \delta_2^2}{e^\beta} - \frac{\gamma_L^2 \Omega^4 \sin(\delta_1) \beta^3 s^2 R_L}{e^\beta} - \frac{\gamma_L^2 \Omega^2 \cos(\delta_1) \beta^3 R_L \delta_2^2}{e^\beta} \\
 & + \sin(\delta_1) e^\beta \Omega^2 \beta^2 s^2 R_L \delta_1^2 + \sin(\delta_1) e^\beta \Omega^2 \beta^2 s^2 R_L \delta_2^2 - \sin(\delta_1) e^\beta \Omega^2 \beta^2 s^2 R_L \delta_1^2 \delta_2^2 \\
 & + \cos(\delta_1) e^\beta \Omega^2 \beta^2 s^2 R_L \delta_1 - \frac{\gamma_L^2 \Omega^2 \sin(\delta_1) \beta^5}{e^\beta} + \sin(\delta_1) e^\beta \beta^3 R_L \delta_1^2 - \sin(\delta_1) e^\beta \beta^3 R_L \delta_2^2 \\
 & - 2 \cos(\delta_1) e^\beta \beta^5 R_L \delta_1 - 2 \cos(\delta_1) e^\beta \beta^3 R_L \delta_1^3 - \frac{\gamma_L^2 \Omega^2 \sin(\delta_1) \beta R_L \delta_1^2 \delta_2^2}{e^\beta} \\
 & + \frac{\gamma_L^2 \Omega^2 \cos(\delta_1) \beta^2 R_L \delta_1 \delta_2^2}{e^\beta} - \sin(\delta_1) e^\beta \beta^6]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_{33} = & \frac{1}{(\beta^2 + \delta_1^2)(-\beta^2 + \delta_2^2)} \left[-\cosh(\delta_2) e^\beta \beta^6 - \frac{\gamma_L^2 \Omega^4 \cosh(\delta_2) \beta s^2 R_L \delta_1^2}{e^\beta} \right. \\
 & + \frac{\gamma_L^2 \Omega^4 \sinh(\delta_2) \beta^2 s^2 R_L \delta_2}{e^\beta} + 2 \sinh(\delta_2) e^\beta \Omega^2 \beta s^2 R_L \delta_1^2 \delta_2 \\
 & + \frac{\gamma_L^2 \Omega^4 \sinh(\delta_2) s^2 R_L \delta_1^2 \delta_2}{e^\beta} - \frac{\gamma_L^2 \Omega^2 \cosh(\delta_2) \beta R_L \delta_1^2 \delta_2^2}{e^\beta} - \frac{\gamma_L^2 \Omega^2 \sinh(\delta_2) \beta^2 R_L \delta_1^2 \delta_2}{e^\beta} \\
 & - \sinh(\delta_2) e^\beta \beta^4 R_L \delta_2 + 2 \sinh(\delta_2) e^\beta \beta^3 \delta_1^2 \delta_2 + \sinh(\delta_2) e^\beta \beta^2 R_L \delta_2^3 - 2 \sinh(\delta_2) e^\beta \beta \\
 & \delta_1^2 \delta_2^3 + \sinh(\delta_2) e^\beta R_L \delta_1^2 \delta_2^3 + \cosh(\delta_2) e^\beta \Omega^2 \beta^4 s^2 + \cosh(\delta_2) e^\beta \beta^4 R_L \delta_1^2 \\
 & - \frac{\gamma_L^2 \Omega^2 \cosh(\delta_2) \beta^5}{e^\beta} - \cosh(\delta_2) e^\beta \beta^2 R_L \delta_2^4 - \cosh(\delta_2) e^\beta R_L \delta_1^2 \delta_2^4 \\
 & - 2 \sinh(\delta_2) e^\beta \beta^5 R_L \delta_2 + 2 \sinh(\delta_2) e^\beta \beta^3 R_L \delta_2^3 + \cosh(\delta_2) e^\beta \beta^3 R_L \delta_1^2 \\
