



## Modeling, Simulation, and Stability Analysis of Biped Robots Constructed of Flexible Links

Mohammad Ehsan Yousefzadeh Kouhbanani <sup>a</sup>, Ali Mohamad Shafei <sup>a\*</sup>

<sup>a</sup> Department of Mechanical Engineering, Shahid Bahonar University of Kerman, Kerman, Iran

### Original Article

Use your device to scan  
and read the article online



**Citation:** Yousefzadeh Kouhbanani M E, Shafei A M. Modeling, Simulation, and Stability Analysis of Biped Robots Constructed of Flexible Links. *Mechanics of Advanced and Smart Materials*. 2024;4(2):207-237.

 <https://10.61186/masm.4.2.207>

### KEYWORDS

Bipedal Robots,  
Inclined Surfaces,  
Viscoelastic Links,  
Stability of Motion,  
Impact Force.

### ABSTRACT

The self-driven movement of biped robots along an inclined surface is a topic that, despite its inherent complexities, has attracted the attention of many researchers. However, what distinguishes this research from similar works is the consideration of flexibility in the links that constitute such robotic systems. This assumption is not far-fetched, as in the transition phase (impact), the impulse force applied to the system significantly increases the likelihood of exciting vibrational modes. On the other hand, the bones involved in walking are enveloped by muscles, which have viscoelastic properties. Therefore, to achieve more accurate results, modeling the links with viscoelastic properties becomes inevitable. In the discussion of the autonomous movement of bipedal robots, the most important issue is determining the initial configuration of the robot so that the system can perform a periodic and stable motion solely under the influence of gravitational attraction. The highly unstable nature of the system under study, along with the vibrations created by the impact force resulting from the foot striking the inclined surface, constitutes one of the very serious challenges in the progress of this research. Nevertheless, this paper overcomes these challenges by presenting a completely systematic method with very strong mathematical frameworks. Finally, the effect of the intrinsic parameters of elastic links, including the modulus of elasticity and the Kelvin-Voigt coefficient, on the stability of the movement of such robotic systems is examined.

### Extended Abstract

#### 1. Introduction

Robots with elastic links are faster and lighter compared to rigid robots. Moreover, flexible links result in smoother movement as they absorb part of the shocks and vibrations generated. This leads to less stress on the robot's structure, resulting in more stable system movement. The construction of robots that mimic human movement has led many researchers to use biomechanical data and incorporate flexible components in their models. Robots made with flexible links have attracted the attention of many robotic engineers and researchers due to reasons such as the reduced energy required for movement and the low weight-to-load capacity ratio [8]. One of the earliest studies on the dynamic modeling of flexible robotic arms was conducted by Hastings and Book [9]. Khairudin et al. [11] conducted a study in this field. They focused on the dynamic analysis and construction of a robotic arm with two flexible links. Korayem and Shafei have also conducted comprehensive research in this field. They derived the dynamic equations of a mobile base robot with flexible links [17]. Bipedal robots made of

\* Corresponding author. Tel.: +98-3433257141

E-mail address: shafei@uk.ac.ir

DOI: <https://10.61186/masm.4.2.207>

Received: June 05, 2024; Received in revised form: June 19, 2024; Accepted: July 07, 2024.

© Author



flexible links have received very little research, despite extensive work on flexible robotic arms. Shen and Kuang examined the transient contact-impact behavior for the autonomous walking of compass-like biped robots [20]. Despite some of their valuable research, almost all of them extract dynamic equations in a non-systematic process for the simplest model of a biped robot with only two flexible links. Among the most commonly used methods for deriving dynamic equations of flexible robots, one can mention Lagrangian formulation, Hamilton's principle, Newton-Euler equations, and the Gibbs-Appell method. To find the dynamic equations for flexible mechanical arms with both fixed and moving bases, Korayem et al. created a recursive algorithm based on the Gibbs-Appell formulation [30-34]. However, despite its significant advantages, no one has used this method to extract motion equations for biped robots to date. This study presents a systematic method to determine appropriate initial conditions for the autonomous movement of flexible biped robots, using the dynamic equations governing elastic manipulators in both oscillation and transition phases.

## 2. Modeling and formulation

### 2.1 Dynamic equations of motion

The dynamic equations of the elastic biped robot are derived using the Gibbs-Appell formulation. The total acceleration energy of the system, comprising the sum of the acceleration energy of the robot's links, is first introduced. This section calculates the inertia matrix and the right-hand side vector of the motion equations for the robot during the swing phase.

### 2.2 Determining initial conditions for autonomous walking

This section addresses finding suitable initial conditions for periodic locomotion of a serial robot comprising elastic links under its weight. The system's differential equations of motion are expressed in state-space form and linearized around the equilibrium point. The relationship between state variables at the beginning and end of the robot's steps is presented, leading to an eigenvalue problem for autonomous walking. Using these relations and initial conditions, state variables' values are precisely determined just before contact with the inclined plane.

## 3. Linearization and eigenvalue problem

In this section, we further explore the initial conditions for self-walking by linearizing the system's equations around its equilibrium state. By considering the state variables immediately after contact with the inclined plane and the state variables at the beginning of a new step, we combine these relations to establish an eigenvalue problem. This problem helps determine the stability of the robot's locomotion. We depict the relationship between the generalized coordinates at the end of the old step and the beginning of the new step.

## 4. Simulation results and parameter effects

This section presents the results from simulations and examines the impact of the intrinsic parameters of the links on the robot's stability. Specifically, the effect of the Kelvin-Voigt damping coefficient on the system's response is analyzed. As the Kelvin-Voigt coefficient increases, energy dissipation intensifies, leading to a faster reduction in the amplitude of the elastic links' vibrations. This is crucial for achieving stable locomotion, as excessive oscillations can destabilize the robot. For different Kelvin-Voigt coefficient values, the simulation results show the angular position and velocity of the first joint. Higher values of the damping coefficient result in quicker stabilization of the joint's angular position and velocity, indicating that the robot can maintain balance more effectively. These findings are illustrated in Figure 1, which depicts the variations in the robot's joint dynamics with changes in the damping parameter. Additionally, the simulations explore how other parameters, such as the stiffness of the elastic links and the mass distribution of the robot, influence its stability and motion efficiency. By adjusting these parameters, the optimal configuration for the biped robot's self-walking capabilities can be identified, ensuring robust and energy-efficient locomotion.

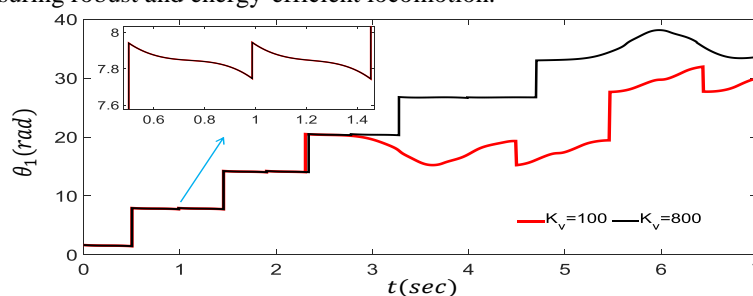


Figure 1. Angular position of the first joint for two different values of the Kelvin-Voigt coefficient (Continued)

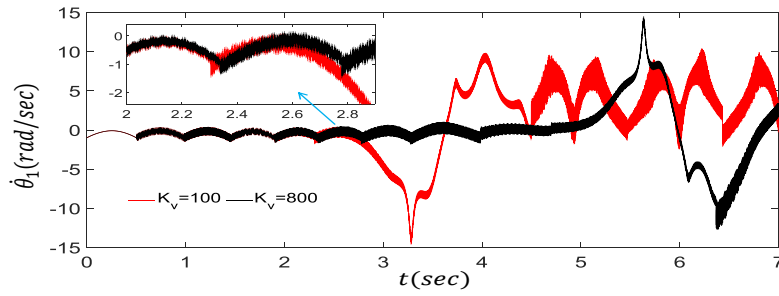


Figure 1. Angular velocity of the first joint for two different values of the Kelvin-Voigt coefficient

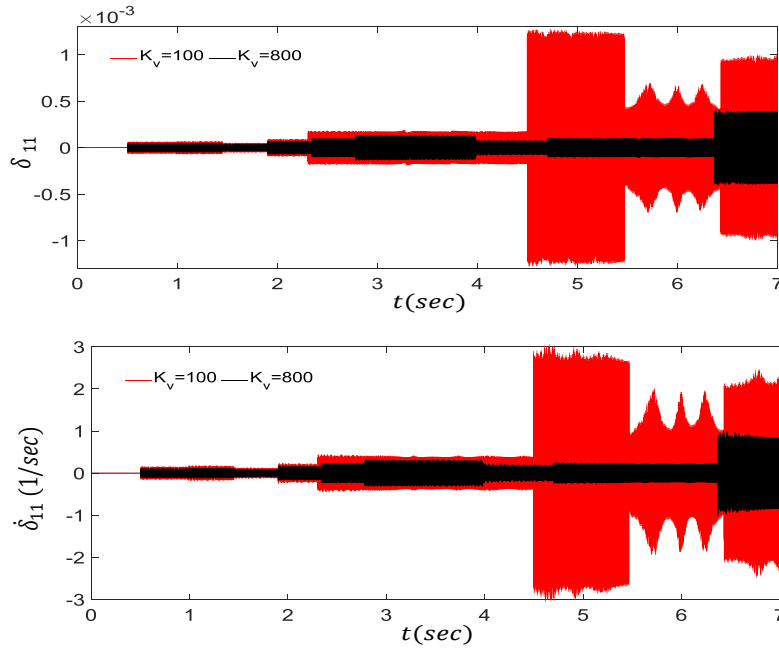


Figure 2. Modal coordinates and modal velocity of the generalized first mode shape of the first link

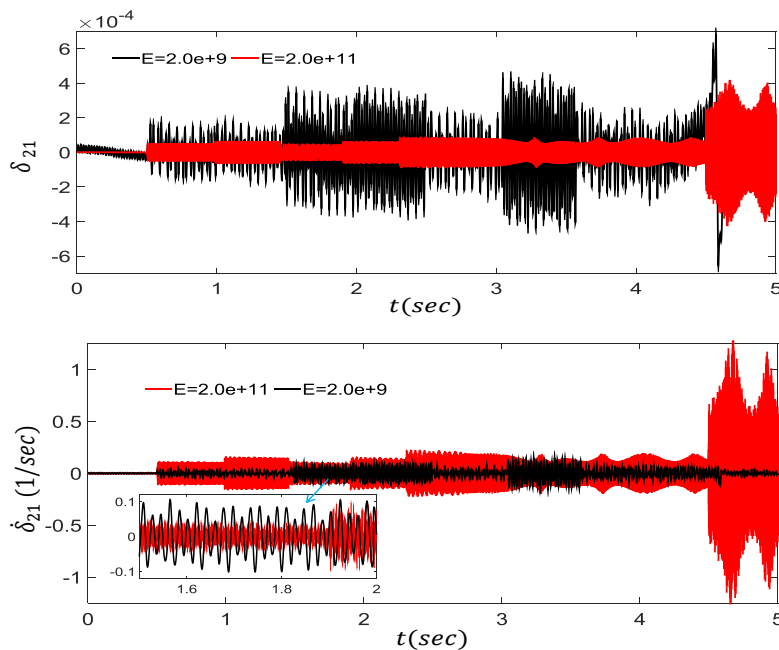


Figure 3. Modal coordinates and generalized modal velocity of the first mode shape from the second link

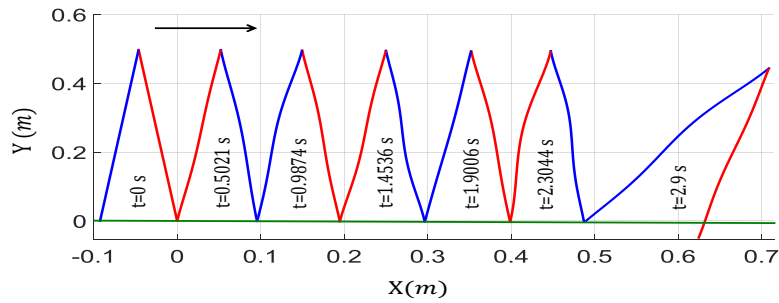


Figure 4. Configuration of the elastic robot while traversing an inclined surface with an inclination angle  $\alpha = 0.5$  deg

## 5. Analysis of control strategies

In this section, various control strategies for the elastic biped robot are analyzed to enhance its stability and efficiency. The effectiveness of different control methods, such as feedback control and feedforward control, is compared through simulations. Feedback control mechanisms are employed to correct deviations in the robot's trajectory in real-time, improving its ability to adapt to changes in the environment. Conversely, feedforward control strategies anticipate the robot's motion and make proactive adjustments to ensure stability. The analysis indicates that a hybrid control approach, combining both feedback and feedforward strategies, yields the best results in terms of stability and energy efficiency. The hybrid control system leverages the strengths of both methods, offering real-time correction capabilities while anticipating future movements. This approach significantly enhances the robot's ability to perform autonomous walking on varying terrains.

## 6. Conclusion

The final conclusions of the research provide a comprehensive analysis of the elastic biped robot's dynamics and control strategies, highlighting several key insights:

1. The Gibbs-Appell formulation's derivation of dynamic equations is fundamental for understanding the motion and stability of the biped robot. These equations account for both the swing and transition phases, allowing for precise modeling of the robot's behavior.
2. For autonomous walking, identification of initial conditions and stability is critical. By linearizing the system's equations and solving the resulting eigenvalue problem, the study identifies conditions that ensure periodic and stable locomotion.
3. Simulation and Parameter Analysis: Simulations demonstrate how various parameters, such as the Kelvin-Voigt damping coefficient, affect the robot's stability. Higher damping coefficients lead to faster stabilization, indicating better control of oscillations and enhanced stability.
4. Real-world scenarios can apply the research's framework for designing and controlling elastic biped robots. The findings are essential for developing robots capable of stable, energy-efficient, and autonomous locomotion.

Future research could explore the implementation of advanced machine learning algorithms to further enhance the adaptability and efficiency of the control strategies, allowing the biped robot to navigate more complex environments and react to unforeseen obstacles.

Overall, the study contributes significantly to the field of robotic locomotion by presenting detailed equations, simulation results, and effective control strategies for elastic biped robots



## مدل سازی، شبیه سازی و تحلیل پایداری ربات دوپا ساخته شده از لینک های انعطاف پذیر

محمد احسان یوسفزاده کوهبنانی الف، علی محمد شافعی ب\*

الف دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان، ایران،

[Ehsanyousefzadeh@eng.uk.ac.ir](mailto:Ehsanyousefzadeh@eng.uk.ac.ir)

ب\* دانشیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان، ایران، [Shafei@uk.ac.ir](mailto:Shafei@uk.ac.ir)

واژگان کلیدی	چکیده
ربات دوپا، سطوح شیب دار، لینک های ویسکوالاستیک، ثبات حرکت، نیروی ضربه، تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۰۳/۱۳، تاریخ بازنگری: ۱۴۰۳/۰۳/۳۰، تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۰۴/۱۷	<p>حرکت خودران ربات های دوپا در امتداد یک سطح شیب دار موضوعی است که به رغم پیچیدگی های ذاتی آن، توجه بسیاری از محققین را به خود معطوف نموده است. اما آنچه که این تحقیق را از کارهای مشابه متمایز می سازد، در نظر گرفتن انعطاف پذیری در لینک های تشکیل دهنده اینگونه از سیستم های رباتیکی است. این فرض چندان هم دور از انتظار نیست. چرا که در فاز انتقال (برخورد)، به دلیل نیروی ضربه ای که به سیستم اعمال می گردد، امکان تحریک مودهای ارتعاشی به شدت افزایش می یابد. از سوی دیگر استخوان های درگیر در راه رفتن توسط عضلات و ماهیچه هایی دربر گرفته شده اند که دارای خاصیت ویسکوالاستیک هستند. لذا برای رسیدن به نتایجی دقیق تر، مدل سازی لینک هایی که دارای خاصیت ویسکوالاستیک هستند، اجتناب ناپذیر می باشد. در بحث مربوط به حرکت خودران ربات های دوپا، مهم ترین مسئله تعیین پیکربندی اولیه ربات، به گونه ای است تا سیستم بتواند تنها تحت اثر جاذبه گرانش یک حرکت پریودیک و پایدار را به انجام رساند. ماهیت به شدت ناپایدار سیستم مورد مطالعه، در کنار ارتعاشات ایجاد شده تحت اثر نیروی ضربه ای ناشی از برخورد کف پا با سطح شیب دار، از چالش های بسیار جدی در پیشروی این تحقیق محسوب می گردند. با این حال، این مقاله با ارائه یک روش کاملاً سیستماتیک، با چارچوب های بسیار محکم ریاضیاتی بر این چالش ها فائق آمده است. در پایان، اثر پارامترهای ذاتی لینک های الاستیک، شامل مدول الاستیسیته و ضریب کلوین-ویت بر روی پایداری حرکت اینگونه از سیستم های رباتیکی مورد مطالعه قرار می گیرد.</p>

### ۱- مقدمه

ربات های دوپایی که از لینک های الاستیک ساخته شده اند، نسبت به ربات های صلب سریع تر و سبک تر هستند. از طرفی لینک های انعطاف پذیر به دلیل جذب بخشی از شوک ها و ارتعاشات به وجود آمده، حرکت نرم تری را نتیجه می دهند. این امر موجب می گردد تا تنش های کمتری به ساختار ربات وارد شود، که نتیجه آن به حرکت پایدارتر سیستم می انجامد. با این حال، تحلیل حرکت اینگونه از ربات ها با چالش های بسیار جدی همراه است. به عبارت دیگر تحلیل سینماتیکی و استخراج معادلات دینامیکی ربات هایی که از چندین لینک انعطاف پذیر تشکیل شده اند، آن چنان پیچیده است که نیاز به توسعه یک روش سیستماتیک و عمومی جهت سنتز حرکت اینگونه از ربات ها را اجتناب ناپذیر می سازد.

ساخت ربات هایی که در حرکت شبیه به انسان هستند، باعث شده تا محققان زیادی با استفاده از داده های بیومکانیکی، از

اجزای انعطاف‌پذیر در ساخت مدل خویش استفاده نمایند. کریماغلو و همکاران پایداری حرکت و کنترل ربات دوپا پرگار-مانندی را که در میچ پای آن یک عملگر سری-الاستیک تعبیه شده بود، مورد بررسی قرار دادند [۱]. همچنین ایدا و همکاران [۲] و زلیک و همکاران [۳] در مدل‌سازی ربات پرگار-مانند خود از مفصل‌هایی با المان‌های الاستیک استفاده کردند. دنگ و همکاران با اضافه کردن تنه و عملگر سری‌الاستیک در مفصل لگن، پایداری یک ربات دو پا را در راه رفتن بر روی سطوح صاف مورد بررسی قرار دادند [۴]. همچنین می‌توان به تحقیقات ارزشمند دیگری اشاره نمود، که در آن‌ها اثر فنریت و دمپینگ در مفاصل ربات‌های خودرانی مورد بررسی قرار گرفته است، که در شرایط حرکتی مختلفی قرار دارند [۵-۷]. علیرغم نتایج ارزشمند در تحقیقات ذکر شده، در تمامی آن‌ها لینک‌ها صلب فرض شده، و انعطاف‌پذیری تنها با در نظر گرفتن فنر و دمپر در مفاصل ربات مدل‌سازی شده است.

استفاده از ربات‌هایی که از لینک‌های انعطاف‌پذیر ساخته شده‌اند، به دلایلی همچون کاهش انرژی مورد نیاز جهت حرکت، و نیز پایین بودن نسبت وزن به بار قابل حمل، مورد توجه بسیاری از مهندسين رباتیک و محققین این حوزه قرار گرفته است [۸]. یکی از اولین تحقیقات در رابطه با مدل‌سازی دینامیکی بازوهای مکانیکی انعطاف‌پذیر توسط هستینگز و بوک انجام شد [۹]. چن و همکاران معادلات دینامیکی بازوی مکانیکی با لینک انعطاف‌پذیر را استخراج نموده و ارتعاشات ایجاد شده در آن را مورد بررسی قرار دادند [۱۰]. خیرالدین و همکاران به تحلیل دینامیکی و ساخت یک بازوی مکانیکی با دو لینک انعطاف‌پذیر پرداختند [۱۱]. گارسیا-پرز و همکاران ردیابی مسیر و کنترل ارتعاشات را برای رباتی با یک لینک انعطاف‌پذیر انجام دادند؛ و نتایج شبیه‌سازی را با داده‌های حاصل از آزمایش‌های تجربی مقایسه کردند [۱۲]. همچنین پژوهشگرانی به صورت تئوری و تجربی به طراحی کنترل‌کننده برای بازوهای مکانیکی انعطاف‌پذیر اقدام نمودند [۱۳-۱۶]. کورایم و شافعی معادلات دینامیکی یک ربات پایه متحرک با لینک‌های انعطاف‌پذیر را استخراج کردند [۱۷]. پاتیل و گاندی استخراج معادلات دینامیکی [۱۸] و پنگ و همکاران طراحی کنترل‌کننده [۱۹] برای پاندول معکوس انعطاف‌پذیر را به انجام رساندند. به‌رغم کارهای بسیار متنوعی که بر روی بازوهای مکانیکی انعطاف‌پذیر صورت پذیرفته، تحقیقات بسیار اندکی در رابطه با ربات‌های دوپایی که از لینک‌های انعطاف‌پذیر تشکیل شده‌اند، انجام شده است. شن و کوانگ رفتار تماس-ضربه‌گذرا را برای راه رفتن خودران ربات‌های دوپای پرگار-مانند مورد بررسی قرار دادند [۲۰]. در شبیه‌سازی‌های صورت گرفته، لینک‌ها و سطح تماس به صورت انعطاف‌پذیر مدل‌سازی شده بودند. اخیراً صفرتوبی و همکاران راه رفتن خودران ربات‌های دوپای پرگار-مانند با لینک‌های الاستیک و ویسکوالاستیک را مدل‌سازی کرده‌اند [۲۱-۲۲]. ایشان با استفاده از نمودارهای دوشاخگی، تأثیر پارامترهای سیستم بر پایداری حرکت اینگونه از ربات‌ها را مورد مطالعه قرار داده‌اند. به‌رغم تحقیقات بسیار ارزشمندی که به برخی از آن‌ها اشاره شد، تقریباً در تمامی آن‌ها، معادلات دینامیکی در یک فرآیند غیرسیستماتیک، برای ساده‌ترین مدل ربات دوپا که تنها دارای دو لینک انعطاف‌پذیر است، استخراج شده است. بدیهی است با افزایش تعداد لینک‌های ربات دوپا، و نیز با در نظر گرفتن شکل‌مادهای بیشتر جهت مدل‌سازی دقیق‌تر خاصیت انعطاف‌پذیری در لینک‌ها، روش‌های فوق به دلیل افزایش پیچیدگی‌های محاسباتی، و نیز ایجاد خطاهای ناخواسته در فرآیند استخراج معادلات، کارایی خود را از دست می‌دهند.

از پرکاربردترین روش‌های مرسوم در استخراج معادلات دینامیکی ربات‌های انعطاف‌پذیر، می‌توان به فرمولاسیون لاگرانژ، اصل همیلتون، معادلات نیوتن-اولر و روش گیبس-اپل اشاره نمود. شین و همکاران از روش لاگرانژ در مدل‌سازی دینامیکی یک بازوی مکانیکی با دو لینک انعطاف‌پذیر بهره جستند [۲۳]. تانگ و همکاران از اصل همیلتون در مدل‌سازی دینامیکی بازوی مکانیکی انعطاف‌پذیر با دو کابل، استفاده کردند [۲۴]. همچنین از اصل همیلتون در توسعه مدل دینامیکی لینک‌های انعطاف‌پذیری که در انتهای آن یک جرم متمرکز قرار گرفته است، استفاده شده است [۲۵-۲۷]. خلیل و همکاران بر اساس معادلات نیوتن-اولر به ارائه الگوریتمی جهت حل مسئله دینامیک حرکت ربات‌های انعطاف‌پذیر با پایه متحرک پرداختند [۲۸]. ماتا و همکاران اثبات نمودند که فرمولاسیون گیبس-اپل به علت استفاده کمتر از مشتقات جزئی، نسبت به روش‌های دیگر مانند لاگرانژ برای سیستم‌های چند جزئی مناسب‌تر است [۲۹]. کورایم و همکاران با توسعه یک الگوریتم بازگشتی مبتنی بر فرمولاسیون گیبس-اپل، معادلات دینامیکی بازوهای مکانیکی انعطاف‌پذیر با پایه ثابت و نیز متحرک را استخراج نمودند [۳۰-۳۴]. با این حال، به‌رغم مزایای بسیار ارزشمند این روش، تاکنون از آن در استخراج معادلات حرکت ربات‌های دوپا استفاده نشده است.

ربات‌های دوپا خودران، در صورتی که تحت شرایط اولیه مناسب رها شوند، این امکان را دارند تا تحت اثر گرانش زمین، یک راه رفتن پایدار را تجربه کنند. کیم و همکاران الگوریتمی ساده جهت پیدا کردن شرایط اولیه ایده‌آل، به منظور حرکت خودران ربات‌های دوپای پرگار-مانند ارائه نمودند [۳۵]. آن‌ها با یافتن شرایط اولیه مناسب برای یک ربات دوپا، با ایجاد تغییرات کوچک در پارامترهای سیستم و زاویه سطح شیب‌دار، شروط اولیه مناسبی برای حرکت ربات با پارامترهای مختلف پیدا کردند. ابایشی و همکاران با تمرکز بر ناحیه جذب، به یافتن شرایط اولیه مناسب برای حرکت خودران ربات دوپای پرگار-مانند پرداختند [۳۶]. گریتلی و همکاران با استفاده از الگوریتمی که از قیدهای تغذیه دوشاخگی بهره می‌برد، شرایط اولیه برای حرکت پایدار ربات پرگار-مانند را جست‌وجو کردند [۳۸]. از طرفی دردل و همکاران روشی مبتنی بر حل معادلات دیفرانسیل غیرخطی حرکت با استفاده از روش تفاضل محدود معرفی نموده‌اند که توسط آن شرایط اولیه مناسب جهت حرکت خودران ربات پرگار-مانند تعیین می‌گردد [۳۹].

در این تحقیق با استفاده از معادلات دینامیکی حاکم بر منیپولاتورهای الاستیک<sup>۱</sup> در دو فاز نوسان و انتقال، روشی سیستماتیک برای تعیین شرایط اولیه مناسب جهت حرکت خودران ربات‌های دوپای انعطاف‌پذیر ارائه می‌شود. در این راستا، در بخش ۲، سینماتیک یک زنجیره از  $n$  لینک الاستیک مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در بخش ۳، معادلات دینامیکی این سیستم رباتیکی در دو فاز نوسان (مرحله‌ای که در آن پای تکیه‌گاه به سطح شیب‌دار لولا فرض می‌شود) و انتقال (مرحله‌ای که در آن پای در حال نوسان به سطح شیب‌دار برخورد می‌کند) استخراج می‌گردد. بخش چهارم با خطی‌سازی معادلات حرکت در همسایگی نقطه تعادل ربات، و نیز یافتن ارتباط میان مختصات‌های تعمیم‌یافته در دو قدم متوالی، به استخراج یک مسئله مقدار ویژه می‌پردازد؛ که حل آن، شرایط اولیه مناسب جهت حرکت خودران ربات‌های الاستیک را نتیجه می‌دهد. نتایج حاصل از شبیه‌سازی و نیز مطالعه اثر پارامترهای ذاتی لینک‌ها بر روی پایداری حرکت ربات در بخش ۴ ارائه گردیده است. در پایان، نتایج حاصل از این تحقیق و نیز نوآوری‌های صورت گرفته در آن در بخش ۵ ارائه می‌گردد.