 & - \cosh(\delta_2) e^\beta \beta^3 R_L \delta_2^2 + \cosh(\delta_2) e^\beta \beta^6 R_L + \cosh(\delta_2) e^\beta \beta^5 R_L - \cosh(\delta_2) e^\beta \beta^4 \delta_1^2 \\
 & + \cosh(\delta_2) e^\beta \beta^4 \delta_2^4 + \cosh(\delta_2) e^\beta \delta_1^2 \delta_2^4 + 2 \sinh(\delta_2) e^\beta \beta^5 \delta_2 - 2 \sinh(\delta_2) e^\beta \beta^3 \delta_2^3 \\
 & + \frac{\gamma_L^2 \Omega^2 \sinh(\delta_2) \beta^2 \delta_1^2 \delta_2}{e^\beta} - \cosh(\delta_2) e^\beta \beta \delta_1^2 \delta_2^2 - \sinh(\delta_2) e^\beta \beta^2 R_L \delta_1^2 \delta_2 \\
 & \left. - \cosh(\delta_2) e^\beta \Omega^2 \beta^4 s^2 R_L + \frac{\gamma_L^2 \Omega^2 \cosh(\delta_2) \beta^3 R_L \delta_1^2}{e^\beta} - \frac{\gamma_L^2 \Omega^2 \cosh(\delta_2) \beta^3 R_L \delta_2^2}{e^\beta} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \frac{\gamma_L^2 \Omega^2 \sinh(\delta_2) \beta^4 R_L \delta_2}{e^\beta} + \frac{\gamma_L^2 \Omega^2 \sinh(\delta_2) \beta^2 R_L \delta_2^3}{e^\beta} - \frac{\gamma_L^2 \Omega^2 \sinh(\delta_2) R_L \delta_1^2 \delta_2^3}{e^\beta} \\ & - \frac{\gamma_L^2 \Omega^4 \cosh(\delta_2) \beta^3 s^2 R_L}{e^\beta} + \frac{\gamma_L^2 \Omega^2 \cosh(\delta_2) \beta \delta_1^2 \delta_2^2}{e^\beta} - 2 \sinh(\delta_2) e^\beta \Omega^2 \beta s^2 \delta_1^2 \delta_2 \\ & + \sinh(\delta_2) e^\beta \Omega^2 s^2 R_L \delta_1^2 \delta_2 - \cosh(\delta_2) e^\beta \Omega^2 \beta^2 s^2 R_L \delta_1^2 - \cosh(\delta_2) e^\beta \Omega^2 \beta^2 s^2 R_L \delta_2^2 \\ & - \cosh(\delta_2) e^\beta \Omega^2 s^2 R_L \delta_1^2 \delta_2^2 + 2 \sinh(\delta_2) e^\beta \Omega^2 \beta^3 R_L \delta_2 - \frac{\gamma_L^2 \Omega^4 \sinh(\delta_2) \beta^2 s^2 \delta_2}{e^\beta} \\ & - \frac{\gamma_L^2 \Omega^4 \sinh(\delta_2) s^2 \delta_1^2 \delta_2}{e^\beta} + \frac{\gamma_L^2 \Omega^4 \cosh(\delta_2) \beta s^2 \delta_1^2}{e^\beta} - \cosh(\delta_2) e^\beta \Omega^2 \beta s^2 R_L \delta_1^2 \\ & + \sinh(\delta_2) e^\beta \Omega^2 \beta^2 s^2 R_L \delta_2 - \cosh(\delta_2) e^\beta \Omega^2 \beta^3 s^2 R_L + \cosh(\delta_2) e^\beta \Omega^2 \beta^2 s^2 \delta_1^2 \\ & + \cosh(\delta_2) e^\beta \Omega^2 \beta^2 s^2 C_3 \delta_2^2 + \cosh(\delta_2) e^\beta \Omega^2 s^2 \delta_1^2 \delta_2^2 - 2 \sinh(\delta_2) e^\beta \Omega^2 \beta^3 s^2 \delta_2 \\ & - 2 \sinh(\delta_2) e^\beta \beta^3 R_L \delta_1^2 \delta_2 + 2 \sinh(\delta_2) e^\beta \beta R_L \delta_1^2 \delta_2^3 + \frac{\gamma_L^2 \Omega^2 \cosh(\delta_2) \beta^3 \delta_2^2}{e^\beta} \\ & + \frac{\gamma_L^2 \Omega^2 \sinh(\delta_2) \beta^4 \delta_2}{e^\beta} - \frac{\gamma_L^2 \Omega^2 \sinh(\delta_2) \beta^2 \delta_2^3}{e^\beta} - \frac{\gamma_L^2 \Omega^2 \sinh(\delta_2) \delta_1^2 \delta_2^3}{e^\beta} \\ & \left. + \frac{\gamma_L^2 \Omega^2 \cosh(\delta_2) \beta^5 \delta_2}{e^\beta} + \frac{\gamma_L^2 \Omega^4 \cosh(\delta_2) \beta^3 s^2}{e^\beta} - \frac{\gamma_L^2 \Omega^2 \cosh(\delta_2) \beta^3 \delta_1^2}{e^\beta} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{34} = & \frac{1}{(\beta^2 + \delta_1^2)(-\beta^2 + \delta_2^2)} \left[-\sinh(\delta_2) e^\beta \beta^6 + \frac{\gamma_L^2 \Omega^4 \cosh(\delta_2) s^2 R_L \delta_1^2 \delta_2}{e^\beta} \right. \\ & + 2 \cosh(\delta_2) e^\beta \Omega^2 \beta s^2 R_L \delta_1^2 \delta_2 - \frac{\gamma_L^2 \Omega^4 \sinh(\delta_2) \beta s^2 R_L \delta_1^2}{e^\beta} - \frac{\gamma_L^2 \Omega^2 \cosh(\delta_2) \beta^2 R_L \delta_1^2 \delta_2}{e^\beta} \\ & - \frac{\gamma_L^2 \Omega^2 \sinh(\delta_2) \beta R_L \delta_1^2 \delta_2^2}{e^\beta} + \frac{\gamma_L^2 \Omega^2 \cosh(\delta_2) \beta^2 s^2 R_L \delta_2}{e^\beta} + 2 \cosh(\delta_2) e^\beta \beta^3 \delta_1^2 \delta_2 \\ & + \cosh(\delta_2) e^\beta \beta^2 R_L \delta_2^3 - 2 \cosh(\delta_2) e^\beta \beta \delta_1^2 \delta_2^3 + \cosh(\delta_2) e^\beta R_L \delta_1^2 \delta_2^3 + \sinh(\delta_2) e^\beta \beta^3 R_L \delta_1^2 \\ & - \sinh(\delta_2) e^\beta \beta^3 R_L \delta_2^2 + \sinh(\delta_2) e^\beta \Omega^2 \beta^4 s^2 - 2 \cosh(\delta_2) e^\beta \beta^5 R_L \delta_2 \\ & + 2 \cosh(\delta_2) e^\beta \beta^3 R_L \delta_2^3 - \frac{\gamma_L^2 \Omega^2 \sinh(\delta_2) \beta^5}{e^\beta} + \sinh(\delta_2) e^\beta \beta^4 R_L \delta_1^2 \\ & - \sinh(\delta_2) e^\beta \beta^2 R_L \delta_2^4 - \sinh(\delta_2) e^\beta R_L \delta_1^2 \delta_2^4 - \cosh(\delta_2) e^\beta \beta^4 R_L \delta_2 \\ & + \sinh(\delta_2) e^\beta \beta^6 R_L + 2 \cosh(\delta_2) e^\beta \beta^5 \delta_2 \\ & - 2 \cosh(\delta_2) e^\beta \beta^3 \delta_2^3 + \sinh(\delta_2) e^\beta \beta^5 R_L - \sinh(\delta_2) e^\beta \beta^4 \delta_1^2 + \sinh(\delta_2) e^\beta \beta^2 \delta_2^4 \\ & + \sinh(\delta_2) e^\beta \delta_1^2 \delta_2^4 + \frac{\gamma_L^2 \Omega^2 \sinh(\delta_2) \beta \delta_1^2 \delta_2^2}{e^\beta} - \cosh(\delta_2) e^\beta \beta^2 R_L \delta_1^2 \delta_2 - \sinh(\delta_2) e^\beta \beta R_L \delta_1^2 \delta_2^2 \\ & - \sinh(\delta_2) e^\beta \Omega^2 \beta^4 s^2 R_L + \frac{\gamma_L^2 \Omega^2 \cosh(\delta_2) \beta^2 \delta_1^2 \delta_2}{e^\beta} - \frac{\gamma_L^2 \Omega^2 \cosh(\delta_2) \beta^4 R_L \delta_2}{e^\beta} \\ & + \frac{\gamma_L^2 \Omega^2 \cosh(\delta_2) \beta^2 R_L \delta_2^3}{e^\beta} + \frac{\gamma_L^2 \Omega^2 \cosh(\delta_2) R_L \delta_1^2 \delta_2^3}{e^\beta} + \frac{\gamma_L^2 \Omega^2 \cosh(\delta_2) \beta^3 R_L \delta_1^2}{e^\beta} \\ & - \frac{\gamma_L^2 \Omega^2 \sinh(\delta_2) \beta^3 R_L \delta_2^2}{e^\beta} - \frac{\gamma_L^2 \Omega^4 \sinh(\delta_2) \beta^3 s^2 R_L}{e^\beta} - \sinh(\delta_2) e^\beta \Omega^2 \beta s^2 R_L \delta_1^2 \\ & + 2 \cosh(\delta_2) e^\beta \Omega^2 \beta^3 s^2 R_L \delta_2 - \sinh(\delta_2) e^\beta \Omega^2 \beta^2 s^2 R_L \delta_1^2 - \sinh(\delta_2) e^\beta \Omega^2 \beta^2 s^2 R_L \delta_2^2 \\ & - \sinh(\delta_2) e^\beta \Omega^2 s^2 R_L \delta_1^2 \delta_2^2 - \frac{\gamma_L^2 \Omega^4 \cosh(\delta_2) s^2 \delta_1^2 \delta_2}{e^\beta} + \frac{\gamma_L^2 \Omega^4 \sinh(\delta_2) \beta s^2 \delta_1^2}{e^\beta} \\ & - \frac{\gamma_L^2 \Omega^4 \cosh(\delta_2) \beta^2 s^2 \delta_2}{e^\beta} + \cosh(\delta_2) e^\beta \Omega^2 \beta^2 s^2 R_L \delta_2 - 2 \cosh(\delta_2) e^\beta \Omega^2 \beta s^2 \delta_1^2 \delta_2 \\ & + \cosh(\delta_2) e^\beta \Omega^2 s^2 R_L \delta_1^2 \delta_2 - 2 \cosh(\delta_2) e^\beta \Omega^2 \beta^3 s^2 \delta_2 - \sinh(\delta_2) e^\beta \Omega^2 \beta^3 s^2 R_L \\ & + \sinh(\delta_2) e^\beta \Omega^2 \beta^2 s^2 \delta_1^2 + \sinh(\delta_2) e^\beta \Omega^2 \beta^2 s^2 R_L \delta_2^2 + \sinh(\delta_2) e^\beta \Omega^2 s^2 \delta_1^2 \delta_2^2 \\ & - 2 \cosh(\delta_2) e^\beta \beta^3 R_L \delta_1^2 \delta_2 + 2 \cosh(\delta_2) e^\beta \beta R_L \delta_1^2 \delta_2^3 - \frac{\gamma_L^2 \Omega^2 \cosh(\delta_2) \beta^2 \delta_2^3}{e^\beta} \\ & - \frac{\gamma_L^2 \Omega^2 \cosh(\delta_2) \delta_1^2 \delta_2^3}{e^\beta} - \frac{\gamma_L^2 \Omega^2 \sinh(\delta_2) \beta^3 \delta_1^2}{e^\beta} + \frac{\gamma_L^2 \Omega^2 \sinh(\delta_2) \beta^3 \delta_2^2}{e^\beta} \end{aligned}$$