## ۲- سینماتیک ربات‌های ساخته شده از $n$ لینک الاستیک

این بخش به ارائه روابط سینماتیکی مربوط به پایین آمدن یک ربات دوپا از یک سطح شیب‌دار با زاویه شیب  $\alpha$  می‌پردازد. ربات مذکور که زنجیره‌ای از  $n$  لینک الاستیک است، یادآور قسمت پایین‌تنه در ربات‌های انسان‌نما است. برای تحلیل آسان‌تر این سیستم رباتیکی به هر لینک دو دستگاه مختصات اختصاص می‌یابد. دستگاه  $x_i y_i z_i$  به ابتدای لینک  $i$  ام و دستگاه  $\hat{x}_i \hat{y}_i \hat{z}_i$  به انتهای این لینک به گونه‌ای نصب می‌گردند که محورهای  $x_i$  و  $\hat{x}_i$  همواره چسبیده به این لینک، محورهای  $z_i$  و  $\hat{z}_i$  عمود بر صفحه حرکت ربات، و محورهای  $y_i$  و  $\hat{y}_i$  تشکیل‌دهنده یک دستگاه راست‌گرد باشند. همچنین  ${}^{ref}X {}^{ref}Y {}^{ref}Z$  دستگاه مختصات جهانی است که به سطح شیب‌دار متصل شده است و ربات حرکت خود را از مبدأ این دستگاه آغاز می‌کند.

در حرکت رو به پایین ربات در امتداد سطح شیب‌دار که تحت اثر جاذبه اتفاق می‌افتد، با دو فاز حرکتی شامل نوسان و انتقال مواجه هستیم. در فاز نوسان، تنها نقطه‌ای از ربات که با سطح شیب‌دار در تماس است، مفصل  $O_1$  است که فرض می‌کنیم به آن لولا شده است. حال آنکه در فاز انتقال مفصل  $O_{n+1}$  با سطح شیب‌دار برخورد نموده و به آن می‌چسبند؛ و به‌طور هم‌زمان مفصل  $O_1$  تماس خود را با سطح شیب‌دار از دست می‌دهد (شکل ۱).

در قسمت بالای شکل ۱ المان دیفرانسیلی  $Q$  نشان داده شده است. موقعیت این المان نسبت به دستگاه مختصات  $x_i y_i z_i$  عبارت است از:

$$\vec{r}_{Q/O_i} = \underbrace{[\eta_i \quad 0 \quad 0]^T}_{\vec{\eta}_i} + \sum_{j=1}^{m_i} \delta_{ij}(t) \underbrace{[x_{ij}(\eta_i) \quad y_{ij}(\eta_i) \quad z_{ij}(\eta_i)]^T}_{\vec{r}_{ij}} \quad (1)$$

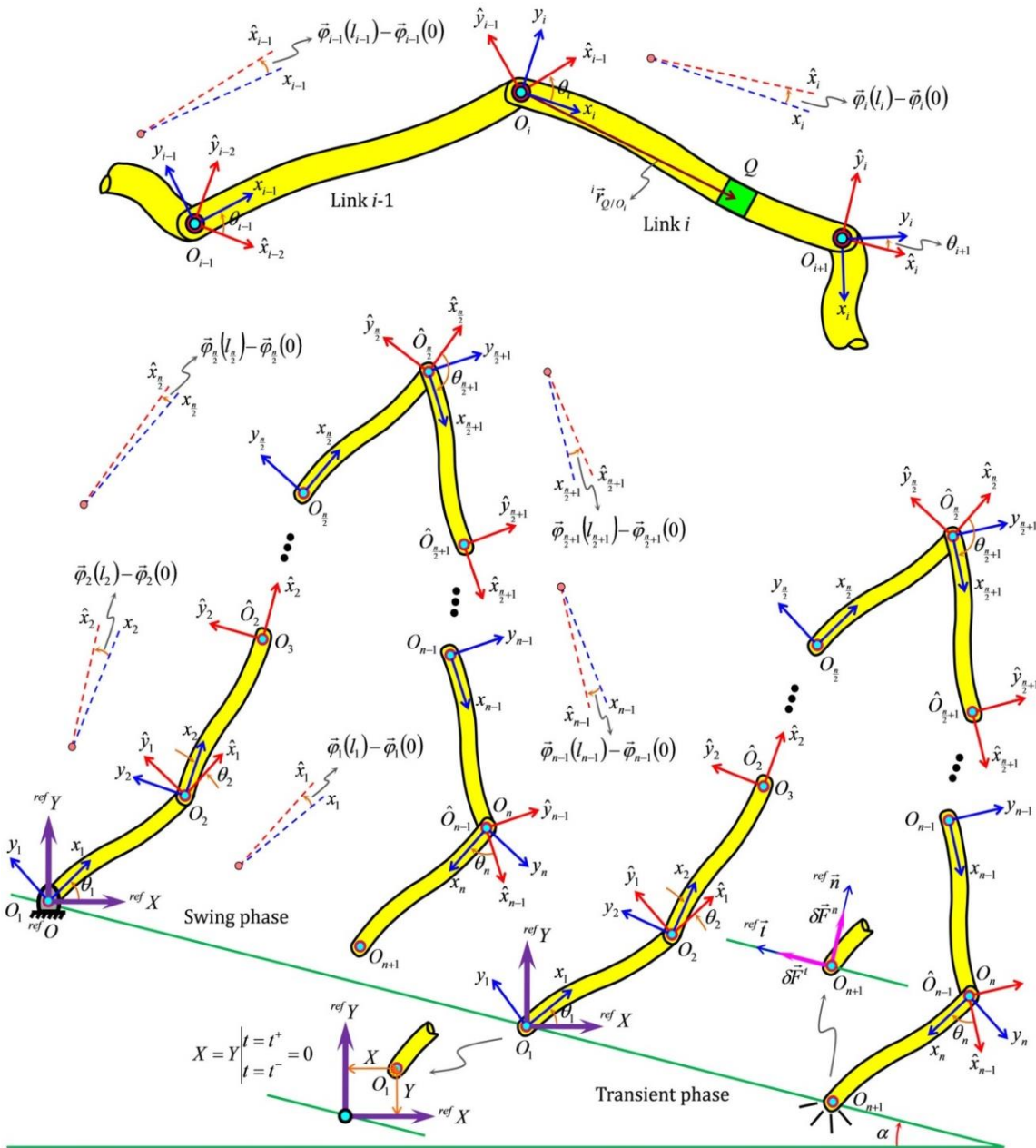
که در آن  $\eta_i$  فاصله میان المان  $Q$  تا مبدأ  $O_i$  در حالتی است که لینک  $i$  ام فاقد هرگونه تغییر فرم الاستیکی باشد. همچنین

<sup>1</sup> elastic manipulators

$\delta_{ij}(t)$  بیانگر زامین مختصات مودال لینک نام، و  $x_{ij}(\eta_i)$ ،  $y_{ij}(\eta_i)$  و  $z_{ij}(\eta_i)$  به ترتیب زامین شکل مود از لینک نام در راستاهای  $O_i z_i$ ،  $O_i y_i$ ،  $O_i x_i$  محسوب می‌گردند. با توجه به معادله ۱ مشاهده می‌گردد که تعداد شکل مودهای بکار رفته برای توصیف انعطاف پذیری در  $i$  امین لینک برابر  $m_i$  مود است. در ادامه، به منظور کاهش پیچیدگی معادلات استخراجی، فرض می‌کنیم که تعداد شکل مودهای بکار رفته برای هر لینک یکسان و برابر  $m$  است. در بخش بعد تحلیل دینامیکی این سیستم رباتیکی در دو فاز نوسان و انتقال ارائه می‌گردد.

### ۳- معادلات دینامیکی حرکت

جهت استخراج معادلات حرکت با استفاده از فرمولاسیون گیبس-اپل، در ابتدا باید عبارتی برای انرژی شتاب کل سیستم ارائه گردد. این کمیت که از حاصل جمع انرژی شتاب  $n$  لینک تشکیل دهنده ربات حاصل می‌گردد، به صورت زیر ارائه می‌گردد:



شکل ۱ وضعیت یک ربات دوپا متشکل از  $n$  لینک الاستیک در دو فاز نوسان و انتقال

$$S = \sum_{i=1}^n \int_0^{t_i} \left[ \frac{1}{2} \mu_i \dot{\bar{v}}_{Q_i}^T \cdot \dot{\bar{v}}_{Q_i} + \frac{1}{2} \dot{\bar{\Omega}}_i^T \cdot I_i \cdot \dot{\bar{\Omega}}_i + \dot{\bar{\Omega}}_i^T \cdot \dot{\bar{\Omega}}_i \cdot I_i \cdot \dot{\bar{\Omega}}_i \right] d\eta_i \quad (2)$$

که در آن  $I_i(\eta_i)$  و  $\mu_i(\eta_i)$  به خصوصیات جرمی لینک  $i$ ام (به ترتیب جرم واحد طول و ممان اینرسی جرمی بر واحد طول) اشاره می‌کنند. از طرفی  $\dot{\bar{v}}_{Q_i}(\eta_i)$  و  $\dot{\bar{\Omega}}_i(\eta_i)$  به ترتیب بیانگر شتاب خطی مطلق و شتاب زاویه‌ای مطلق المان دیفرانسیلی  $Q$  هستند. زیرنویس  $i$  در گوشه بالا و سمت چپ این دو عبارت بیانگر دستگاه مختصاتی است که این دو کمیت نسبت به آن دستگاه توصیف شده‌اند  $(x_i, y_i, z_i)$ . از اصول حاکم بر حرکت در دستگاه‌های مختصات متحرک، و نیز با استفاده از قضیه انتقال به‌راحتی می‌توان نشان داد که عبارت  $\dot{\bar{v}}_{Q_i}$  به صورت زیر ارائه می‌گردد:

$$\dot{\bar{v}}_{Q_i} = \dot{\bar{v}}_{O_i} + \dot{\bar{v}}_{Q_i/O_i} + \dot{\bar{\omega}}_i \times \dot{\bar{r}}_{Q_i/O_i} + \dot{\bar{\omega}}_i \times (\dot{\bar{\omega}}_i \times \dot{\bar{r}}_{Q_i/O_i}) + 2 \dot{\bar{\omega}}_i \times \dot{\bar{v}}_{Q_i/O_i} \quad (3)$$

که در آن  $\dot{\bar{\omega}}_i$  و  $\dot{\bar{v}}_{Q_i/O_i}$  به ترتیب سرعت زاویه‌ای مطلق و شتاب زاویه‌ای مطلق دستگاه مختصات  $x_i, y_i, z_i$  محسوب می‌گردند. همچنین  $\dot{\bar{v}}_{Q_i/O_i}$  و  $\dot{\bar{r}}_{Q_i/O_i}$  با مشتق‌گیری از رابطه ۱ به صورت زیر حاصل می‌گردند:

$$\dot{\bar{v}}_{Q_i/O_i} = \sum_{j=1}^m \delta_{ij}(t) \dot{\bar{r}}_{ij}(\eta_i) \quad (4)$$

$$\dot{\bar{r}}_{Q_i/O_i} = \sum_{j=1}^m \delta_{ij}(t) \dot{\bar{r}}_{ij}(\eta_i) \quad (5)$$

پیش از جایگذاری رابطه ۳ در معادله ۲، عبارتی برای سرعت زاویه‌ای و شتاب زاویه‌ای مطلق المان دیفرانسیلی  $Q$  ارائه می‌نماییم. این کمیت عبارت است از:

$$\dot{\bar{\Omega}}_i(\eta_i, t) = \dot{\bar{\omega}}_i + \Delta \dot{\bar{\phi}}_i \quad (6)$$

$$\dot{\bar{\Omega}}_i(\eta_i, t) = \dot{\bar{\omega}}_i + \Delta \dot{\bar{\phi}}_i + \dot{\bar{\omega}}_i \times \Delta \dot{\bar{\phi}}_i \quad (7)$$

که در آن  $\dot{\bar{\phi}}_i(\eta_i, t) = \dot{\bar{\phi}}_i(\eta_i, t) - \dot{\bar{\phi}}_i(0, t)$ . از طرفی چرخش المان  $Q$  برحسب ترکیبی خطی از شکل موده‌های دورانی به صورت زیر ارائه می‌گردد:

$$\dot{\bar{\phi}}_i(\eta_i, t) = \sum_{j=1}^m \delta_{ij}(t) \underbrace{\left[ \varphi_{xij}(\eta_i) \quad \varphi_{yij}(\eta_i) \quad \varphi_{zij}(\eta_i) \right]}_{\dot{\bar{\phi}}_{ij}} \quad (8)$$

که در آن  $\varphi_{xij}(\eta_i)$ ،  $\varphi_{yij}(\eta_i)$  و  $\varphi_{zij}(\eta_i)$  به ترتیب  $j$ امین شکل مود دورانی از لینک  $i$ ام در راستاهای  $O_i x_i$ ،  $O_i y_i$  و  $O_i z_i$  محسوب می‌گردند. با این وجود، هنگام جایگذاری رابطه ۳ در معادله ۲ از تقریب  $\dot{\bar{\Omega}}_i \cong \dot{\bar{\omega}}_i$  و  $\dot{\bar{\Omega}}_i^T \cong \dot{\bar{\omega}}_i^T$  استفاده می‌نماییم. در این صورت داریم:

$$S = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{1}{2} B_{0i} \dot{\bar{v}}_{O_i}^T \cdot \dot{\bar{v}}_{O_i} + \dot{\bar{v}}_{O_i}^T \cdot \dot{\bar{v}}_{O_i} + \dot{\bar{v}}_{O_i}^T \cdot \dot{\bar{v}}_{O_i} - 2 \dot{\bar{v}}_{O_i}^T \cdot B_{2i} \dot{\bar{\omega}}_i - \dot{\bar{v}}_{O_i}^T \cdot B_{3i} \dot{\bar{\omega}}_i - \dot{\bar{v}}_{O_i}^T \cdot \dot{\bar{\omega}}_i B_{3i} \dot{\bar{\omega}}_i + \frac{1}{2} B_{4i} - 2 \dot{\bar{\omega}}_i^T \cdot \dot{\bar{B}}_{5i} + \dot{\bar{\omega}}_i^T \cdot \dot{\bar{B}}_{6i} - \dot{\bar{\omega}}_i^T \cdot B_{7i} \dot{\bar{\omega}}_i + 2 \dot{\bar{\omega}}_i^T \cdot B_{8i} \dot{\bar{\omega}}_i + \frac{1}{2} \dot{\bar{\omega}}_i^T \cdot (B_{9i} + B_{10i}) \dot{\bar{\omega}}_i + \dot{\bar{\omega}}_i^T \cdot \dot{\bar{\omega}}_i (B_{9i} + B_{10i}) \dot{\bar{\omega}}_i \right] + ineffective \ term \quad (9)$$

که در آن پارامترهای  $B_{ji}; j=1, \dots, 10$  در پیوست (الف) تعریف شده‌اند.

در دو بخش پیشرو معادلات حرکت ربات دوپا در دو فاز نوسان و انتقال ارائه می‌گردد. پیش از آن لازم به تأکید است که اثر گرانش با فرض اعمال شتاب  $1g$  به اولین مفصل زنجیره الاستیک یعنی  $O_1$  در راستای  $ref Y$  لحاظ می‌گردد. لذا داریم:  $ref \dot{\bar{v}}_{O_1} = [0 \quad g \quad 0]^T$ . همچنین انرژی پتانسیل کرنشی و تابع استهلاک ریلی برای سیستم مورد مطالعه به صورت زیر ارائه می‌گردند:

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \delta_{ij}(t) \delta_{ik}(t) V_{ijk} \quad (10)$$

$$D = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \delta_{ij}(t) \delta_{ik}(t) D_{ijk} \quad (11)$$

که در آن  $D_{ijk}$  و  $K_{ijk}$  عبارت‌اند از:

$$V_{ijk} = E_i \int_0^{l_i} I_{zi} \frac{\partial \phi_{zij}}{\partial \eta_i} \frac{\partial \phi_{zik}}{\partial \eta_i} d\eta_i \quad (12)$$

$$D_{ijk} = K_{vi} \int_0^{l_i} I_{zi} \frac{\partial \phi_{zij}}{\partial \eta_i} \frac{\partial \phi_{zik}}{\partial \eta_i} d\eta_i \quad (13)$$

لازم به ذکر است:  $\phi_{zij} = \partial y_{ij} / \partial \eta$ . در روابط ۱۲ و ۱۳،  $E_i$  و  $K_{vi}$  خصوصیات ذاتی  $i$ امین لینک بکار رفته در ساختار ربات یعنی مدول یانگ و ضریب کلون-ویت هستند. همچنین  $I_{zi}$  ممان اینرسی سطحی حول محور  $O_i z_i$  است. با توجه به معادله ۱۲ می‌توان نتیجه گرفت که تنها انرژی پتانسیل کرنشی در نظر گرفته شده، انرژی پتانسیل کرنشی به دلیل خمش در صفحه  $x_i O_i y_i$  است، و از دیگر تغییر فرم‌های ایجاد شده (برش، پیچش، تغییر فرم طولی و خمش در صفحه  $x_i O_i z_i$ ) صرف‌نظر شده است.

### ۳-۱ دینامیک فاز نوسان

قبل از استخراج معادلات حرکت در فاز نوسان، باید مختصات‌های تعمیم‌یافته ربات در این فاز تعیین گردد. از آنجایی که در فاز نوسان تنها نقطه‌ای از ربات که با سطح شیب‌دار در تماس است، مفصل  $O_1$  است (که بدان لولا شده است)، لذا مختصات‌های تعمیم‌یافته سیستم در این فاز، زوایای لینک‌ها نسبت به یکدیگر  $(\theta_i; i = 1, \dots, n)$  و نیز مختصات‌های مودال تعمیم‌یافته  $(\delta_{ij}; i = 1, \dots, nj = 1, \dots, m)$  هستند. تمام این مختصات‌های تعمیم‌یافته در قالب بردار  $\vec{\theta}_S$  به صورت زیر ارائه می‌گردند:

$$\vec{\theta}_S = [\theta_1 \ \delta_{11} \ \dots \ \delta_{1m} \ \dots \ \theta_n \ \delta_{n1} \ \dots \ \delta_{nm}]^T \quad (14)$$

معادلات حرکت ربات در فاز نوسان، از حاصل جمع مشتق انرژی شتاب نسبت به شتاب‌های تعمیم‌یافته، مشتق تابع استهلاک ریلی نسبت به سرعت‌های تعمیم‌یافته، و مشتق انرژی پتانسیل کرنشی نسبت به مختصات‌های تعمیم‌یافته و مساوی قرار دادن آن با نیروهای تعمیم‌یافته ( $\vec{\tau}$ ) حاصل می‌گردد.

$$\frac{\partial S}{\partial \vec{\theta}_S} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\vec{\theta}}_S} + \frac{\partial V}{\partial \vec{\theta}_S} = \vec{\tau} \quad (15)$$

در پیوست (ب)، جزئیات مربوط به هر یک از ترم‌های تشکیل‌دهنده رابطه ۱۵ ارائه شده است. با بازنویسی معادله ۱۵ به فرم دینامیک مستقیم داریم:

$$I_S(\vec{\theta}_S) \ddot{\vec{\theta}}_S + \vec{V}_S(\vec{\theta}_S, \dot{\vec{\theta}}_S) + \vec{G}_S(\vec{\theta}_S) = \vec{0} \Rightarrow I_S(\vec{\theta}_S) \ddot{\vec{\theta}}_S = \vec{R}_S(\vec{\theta}_S, \dot{\vec{\theta}}_S) \quad (16)$$

که در آن  $I_S(\vec{\theta}_S)$  ماتریس اینرسی،  $\vec{V}_S(\vec{\theta}_S, \dot{\vec{\theta}}_S)$  بردار مربوط به اثرات کوریولیس و جانب مرکز، و  $\vec{G}_S(\vec{\theta}_S)$  بردار مربوط به اثرات گرانش است. زیرنویس  $S$  در ترم‌های تشکیل‌دهنده معادله ۱۶ به فاز نوسان اشاره می‌کند. ماتریس  $I_S(\vec{\theta}_S)$  و بردار  $\vec{R}_S(\vec{\theta}_S, \dot{\vec{\theta}}_S) = -\vec{V}_S(\vec{\theta}_S, \dot{\vec{\theta}}_S) - \vec{G}_S(\vec{\theta}_S)$  به ترتیب در شکل‌های ۲ و ۳ نشان داده شده است. لازم به ذکر است در بازنویسی رابطه ۱۵ به فرم دینامیک مستقیم نشان داده شده در معادله ۱۶، بردار گشتاور اعمالی به مفاصل صفر در نظر گرفته شده است. زیرا هدف اصلی این مقاله مطالعه حرکت خودران سیستم تحت اثر شتاب گرانش زمین است.

$I_s(\ddot{\Theta}_s)$	$k=1$				$k=2$				...	$k=n$			
	$\ddot{\theta}_1$	$\ddot{\delta}_{11}$	...	$\ddot{\delta}_{1m}$	$\ddot{\theta}_2$	$\ddot{\delta}_{21}$	...	$\ddot{\delta}_{2m}$		$\ddot{\theta}_n$	$\ddot{\delta}_{n1}$	...	$\ddot{\delta}_{nm}$
$j=1$	$\ddot{\theta}_1$	1+2+3	4+5+6+7+8+10		1+2+3	4+5+6+7+8+9+10			1+2	9+10			
	$\ddot{\delta}_{11}$	11+12 +13+14	18+19+20+21+22 +25+26+27+28		11+12 +13+14 +15	18+19+20+21+22 +26+27+28+30+32			11 +12 +14	30+31+32			
	$\ddot{\delta}_{1m}$	+15+17											
$j=2$	$\ddot{\theta}_2$	1+2+3	4+5+6+7+8		1+2+3	4+5+6+7+8+10			1+2	9+10			
	$\ddot{\delta}_{21}$	11+12 +13+14 +15+16	18+19+20+21+22 +24+26+27+28+29		11+12 +13+14 +15+17	18+19+20+21+22 25+26+27+28			11 +12 +14	30+31+32			
	$\ddot{\delta}_{2m}$	+17											
$j=n$	$\ddot{\theta}_n$	1+3	4+6+8		1+3	4+6+8			1	10			
	$\ddot{\delta}_{n1}$	16 +17	23+24+29		16 +17	23+24+29			17	25			
	$\ddot{\delta}_{nm}$												

شکل ۲ ماتریس اینرسی معادلات حرکت ربات دوپای الاستیک در فاز نوسان

$\vec{R}_s(\ddot{\Theta}_s, \dot{\Theta}_s)^T$	$j=1$				$j=2$				...	$j=n$			
	$R_{\theta_1}$	$R_{\delta_{11}}$	...	$R_{\delta_{1m}}$	$R_{\theta_2}$	$R_{\delta_{21}}$	...	$R_{\delta_{2m}}$		$R_{\theta_n}$	$R_{\delta_{n1}}$	...	$R_{\delta_{nm}}$
$k=1$	33+34	35+36+37		33+34	35+36+37			34	35				

شکل ۳ بردار سمت راست معادلات حرکت ربات دوپای الاستیک در فاز نوسان

اعداد ظاهر شده در شکل‌های ۲ و ۳ (اعداد ۱ تا ۳۷) در پیوست (پ) معرفی شده‌اند.

### ۳-۲ دینامیک فاز نوسان

همان‌گونه که در بخش سینماتیک گفته شد، در فاز لحظه‌ای انتقال، آخرین مفصل در زنجیره سینماتیکی (یعنی  $O_{n+1}$ ) با سطح شیب‌دار برخورد نموده و به‌طور هم‌زمان، اولین مفصل در این زنجیره (یعنی  $O_1$ ) از سطح شیب‌دار جدا می‌شود. لذا دو مختصات تعمیم‌یافته  $X$  و  $Y$  که بیانگر موقعیت مفصل  $O_1$  نسبت به دستگاه مختصات  $refXrefYrefZ$  است، به مختصات تعمیم‌یافته کل سیستم افزوده می‌گردد. بنابراین بردار مختصات تعمیم‌یافته سیستم در این فاز به‌صورت زیر ارائه می‌گردد.

$$\vec{\Theta}_T = [\theta_1 \ \delta_{11} \ \dots \ \delta_{1m} \ \dots \ \theta_n \ \delta_{n1} \ \dots \ \delta_{nm} \ X \ Y]^T \quad (17)$$

پیش از استخراج معادلات حرکت سیستم در فاز انتقال، ذکر این نکته ضروری است که به دلیل حرکت انتقالی مفصل  $O_1$  در این فاز، شتاب این مفصل با فرض در نظر گرفتن اثرات ناشی از گرانش زمین به‌صورت  $ref\dot{v}_{O_1} = [\ddot{X} \ \ddot{Y} + g \ 0]^T$  درمی‌آید. معادلات حرکت سیستم در این حالت نیز همانند فاز نوسان از حاصل جمع مشتق انرژی شتاب نسبت به شتاب‌های تعمیم‌یافته، مشتق تابع استهلاک ریلی نسبت به سرعت‌های تعمیم‌یافته، و مشتق انرژی پتانسیل کرنشی نسبت به مختصات‌های تعمیم‌یافته و مساوی قرار دادن آن با نیروهای تعمیم‌یافته حاصل می‌گردد. نیروهای وارد بر سیستم در این حالت، دو نیروی ضربه‌ای  $\delta\vec{F}^t$  و  $\delta\vec{F}^n$  هستند که به ترتیب در راستاهای مماس بر سطح شیب‌دار ( $ref\vec{t}$ ) و عمود بر آن ( $ref\vec{n}$ ) به مفصل  $O_{n+1}$  اعمال می‌گردد (شکل ۱). لذا در این حالت داریم:

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{\Theta}_T} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\Theta}_T} + \frac{\partial V}{\partial \Theta_T} = \vec{t} + {}^{n+1}J^T(\vec{\Theta}_T)\delta\vec{F}^t + {}^{n+1}J^T(\vec{\Theta}_T)\delta\vec{F}^n \quad (18)$$

همچنین  ${}^{n+1}J^T(\vec{\Theta}_T)$  ماتریس ژاکوبین مفصل  $O_{n+1}$  است که به‌صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$${}^{n+1}J(\vec{\Theta}_T) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^{ref}X_{O_{n+1}}}{\partial\theta_1} & \frac{\partial^{ref}X_{O_{n+1}}}{\partial\delta_{11}} & \dots & \frac{\partial^{ref}X_{O_{n+1}}}{\partial\theta_n} & \dots & \frac{\partial^{ref}X_{O_{n+1}}}{\partial\delta_{nm}} & \frac{\partial^{ref}X_{O_{n+1}}}{\partial X} & \frac{\partial^{ref}X_{O_{n+1}}}{\partial Y} \\ \frac{\partial^{ref}Y_{O_{n+1}}}{\partial\theta_1} & \frac{\partial^{ref}Y_{O_{n+1}}}{\partial\delta_{11}} & \dots & \frac{\partial^{ref}Y_{O_{n+1}}}{\partial\theta_n} & \dots & \frac{\partial^{ref}Y_{O_{n+1}}}{\partial\delta_{nm}} & \frac{\partial^{ref}Y_{O_{n+1}}}{\partial X} & \frac{\partial^{ref}Y_{O_{n+1}}}{\partial Y} \end{bmatrix} \quad (19)$$

در رابطه ۱۹،  ${}^{ref}X_{O_i}$  و  ${}^{ref}Y_{O_i}$  بیانگر مفصل  $O_{n+1}$  نسبت به دستگاه جهانی  ${}^{ref}X{}^{ref}Y{}^{ref}Z$  است. لازم به ذکر است به دلیل فرض حرکت خودران سیستم، گشتاور اعمالی به مفاصل در محاسبات پیشرو صفر در نظر گرفته می‌شود ( $\vec{\tau} = \vec{0}$ ). از طرفی جزئیات مربوط به مشتقات جزئی ظاهر شده در رابطه ۱۸ در پیوست (ت) قابل مشاهده است. در اینجا نیز با بازنویسی معادله ۱۸ به فرم دینامیک مستقیم داریم:

$$I_T(\vec{\Theta}_T)\ddot{\vec{\Theta}}_T + \vec{V}_T(\vec{\Theta}_T, \dot{\vec{\Theta}}_T) + \vec{G}_T(\vec{\Theta}_T) = {}^{n+1}J^T(\vec{\Theta}_T)\delta\vec{F}^t + {}^{n+1}J^T(\vec{\Theta}_T)\delta\vec{F}^n \Rightarrow I_T(\vec{\Theta}_T)\ddot{\vec{\Theta}}_T = \vec{R}_T(\vec{\Theta}_T, \dot{\vec{\Theta}}_T) + {}^{n+1}J^T(\vec{\Theta}_T)\delta\vec{F}^t + {}^{n+1}J^T(\vec{\Theta}_T)\delta\vec{F}^n \quad (20)$$

که در آن  $I_T(\vec{\Theta}_T)$  ماتریس اینرسی سیستم در فاز انتقال (شکل ۴) و  $\vec{R}_T(\vec{\Theta}_T, \dot{\vec{\Theta}}_T) = -\vec{V}_T(\vec{\Theta}_T, \dot{\vec{\Theta}}_T) - \vec{G}_T(\vec{\Theta}_T)$  از جملات تشکیل دهنده سمت راست معادله ۲۰ است که شامل اثرات ناشی از شتاب کوریولیس، شتاب جانب مرکز و گرانش می‌شوند (شکل ۵). همچنین اعداد جدید ظاهر شده در این دو شکل (اعداد ۳۸ تا ۶۴) در پیوست (ث) معرفی شده‌اند.