$$\left. + \frac{\gamma_L^2 \Omega^2 \sinh(\delta_2) \beta^5 R_L}{e^\beta} + \frac{\gamma_L^2 \Omega^4 \sinh(\delta_2) \beta^3 s^2}{e^\beta} + \frac{\gamma_L^2 \Omega^2 \cosh(\delta_2) \beta^4 \delta_2}{e^\beta} \right]$$

$$K_{41} = \frac{1}{e^\beta (\beta^2 + \delta_1^2) (\beta^2 - \delta_2^2)} \left(-\cos(\delta_1) \Omega^2 \beta^4 T_L \alpha_L - \cos(\delta_1) \Omega^2 \beta^2 \alpha_L \delta_2^2 + \cos(\delta_1) \Omega^2 \alpha_L \delta_1^2 \beta^2 \right. \\ \left. - \cos(\delta_1) \Omega^2 \alpha_L \delta_1^2 \delta_2^2 \right. \\ \left. + \beta C_1 T_L \delta_2^2 - \sin(\delta_1) \Omega^2 T_L \delta_1 \beta^2 + \sin(\delta_1) \Omega^2 T_L \delta_1 \delta_2^2 + \cos(\delta_1) \Omega^2 \beta^2 T_L \alpha_L \delta_2^2 - \cos(\delta_1) \Omega^2 \alpha_L \delta_1^2 \beta^2 \right. \\ \left. + \cos(\delta_1) \Omega^2 T_L \alpha_L \delta_1^2 \delta_2^2 + \cos(\delta_1) T_L \delta_1^2 \delta_2^2 + \sin(\delta_1) \Omega^2 \delta_1 - \sin(\delta_1) \Omega^2 \delta_1 \delta_2^2 + \cos(\delta_1) \Omega^2 \beta^4 \alpha_L \right. \\ \left. - \cos(\delta_1) \Omega^2 \beta^3 T_L \right. \\ \left. - \cos(\delta_1) \Omega^2 \beta \delta_2^2 + \cos(\delta_1) \beta^2 T_L \delta_2^2 - \cos(\delta_1) T_L \beta^2 + \cos(\delta_1) \Omega^2 \beta^3 - \cos(\delta_1) \beta^4 T_L \right)$$

$$K_{42} = \frac{1}{e^\beta (\beta^2 + \delta_1^2) (\beta^2 - \delta_2^2)} \left(\cos(\delta_1) \Omega^2 T_L \delta_1 \beta^2 - \cos(\delta_1) \Omega^2 T_L \delta_1 \delta_2^2 - \sin(\delta_1) \Omega^2 \beta^4 T_L \alpha_L \right. \\ \left. - \sin(\delta_1) \Omega^2 \beta^2 \alpha_L \delta_2^2 + \sin(\delta_1) \Omega^2 \alpha_L \right. \\ \left. \delta_1^2 \beta^2 - \sin(\delta_1) \Omega^2 \alpha_L \delta_1^2 \delta_2^2 + \sin(\delta_1) \Omega^2 \beta T_L \delta_2^2 + \sin(\delta_1) \Omega^2 \beta^2 T_L \alpha_L \delta_2^2 - \sin(\delta_1) \Omega^2 T_L \alpha_L \delta_1^2 \beta^2 \right. \\ \left. + \sin(\delta_1) \Omega^2 T_L \alpha_L \delta_1^2 \delta_2^2 \right. \\ \left. + \sin(\delta_1) \Omega^2 \beta^4 \alpha_L - \sin(\delta_1) \Omega^2 \beta^3 T_L - \sin(\delta_1) \Omega^2 \beta \delta_2^2 + \sin(\delta_1) \beta^2 T_L \delta_2^2 - \sin(\delta_1) T_L \delta_1^2 \beta^2 \right. \\ \left. + \sin(\delta_1) T_L \delta_1^2 \delta_2^2 \right. \\ \left. - \cos(\delta_1) \Omega^2 \delta_1 \beta^2 + \cos(\delta_1) \Omega^2 \delta_1 \delta_2^2 + \sin(\delta_1) \Omega^2 \beta^3 - \sin(\delta_1) \beta^4 T_L \right)$$