$I_T(\vec{\Theta}_T)$		$k=1$				...	$k=n$				$k=n+1$	$k=n+2$
		$\ddot{\theta}_1$	$\ddot{\delta}_{11}$	...	$\ddot{\delta}_{1m}$		$\ddot{\theta}_n$	$\ddot{\delta}_{n1}$	...	$\ddot{\delta}_{nm}$	$\ddot{X}$	$\ddot{Y}$
$j=1$	$\ddot{\theta}_1$	1+2+3	4+5+6+7+8+10				1+2	9+10			38+39	40+41
	$\ddot{\delta}_{11}$	11+12	18+19+20+21+22				11	30+31+32			42+43	46+47
	$\vdots$	+13+14	+25+26+27+28				+12				+44+45	+48+49
	$\ddot{\delta}_{1m}$	+15+17					+14					
$\vdots$	$\vdots$											
$j=n$	$\ddot{\theta}_n$	1+3	4+6+8				1	10			38	40
	$\ddot{\delta}_{n1}$	16	23+24+29				17	25			45	49
	$\vdots$	+17										
	$\ddot{\delta}_{nm}$											
$j=n+1$	$\ddot{X}$	50+51	52+53+54+55				51	53			62	0
$j=n+2$	$\ddot{Y}$	56+57	58+59+60+61				57	59			0	62

شکل ۴ ماتریس اینرسی معادلات حرکت ربات دوپای الاستیک در فاز انتقال

$\vec{R}_T(\vec{\Theta}_T, \dot{\vec{\Theta}}_T)^T$	$j=1$				...	$j=n$				$j=n+1$	$j=n+2$
	$R_{\theta_1}$	$R_{\delta_{11}}$	...	$R_{\delta_{1m}}$		$R_{\theta_n}$	$R_{\delta_{n1}}$	...	$R_{\delta_{nm}}$	$R_X$	$R_Y$
$k=1$	33+34	35+36+37				34	35			63	64

شکل ۵ بردار سمت راست معادلات حرکت ربات دوپای الاستیک در فاز انتقال

معادلات جبری در فاز انتقال با انتگرال‌گیری از معادله ۲۰ در طول مدت زمان بسیار کوتاه برخورد ( $t^- \rightarrow t^+$ ) به صورت زیر حاصل می‌گردد:

$$\int_{t=t^-}^{t=t^+} I_T(\vec{\Theta}_T)\ddot{\vec{\Theta}}_T dt = \int_{t=t^-}^{t=t^+} \vec{R}_T(\vec{\Theta}_T, \dot{\vec{\Theta}}_T) dt + \int_{t=t^-}^{t=t^+} ({}^{n+1}J^T(\vec{\Theta}_T)\delta\vec{F}^t + {}^{n+1}J^T(\vec{\Theta}_T)\delta\vec{F}^n) dt \quad (21)$$

با توجه به اینکه  $\vec{R}_T(\vec{\Theta}_T, \dot{\vec{\Theta}}_T)$  از ترم‌هایی با مقادیر محدود تشکیل شده است، لذا انتگرال آن در طول مدت زمان بسیار کوتاه برخورد برابر صفر است. بنابراین معادله ۲۱ به فرم زیر ساده می‌شود:

$$I_T(\vec{\Theta}_T)(\dot{\vec{\Theta}}_T^+ - \dot{\vec{\Theta}}_T^-) = {}^{n+1}J^T(\vec{\Theta}_T)\overrightarrow{ref}tF^t + {}^{n+1}J^T(\vec{\Theta}_T)\overrightarrow{ref}nF^n \quad (22)$$

که در آن  $F^t = \int_{t=t^-}^{t=t^+} \delta F^t dt$  و  $F^n = \int_{t=t^-}^{t=t^+} \delta F^n dt$  همچنین  $\dot{\vec{\Theta}}_T^+$  و  $\dot{\vec{\Theta}}_T^-$  به ترتیب بیانگر سرعت‌های تعمیم‌یافته سیستم، قبل و پس از برخورد هستند.

در فاز انتقال، فرض برخورد کاملاً پلاستیک برقرار است. بدان معنا که با برخورد آخرین مفصل زنجیره سینماتیکی به سطح شیب‌دار، بدان می‌چسبد. لذا مؤلفه‌های سرعت این مفصل در هر دو راستای مماس و عمود بر سطح شیب‌دار برابر صفر می‌گردد. بنابراین داریم:

$$\left( {}^{ref} \vec{v}_{O_{n+1}} \right)_t^+ = 0 \Rightarrow {}^{ref} \vec{t}^T {}^{n+1} J(\vec{\Theta}_T) \dot{\vec{\Theta}}_T^+ = 0 \quad (23)$$

$$\left( {}^{ref} \vec{v}_{O_{n+1}} \right)_n^+ = 0 \Rightarrow {}^{ref} \vec{n}^T {}^{n+1} J(\vec{\Theta}_T) \dot{\vec{\Theta}}_T^+ = 0 \quad (24)$$

با ترکیب روابط ۲۲، ۲۳ و ۲۴ داریم:

$$\left[ \begin{array}{c|c|c} I_T(\vec{\Theta}_T) & -{}^{n+1} J^T(\vec{\Theta}_T) {}^{ref} \vec{t} & -{}^{n+1} J^T(\vec{\Theta}_T) {}^{ref} \vec{n} \\ \hline {}^{ref} \vec{t}^T {}^{n+1} J(\vec{\Theta}_T) & 0 & 0 \\ \hline {}^{ref} \vec{n}^T {}^{n+1} J(\vec{\Theta}_T) & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \dot{\vec{\Theta}}_T^+ \\ F^t \\ F^n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} I_T(\vec{\Theta}_T) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \dot{\vec{\Theta}}_T^- \quad (25)$$

حل دستگاه  $(1+m)n+4$  معادله-  $(1+m)n+4$  مجهول ظاهر شده در معادله ۲۵ نتیجه زیر را در پی دارد.

$$\begin{Bmatrix} \dot{\vec{\Theta}}_T^+ \\ F^t \\ F^n \end{Bmatrix} = H \dot{\vec{\Theta}}_T^- \quad (26)$$

که در آن  $[H]_{(1+m)n+4, (1+m)n+2}$  عبارت است از:

$$H = \left[ \begin{array}{c|c|c} I_T(\vec{\Theta}_T) & -{}^{n+1} J^T(\vec{\Theta}_T) {}^{ref} \vec{t} & -{}^{n+1} J^T(\vec{\Theta}_T) {}^{ref} \vec{n} \\ \hline {}^{ref} \vec{t}^T {}^{n+1} J(\vec{\Theta}_T) & 0 & 0 \\ \hline {}^{ref} \vec{n}^T {}^{n+1} J(\vec{\Theta}_T) & 0 & 0 \end{array} \right]^{-1} \begin{Bmatrix} I_T(\vec{\Theta}_T) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (27)$$

لذا با در اختیار داشتن ماتریس  $H$ ، می‌توان سرعت‌های تعمیم‌یافته پس از برخورد را از روی سرعت‌های تعمیم‌یافته قبل از برخورد به دست آورد.

#### ۴- تعیین شرایط اولیه جهت حرکت خودران ربات الاستیک

##### ۴-۱ خطی‌سازی معادلات حرکت در همسایگی وضعیت تعادلی آن

هدف اصلی این بخش، یافتن شرایط اولیه مناسب جهت حرکت متناوب یک ربات سریال متشکل از  $n$  لینک الاستیک، تحت اثر وزن آن هستیم. معادلات حرکت این سیستم رباتیکی در دو فاز نوسان و انتقال در بخش قبلی مورد مطالعه قرار گرفت. با نوشتن معادلات دیفرانسیلی حرکت در فرم فضای حالت داریم:

$$\vec{f}(\vec{q}) = \begin{cases} \dot{q}_i = q_{i+1} \\ \dot{q}_{i+1} = \frac{i+1}{2}(q_1, \dots, q_{2(1+m)n}) \end{cases} \quad i = 1, 3, 5, 2(1+m)n - 1 \quad (28)$$

که در آن بردار متغیرهای حالت  $\vec{q}$  و نیز بردار  $\vec{h} = \vec{\Theta}_S$  عبارت‌اند از:

$$\vec{q} = \left[ \begin{array}{cccccc} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & \dots & q_{2(1+m)(n-1)+1} & q_{2(1+m)(n-1)+2} & \dots & q_{2(1+m)n-1} & q_{2(1+m)n} \end{array} \right]^T \quad (29)$$

$$\vec{h} = \left[ \begin{array}{cccccc} h_1 & h_2 & \dots & h_{(1+m)(n-1)+1} & \dots & h_{(1+m)n} \end{array} \right]^T = I_S^{-1}(\vec{\Theta}_S) \vec{R}_S(\vec{\Theta}_S, \dot{\vec{\Theta}}_S) \quad (30)$$

برای مطالعه رفتار این سیستم رباتیکی در حوالی وضعیت تعادلی آن، به خطی‌سازی معادلات حرکت می‌پردازیم.

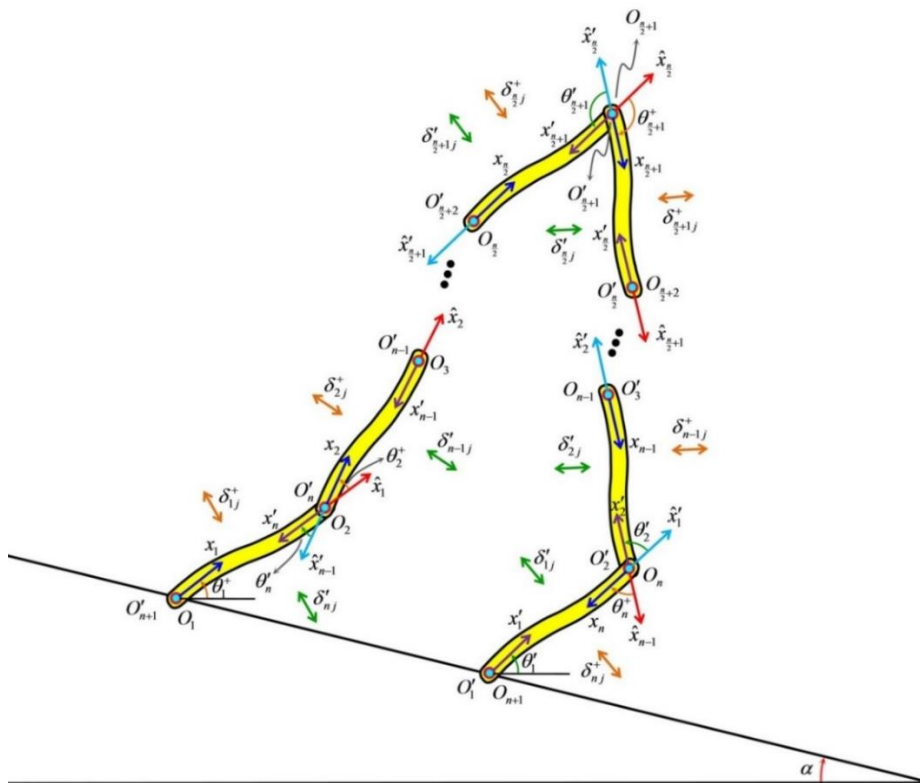
$$\dot{\vec{q}} = \vec{f}(\vec{q}^*) + \left( \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{q}} \right) |_{\vec{q}^*} \vec{q} = \vec{q}^* (\vec{q} - \vec{q}^*) + \dots \quad (31)$$

که در آن  $\vec{q}^* = [q_1^* \quad q_2^* \quad \dots \quad q_{2(1+m)n-1}^* \quad q_{2(1+m)n}^*]^T$  بردار متغیرهای حالت سیستم در وضعیت تعادلی آن است.



پس از برخورد با سطح شیب‌دار در قدم قدیم، و  $\delta'_{ij}|_{t'=0} = 0$  همین کمیت در شروع قدم جدید است. لذا ارتباط میان مختصات‌های تعمیم‌یافته و سرعت‌های تعمیم‌یافته در قدم جدید برحسب مقادیر متناظر آن در قدم قدیم به طریق زیر ارائه می‌گردد:

$$\begin{aligned} \theta_1'|_{t'=0} &= \pi + \sum_{i=1}^n \theta_i^+ \\ \dot{\theta}_1'|_{t'=0} &= \sum_{i=1}^n \dot{\theta}_i^+ \\ \theta_i'|_{t'=0} &= -\theta_{n-i+2}^+ \quad i = 2, \dots, n \\ \dot{\theta}_i'|_{t'=0} &= -\dot{\theta}_{n-i+2}^+ \quad i = 2, \dots, n \\ \delta'_{ij}|_{t'=0} &= -\delta_{n-i+1,j}^+ \quad i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m \\ \dot{\delta}'_{ij}|_{t'=0} &= -\dot{\delta}_{n-i+1,j}^+ \quad i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (37)$$



شکل ۶ ارتباط میان مختصات‌های تعمیم‌یافته در پایان قدم قدیم و شروع قدم جدید

که در آن  $t' = 0$  نشان‌دهنده زمان شروع حرکت در قدم جدید است. با معرفی متغیرهای فضای حالت در قدم جدید به صورت

$$\bar{q}' = \left[ \begin{array}{cccccccc} \underline{q}'_1 & \underline{q}'_2 & \underline{q}'_3 & \underline{q}'_4 & \dots & \underline{q}'_{2(1+m)(n-1)+1} & \underline{q}'_{2(1+m)(n-1)+2} & \dots & \underline{q}'_{2(1+m)n-1} & \underline{q}'_{2(1+m)n} \end{array} \right]^T \quad (38)$$

می‌توان معادله ۳۷ را برحسب متغیرهای فضای حالت به فرم برداری زیر ارائه نمود:

$$\bar{q}'|_{t'=0} = \bar{\pi} + \kappa_2 \bar{q}^+ \quad (39)$$

که در آن بردار  $\bar{\pi}$  و ماتریس  $\kappa_2$  به ترتیب در رابطه ۴۰ و شکل ۷ ارائه شده‌اند.

$$\bar{\pi} = [\pi \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0]^T \quad (40)$$

$\kappa_2$	$k=1$					$k=2$					$k=n-1$					$k=n$					
	$\theta_1$	$\dot{\theta}_1$	$\delta_{11}$	$\dot{\delta}_{11}$	...	$\theta_2$	$\dot{\theta}_2$	$\delta_{21}$	$\dot{\delta}_{21}$	...	$\theta_{n-1}$	$\dot{\theta}_{n-1}$	$\delta_{n-11}$	$\dot{\delta}_{n-11}$	...	$\theta_n$	$\dot{\theta}_n$	$\delta_{n1}$	$\dot{\delta}_{n1}$	...	
$j=1$	$q'_1$	1	0	0	0	...	1	0	0	0	...	1	0	0	0	...	1	0	0	0	...
	$q'_2$	0	1	0	0	...	0	1	0	0	...	0	1	0	0	...	0	1	0	0	...
	$q'_3$	0	0	0	0	...	0	0	0	0	...	0	0	0	0	...	0	0	-1	0	...
	$q'_4$	0	0	0	0	...	0	0	0	0	...	0	0	0	0	...	0	0	0	-1	...
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$
$j=2$	$q'_{2(1+m)+1}$	0	0	0	0	...	0	0	0	0	...	0	0	0	0	...	-1	0	0	0	...
	$q'_{2(1+m)+2}$	0	0	0	0	...	0	0	0	0	...	0	0	0	0	...	0	-1	0	0	...
	$q'_{2(1+m)+3}$	0	0	0	0	...	0	0	0	0	...	0	0	-1	0	...	0	0	0	0	...
	$q'_{2(1+m)+4}$	0	0	0	0	...	0	0	0	0	...	0	0	0	-1	...	0	0	0	0	...
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$
$j=n-1$	$q'_{2(1+m)(n-2)+1}$	0	0	0	0	...	0	0	0	0	...	0	0	0	0	...	0	0	0	0	...
	$q'_{2(1+m)(n-2)+2}$	0	0	0	0	...	0	0	0	0	...	0	0	0	0	...	0	0	0	0	...
	$q'_{2(1+m)(n-2)+3}$	0	0	0	0	...	0	0	0	-1	0	...	0	0	0	...	0	0	0	0	...
	$q'_{2(1+m)(n-2)+4}$	0	0	0	0	...	0	0	0	0	-1	...	0	0	0	...	0	0	0	0	...
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$
$j=n$	$q'_{2(1+m)(n-1)+1}$	0	0	0	0	...	-1	0	0	0	...	0	0	0	0	...	0	0	0	0	...
	$q'_{2(1+m)(n-1)+2}$	0	0	0	0	...	0	-1	0	0	...	0	0	0	0	...	0	0	0	0	...
	$q'_{2(1+m)(n-1)+3}$	0	0	-1	0	...	0	0	0	0	...	0	0	0	0	...	0	0	0	0	...
	$q'_{2(1+m)(n-1)+4}$	0	0	0	-1	...	0	0	0	0	...	0	0	0	0	...	0	0	0	0	...
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

شکل ۷ ارتباط میان مختصات‌های تعمیم یافته در پایان قدم قدیم و شروع قدم جدید

بدیهی است که وضعیت تعادل در قدم جدید همانند وضعیت تعادل در قدم قدیم است. لذا اگر در قدم جدید، بردار متغیرهای حالت در وضعیت تعادلی آن را با  $\bar{q}^*$  نشان دهیم، آنگاه داریم  $\bar{q}^* = \bar{q}^*$ . با استفاده از این حقیقت می‌توان رابطه ۳۹ را برحسب بردار  $\bar{y}$  به صورت زیر نوشت:

$$\bar{y}'_0 = \kappa_2 \bar{y}^+ \tag{۴۱}$$

که در آن  $\bar{y}'_0$  بردار متغیرهای حالت در شروع قدم جدید و  $\bar{y}^+$  بردار متغیرهای حالت درست در لحظه پس از برخورد قدم قدیم با سطح شیب‌دار است.

#### ۳-۴ استخراج یک مسئله مقدار ویژه جهت حرکت خودران ربات الاستیک

در زیر بخش ۴-۱، مقادیر متغیرهای حالت در قدم قدیم در لحظه پس از برخورد با سطح شیب‌دار برحسب مقادیر متناظر آن در لحظه قبل از برخورد با این سطح تعیین گردید (رابطه ۳۶). همچنین ارتباط میان متغیرهای حالت در شروع قدم جدید، برحسب مقادیر متناظر آن در پایان قدم قدیم در زیر-بخش ۴-۲ ارائه گردید (رابطه ۴۱). اکنون با ترکیب روابط ۳۶ و ۴۱ داریم:

$$\bar{y}'_0 = \kappa_2 \kappa_1 \bar{y}^- \tag{۴۲}$$

معادله ۴۲، رابطه‌ای است که ارتباط میان متغیرهای حالت در شروع قدم جدید را برحسب مقادیر متناظر آن در لحظه پیش از برخورد با سطح شیب‌دار در قدم قدیم نشان می‌دهد. از طرفی پیشتر در رابطه ۳۴ رفتار سیستم را در همسایگی وضعیت تعادلی آن به دست آوردیم. با استفاده از این رابطه و با داشتن شرایط اولیه می‌توان مقادیر متغیرهای حالت را دقیقاً پیش از برخورد با سطح شیب‌دار تعیین نمود.

$$\bar{y}^- = e^{At^-} \bar{y}_0 \tag{۴۳}$$

که در آن  $t^-$  دوره تناوب یک گام کامل در قدم قدیم محسوب می‌گردد. با جایگذاری رابطه ۴۳ در معادله ۴۲ داریم:

$$\bar{y}'_0 = \kappa_2 \kappa_1 e^{At^-} \bar{y}_0 \tag{۴۴}$$

شرط تحقق یک حرکت پیرویدیک آن است که پیکربندی ربات در شروع هر گام همانند گام قبلی باشد. به عبارت دیگر داریم:  $\bar{y}'_0 = \bar{y}_0$ . با استفاده از این فرض رابطه ۴۴ به فرم زیر درمی‌آید.

$$\bar{y}'_0 = W \bar{y}_0 \quad (45)$$

که در آن  $W = \kappa_2 \kappa_1 e^{At}$ . معادله ۴۵ بیانگر یک مسئله مقدار ویژه، با مقدار ویژه  $\lambda = 1$  است. برای داشتن یک پاسخ غیر بدیهی از معادله فوق باید داشته باشیم:

$$\det(W - I) = 0 \quad (46)$$

تنها مجهول معادله جبری فوق  $t^-$  است که با حل آن دوره تناوب یک گام کامل به دست خواهد آمد. با جایگذاری مقدار به دست آمده برای  $t^-$  در ماتریس  $W$ ، با ماتریسی مواجه هستیم که حتماً یکی از مقادیر ویژه آن  $\lambda = 1$  است. اکنون با جایگذاری بردار ویژه متنظر با این مقدار ویژه در رابطه  $\bar{q}_0 = \bar{y}_0 + \bar{q}^*$ ، شرایط اولیه جهت حرکت خودران ربات الاستیک تعیین می‌گردد. به حرکت ربات تحت این شرایط اولیه یک مود حرکتی می‌گوییم. در اینجا ذکر این نکته ضروری است که معادله ۴۶ دارای بی‌نهایت ریشه  $t^-$  است؛ که به ازاء هر ریشه یک مود حرکتی حاصل می‌گردد. ولی به دلیل ماهیت به شدت ناپایدار سیستم مورد مطالعه، خیلی از مودهای حرکتی به دست آمده، به یک حرکت خودران و پیرویدیک منتهی نمی‌گردند. روش ارائه شده در این مقاله، در مواجهه با این دسته از شرایط اولیه نیز از یک مزیت عمده برخوردار است. همان گونه که مشاهده گردید، روش پیشنهادی برای تعیین شرایط اولیه، از دینامیک حاکم بر سیستم نشئت می‌گیرد. لذا پیکربندی اولیه ربات به گونه‌ای تعیین می‌گردد تا در عین پایداری، بیشترین انرژی مورد نیاز جهت حرکت خودران خود را از نیروی گرانش زمین تأمین کند. این موضوع باعث می‌شود تا بتوان با طراحی یک سیستم کنترلی بسیار ساده و با اعمال یک گشتاور کنترلی با دامنه محدود، حرکت پایدار ربات دوپای الاستیک را در پایین آمدن از سطوح شیب‌دار تضمین نمود.

## ۵- شبیه‌سازی پایین آمدن ربات دوپای الاستیک از سطوح شیب‌دار

همان گونه که در انتهای بخش قبل بیان شد، شرایط اولیه به دست آمده توسط روش ارائه شده در این مقاله، لزوماً به یک حرکت پایدار منجر نمی‌گردد. این امر به دلیل ماهیت به شدت ناپایدار سیستم مورد مطالعه است، که انعطاف‌پذیری لینک‌های بکار رفته در ساختار ربات به این ناپایداری شدت بیشتری می‌بخشد. باین حال زمانی که ربات دوپا از کمترین تعداد لینک ممکن، یعنی تنها دو لینک در ساختار خود برخوردار باشد، آنگاه امکان آنکه بتوان شرایط اولیه مناسب جهت حرکت خودران ربات را تعیین نمود، به شدت افزایش می‌یابد. به طور مثال رباتی متشکل از دو لینک الاستیک با پارامترهایی که در جدول ۱ ارائه شده است در نظر بگیرید.

جدول ۱ مشخصات فیزیکی و هندسی ربات دوپا الاستیک

مقدار	پارامتر	توضیحات
0.5m	$l_1, l_2$	طول لینک‌ها
2kg/m	$\mu_1, \mu_2$	جرم واحد طول
$2.0 \times 10^{11} \text{pa}$	$E_1, E_2$	مدول یانگ
100kg · s/m	$K_{v1}, K_{v2}$	ضریب کلونین-ویت
$5 \times 10^{-9} \text{m}^4$	$I_{z1}, I_{z2}$	ممان اینرسی سطحی حول محور $O_i Z_i$
$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{kg} \cdot \text{m}$	$I_1, I_2$	ممان اینرسی جرمی بر واحد طول
$9.81 \text{m/s}^2$	$g$	شتاب گرانش جاذبه
0.5 deg	$\alpha$	شیب سطح
0N · m	$\tau_1, \tau_2$	گشتاور اعمالی

در مورد خصوصیات فیزیکی ربات مورد مطالعه، فرض شده است که ربات از لینک‌های بسیار نازکی تشکیل شده است. لذا

درایه‌های ماتریس ممان اینرسی جرمی بر واحد طول با مقادیر صفر پر شده است. برای مدل‌سازی انعطاف‌پذیری در لینک‌های این ربات، از دو شکل مود اول مربوط به تیر الاستیک با شرایط مرزی گیردار-گیردار استفاده می‌کنیم. این دو شکل مود عبارت‌اند از:

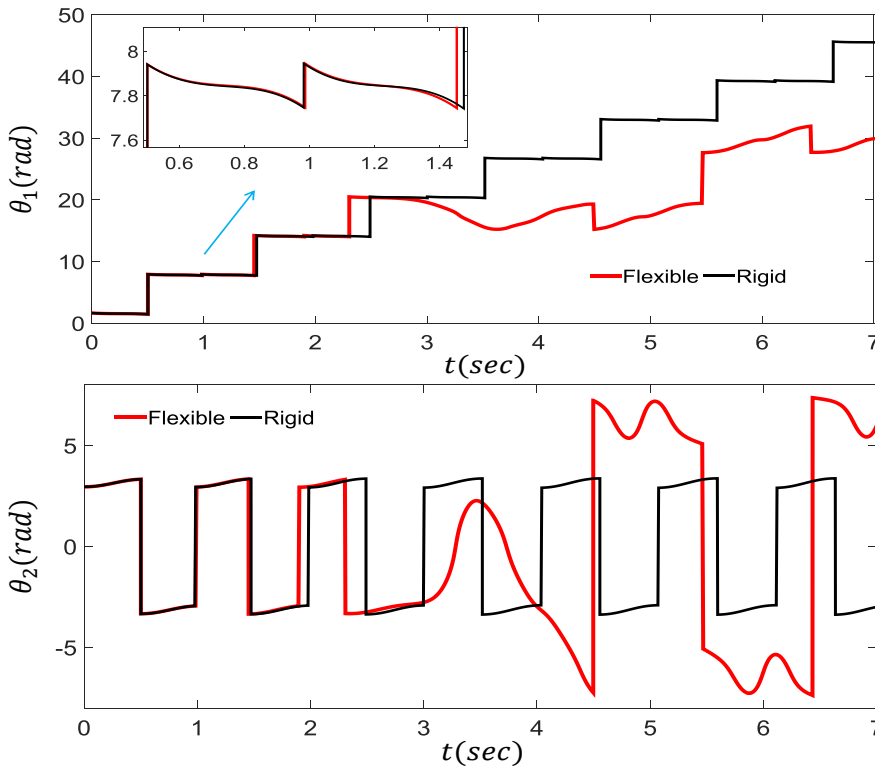
$$y_{i1} = \sin\left(4.731 \frac{\eta}{l_i}\right) - 1.017 \cos\left(4.731 \frac{\eta}{l_i}\right) - \sinh\left(4.731 \frac{\eta}{l_i}\right) + 1.017 \cosh\left(4.731 \frac{\eta}{l_i}\right) \quad (47)$$

$$y_{i2} = 1.000777 \sin\left(7.853 \frac{\eta}{l_i}\right) - \cos\left(7.853 \frac{\eta}{l_i}\right) - 1.000777 \sinh\left(7.853 \frac{\eta}{l_i}\right) + \cosh\left(7.853 \frac{\eta}{l_i}\right) \quad (48)$$