$$K_{43} = \frac{1}{e^\beta (\beta^2 + \delta_1^2) (\beta^2 - \delta_2^2)} \left(-\cosh(\delta_2) \Omega^2 \beta^4 T_L \alpha_L + \cosh(\delta_2) \Omega^2 \beta^2 \alpha_L \delta_1^2 - \cosh(\delta_2) \Omega^2 \beta^2 \alpha_L \delta_2^2 \right. \\ \left. - \cosh(\delta_2) \Omega^2 \alpha_L \delta_1^2 \delta_2^2 \right. \\ \left. - \cosh(\delta_2) \Omega^2 \beta T_L \delta_1^2 + \sinh(\delta_2) \Omega^2 \beta^2 T_L \delta_2 + \sinh(\delta_2) \Omega^2 T_L \delta_1^2 \delta_2 - \cosh(\delta_2) \Omega^2 \beta^2 T_L \alpha_L \delta_1^2 \right. \\ \left. + \cosh(\delta_2) \Omega^2 \beta^2 T_L \alpha_L \delta_2^2 + \cosh(\delta_2) \Omega^2 T_L \alpha_L \delta_1^2 \delta_2^2 - \cosh(\delta_2) \beta^2 T_L \delta_1^2 \right. \\ \left. + \cosh(\delta_2) \beta^2 T_L \delta_2^2 + \cosh(\delta_2) T_L \delta_1^2 \delta_2^2 - \sinh(\delta_2) \Omega^2 \beta^2 \delta_2 - \sinh(\delta_2) \right. \\ \left. \delta_1^2 \delta_2 + \cosh(\delta_2) \Omega^2 \beta^4 \alpha_L - \cosh(\delta_2) \Omega^2 \beta^3 T_L + \cosh(\delta_2) \Omega^2 \beta \delta_1^2 + \cosh(\delta_2) \Omega^2 \beta^3 \right. \\ \left. - \cosh(\delta_2) \beta^4 T_L \right)$$

$$K_{44} = \frac{1}{e^\beta (\beta^2 + \delta_1^2) (\beta^2 - \delta_2^2)} \left(-\cosh(\delta_2) \Omega^2 \beta^2 \delta_2 - \cosh(\delta_2) \Omega^2 \delta_1^2 \delta_2 + \sinh(\delta_2) \Omega^2 \beta^4 \alpha_L \right. \\ \left. - \sinh(\delta_2) \Omega^2 \beta^3 T_L + \sinh(\delta_2) \Omega^2 \beta \delta_1^2 \right. \\ \left. - \sinh(\delta_2) \beta^2 T_L \delta_1^2 + \sinh(\delta_2) \beta^2 T_L \delta_2^2 + \sinh(\delta_2) T_L \delta_1^2 \delta_2^2 + \cosh(\delta_2) \Omega^2 \beta^2 T_L \delta_2 \right. \\ \left. + \cosh(\delta_2) \Omega^2 T_L \delta_1^2 \delta_2 - \sinh(\delta_2) \Omega^2 \beta^4 T_L \alpha_L + \sinh(\delta_2) \Omega^2 \beta^2 \alpha_L \right. \\ \left. - \sinh(\delta_2) \Omega^2 \beta^2 \alpha_L \delta_2^2 - \sinh(\delta_2) \Omega^2 \alpha_L \delta_1^2 \delta_2^2 - \sinh(\delta_2) \Omega^2 \beta T_L \delta_1^2 \right. \\ \left. - \sinh(\delta_2) \Omega^2 \beta^2 T_L \alpha_L \delta_1^2 + \sinh(\delta_2) \Omega^2 \beta^2 T_L \alpha_L + \sinh(\delta_2) \Omega^2 T_L \alpha_L \delta_1^2 \delta_2^2 + \sinh(\delta_2) \Omega^2 \beta^3 \right. \\ \left. - \sinh(\delta_2) \beta^4 T_L \right)$$