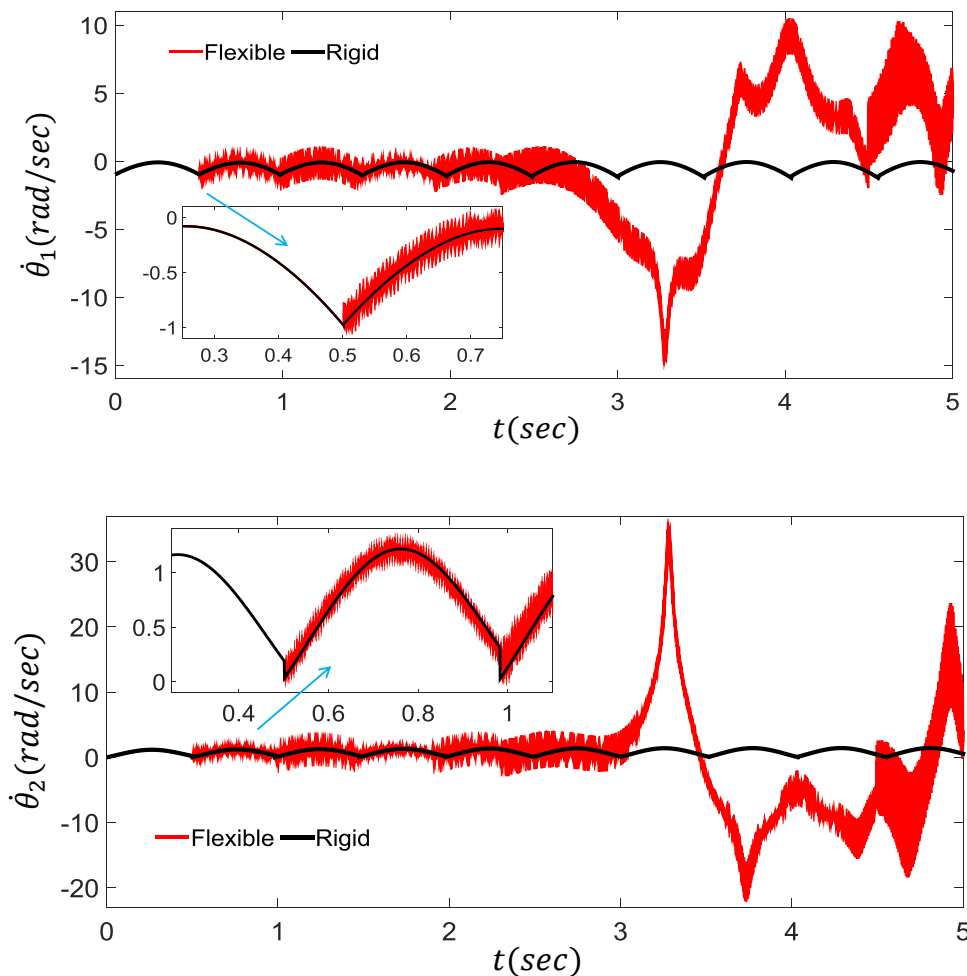
مطابق روش ارائه شده در این مقاله، اولین ریشه معادله مشخصه (رابطه ۴۶) عبارت است از:  $\tau = t^- = 0.510919322$  با جایگذاری این مقدار در ماتریس  $W$ ، بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه  $\lambda = 1$  تعیین می‌گردد. در ادامه با استفاده از رابطه  $q_i = y_i + q_i^*$ ;  $i = 1, \dots, 6$  شرح زیر تعیین می‌گردند.

$$\begin{aligned} q_1 = \theta_1 &= 0.09249506705 \text{rad} & q_2 = \dot{\theta}_1 &= -0.97837789879 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \\ q_3 = \delta_{11} &= 0.00000000071 & q_4 = \dot{\delta}_{11} &= 0.00000002478 \frac{1}{\text{s}} \\ q_5 = \delta_{12} &= 0.00000000004 \text{rad} & q_6 = \dot{\delta}_{12} &= 0.00000000864 \frac{1}{\text{s}} \\ q_7 = \theta_2 &= -0.18499013409 \text{rad} & q_8 = \dot{\theta}_2 &= 0.00000000008 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \\ q_9 = \delta_{21} &= 0.00000000036 & q_{10} = \dot{\delta}_{21} &= 0.00000005469 \frac{1}{\text{s}} \\ q_{11} = \delta_{22} &= 0.00000000000 & q_{12} = \dot{\delta}_{22} &= 0.00000000025 \frac{1}{\text{s}} \end{aligned} \quad (49)$$

نتایج حاصل از شبیه‌سازی شامل موقعیت زاویه‌ای و سرعت زاویه‌ای مفاصل به ترتیب در شکل‌های ۸ و ۹ نشان داده شده است.

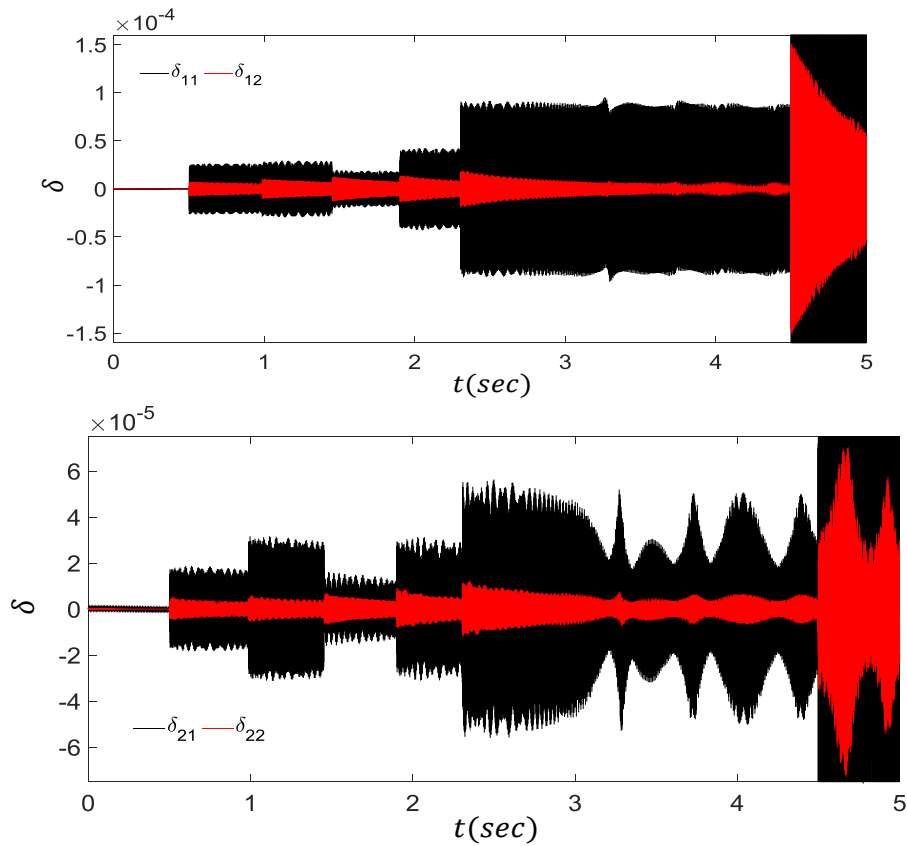


شکل ۸ موقعیت زاویه‌ای مفاصل ربات دوپا

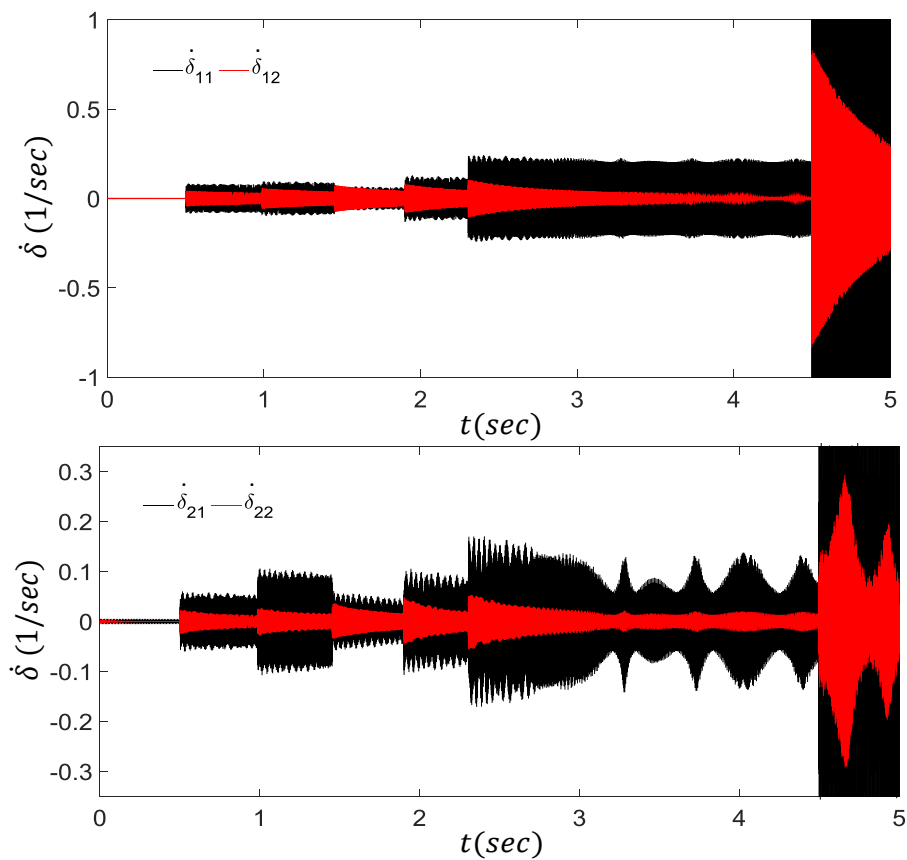


شکل ۹ سرعت زاویه‌ای مفاصل دو پا

با توجه به شکل ۸ می‌توان نتیجه گرفت که ربات دوپای الاستیک با شرایط اولیه مندرج در رابطه ۴۹ پس از طی پنج قدم واژگون می‌گردد. این موضوع در شکل ۹ نیز (که در آن سرعت زاویه‌ای مفاصل برحسب زمان رسم شده است) قابل مشاهده است. از طرفی با دقت در شکل ۹ مشاهده می‌گردد که تا پیش از برخورد پای در حال نوسان با سطح شیب‌دار در اولین گام، سیستم فاقد هرگونه پاسخ ارتعاشی است. تنها پس از اعمال نیروی ضربه‌ای در پایان گام نخست است که مودهای ارتعاشی در سیستم تحریک شده و تحت اثر آن پاسخ سیستم با رفتار ارتعاشی همراه است. در اینجا ممکن است این سؤال مطرح گردد که چرا در شکل ۸، رفتار ارتعاشی سیستم پس از گام نخست همانند شکل ۹ قابل مشاهده نیست. برای پاسخ به این سؤال باید دیگر مختصات تعمیم‌یافته سیستم یعنی مختصات مودال تعمیم‌یافته رسم گردد. این کمیت به همراه مشتق آن به ترتیب در شکل‌های ۱۰ و ۱۱ رسم شده‌اند. لازم به ذکر است برای یک سیستم رباتیک با لینک‌های صلب این کمیت اصلاً تعریف نمی‌شود. از طرفی چون در مدلسازی خاصیت انعطاف‌پذیری در لینک‌های تشکیل‌دهنده ربات از دو شکل مود استفاده شده بود (روابط ۴۷ و ۴۸)، لذا پاسخ ارتعاشی هر لینک از دو مختصات مودال تعمیم‌یافته (برای لینک اول  $\delta_{11}, \delta_{12}$  و برای لینک دوم  $\delta_{21}, \delta_{22}$ ) برخوردار است. همان‌گونه که در شکل ۱۰ مشاهده می‌گردد، برای هر یک از دو لینک، دامنه اولین مختصات مودال تعمیم‌یافته بزرگ‌تر از مقدار متناظر آن برای دومین مود است ( $\delta_{11} > \delta_{12}$  و  $\delta_{21} > \delta_{22}$ ). این موضوع برای سرعت مودال تعمیم‌یافته که نتایج آن در شکل ۱۱ ارائه شده است، نیز صادق است ( $\dot{\delta}_{11} > \dot{\delta}_{12}$  و  $\dot{\delta}_{21} > \dot{\delta}_{22}$ ). لذا می‌توان نتیجه گرفت که سهم مودهای بالاتر در پاسخ ارتعاشی سیستم کمتر است.



شکل ۱۰ مختصات مودال تعمیم‌یافته



شکل ۱۱ سرعت مودال تعمیم‌یافته

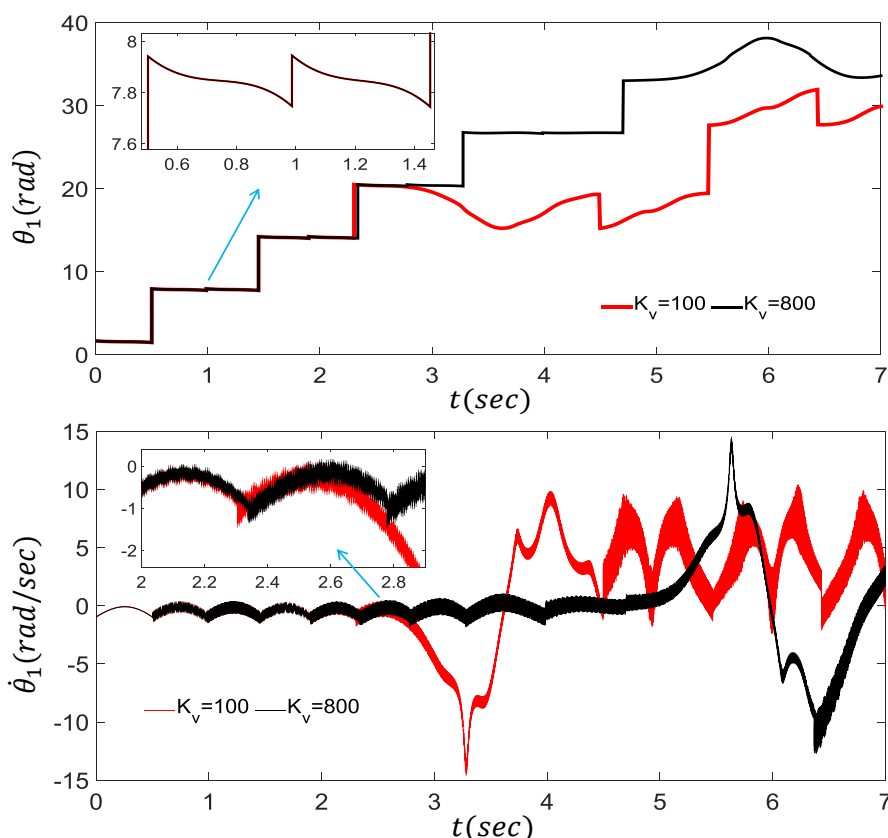
اکنون به سؤال مطرح شده در پاراگراف قبل می‌پردازیم. همان‌گونه که در شکل ۱۰ مشاهده می‌گردد، مختصات مودال

تعمیم‌یافته از مرتبه  $10^{-4}$  است؛ این در حالی است که سرعت مودال تعمیم‌یافته از مرتبه  $10^0$  است. لذا با توجه به دامنه بسیار کوچک مختصات‌های مودال تعمیم‌یافته، عدم مشاهده نوسانات ارتعاشی در نمودار مربوط به موقعیت زاویه‌ای مفاصل (شکل ۸) توجیه‌پذیر می‌نماید. حال آنکه به دلیل دامنه بزرگ‌تر سرعت‌های مودال تعمیم‌یافته، می‌توان به راحتی اثر نوسانات ناشی از انعطاف‌پذیری لینک‌ها را در سرعت زاویه‌ای مفاصل مشاهده نمود (شکل ۹).

در ادامه اثر مربوط به خصوصیات ذاتی لینک‌های تشکیل‌دهنده ربات (مدول الاستیک و ضریب کلوین-ویت) بر روی پایداری سیستم مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

### ۱-۵ اثر ضریب کلوین-ویت بر روی پاسخ سیستم

زمانی که یک لینک الاستیک به ارتعاش درمی‌آید، دامنه ارتعاشات آن به دلایلی همچون اثر درگ هوا و یا حرکت صفحات کریستالی بر روی هم کاهش می‌یابد. همان‌گونه که در بخش ۳ مشاهده گردید، از تابع استهلاک ریلی جهت مدل‌سازی انرژی اتلافی در سیستم استفاده شد (رابطه ۱۱). در این تابع پارامتری تحت عنوان ضریب کلوین-ویت<sup>۱</sup> وجود دارد که با افزایش آن شدت اتلاف انرژی افزایش، و در نتیجه دامنه ارتعاشات لینک‌های الاستیک با سرعت بیشتری کاهش می‌یابد. اکنون به دنبال آن هستیم تا اثر این پارامتر را بر روی پایداری پاسخ سیستم مطالعه نماییم. برای این منظور، موقعیت زاویه‌ای و سرعت زاویه‌ای مفصل اول برای دو مقدار متفاوت ضریب کلوین-ویت ( $K_v = 100$  و  $K_v = 800$ ) در شکل ۱۲ ارائه شده است (لازم به ذکر است برای اجتناب از طولانی شدن مقاله، از ارائه نتایج مربوط به لینک دوم صرف‌نظر شده است).

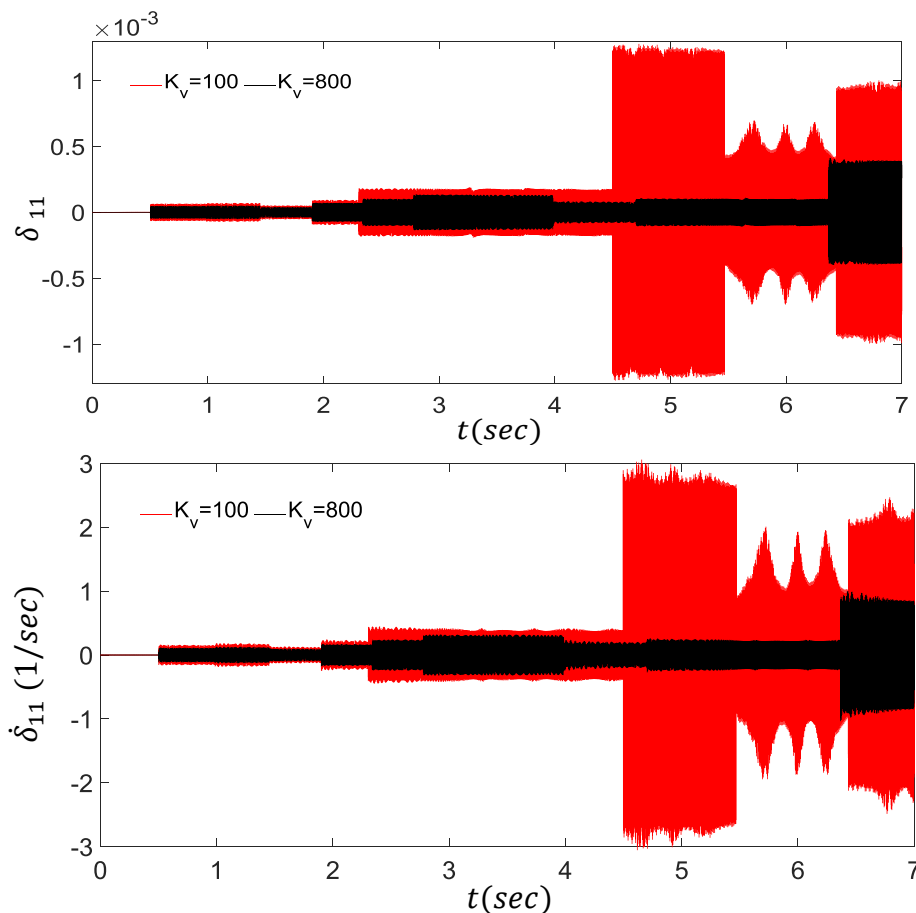


شکل ۱۲ موقعیت زاویه‌ای و سرعت زاویه‌ای مفصل اول برای دو مقدار متفاوت ضریب کلوین-ویت

همان‌گونه که در این شکل مشاهده می‌گردد، با افزایش ضریب کلوین-ویت، پایداری سیستم افزایش می‌یابد. بگونه‌ای که با ضریب  $K_v = 100$  ربات پس از طی پنج قدم واژگون می‌گردد ( $t = 2.3s$ )؛ این در حالی است که با ضریب  $K_v = 800$ ، واژگونی پس از طی نه قدم اتفاق می‌افتد ( $t = 4.7s$ ). برای توجیه چرایی این موضوع، تغییرات مختصات مودال تعمیم‌یافته و نیز سرعت

<sup>۱</sup> Kelvin-Voigt coefficient

مودال تعمیم یافته مربوط به اولین شکل مود از لینک اول در شکل ۱۳ ارائه شده است.



شکل ۱۳ مختصات مودال و سرعت مودال تعمیم یافته اولین شکل مود از لینک اول

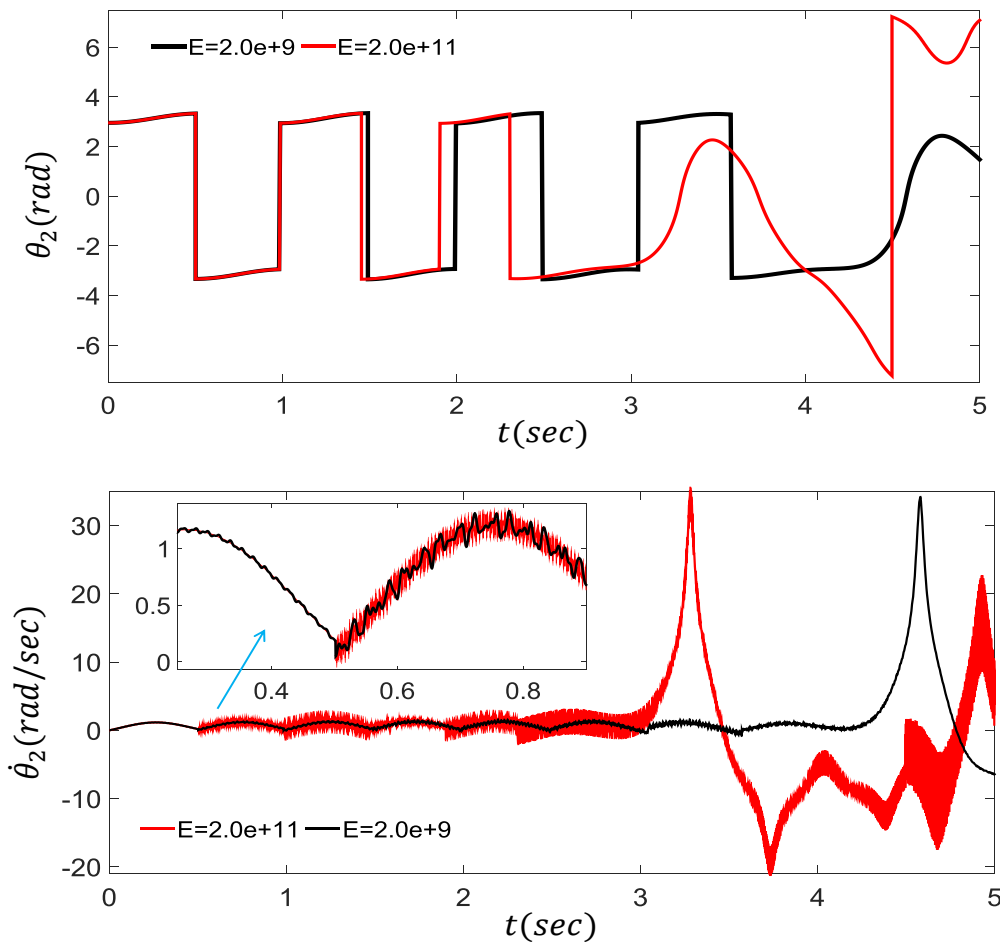
با توجه به این شکل، در پایان هر فاز انتقال، به ناگهان تغییرات شدیدی در مختصات مودال تعمیم یافته و در نتیجه سرعت مودال تعمیم یافته رخ می‌دهد. این امر موجب می‌گردد تا دامنه ارتعاشات ایجاد شده در لینک‌ها پس از طی هر قدم افزایش یابد. به گونه‌ای که سرانجام این ارتعاشات تقارن سیستم را به هم زده و موجب واژگونی ربات می‌گردد. باین وجود، هر چه ضریب کلون-ویت بزرگ‌تر باشد، دامنه ارتعاشات سیستم سریع‌تر کاهش می‌یابد. لذا پایداری سیستم افزایش یافته، به گونه‌ای که ربات تا قبل از واژگونی قدم‌های بیشتری را می‌پیماید. از بحث بالا این نتیجه حاصل می‌گردد که عامل دمپینگ سازه‌ای می‌تواند همچون یک کنترل کننده غیرفعال عمل کند. به عبارت دیگر بدون آنکه هیچ گونه اکچویتوری<sup>۱</sup> در ساختار لینک‌ها بکار گرفته شده باشد، تنها با انتخاب مناسب جنس لینک‌ها می‌توان از افزایش دامنه ارتعاشات سیستم جلوگیری نمود.

## ۲-۵ اثر مدول الاستیسیته بر روی پاسخ سیستم

در این قسمت به بررسی اثر مدول الاستیسیته بر روی پایداری سیستم مورد مطالعه می‌پردازیم. شکل ۱۴ موقعیت زاویه‌ای و سرعت زاویه‌ای را برای دو مقدار متفاوت مدول یانگ ( $E = 2 \times 10^9$  و  $E = 2 \times 10^{11}$ ) نشان می‌دهد. انتظار نویسندگان آن بود که با افزایش ضریب مدول الاستیسیته، پایداری سیستم افزایش یابد. چرا که هرچه سختی لینک‌ها افزایش می‌یابد، انتظار می‌رود تا سیستم رفتاری شبیه به حالتی که در آن لینک‌ها صلب هستند، از خود نشان دهد. اما همان گونه که در شکل ۱۴ مشاهده می‌گردد، زمانی که مدول الاستیسیته  $E = 2 \times 10^9$  است، ربات هفت قدم به صورت پایدار بر می‌دارد. در حالی که با افزایش مدول الاستیسیته به  $E = 2 \times 10^{11}$  ربات تنها پنج گام به صورت پایدار می‌پیماید. اگرچه در اینجا برای اجتناب از پیچیده شدن شکل‌ها، نتایج برای تنها دو مقدار متفاوت از مدول الاستیسیته ارائه شده است، اما با انجام شبیه‌سازی برای مقادیر مختلف

<sup>۱</sup> actuator

مدول الاستیسیته، این نتیجه کلی حاصل شد که با افزایش مدول الاستیسیته پایداری سیستم کاهش می‌یابد.

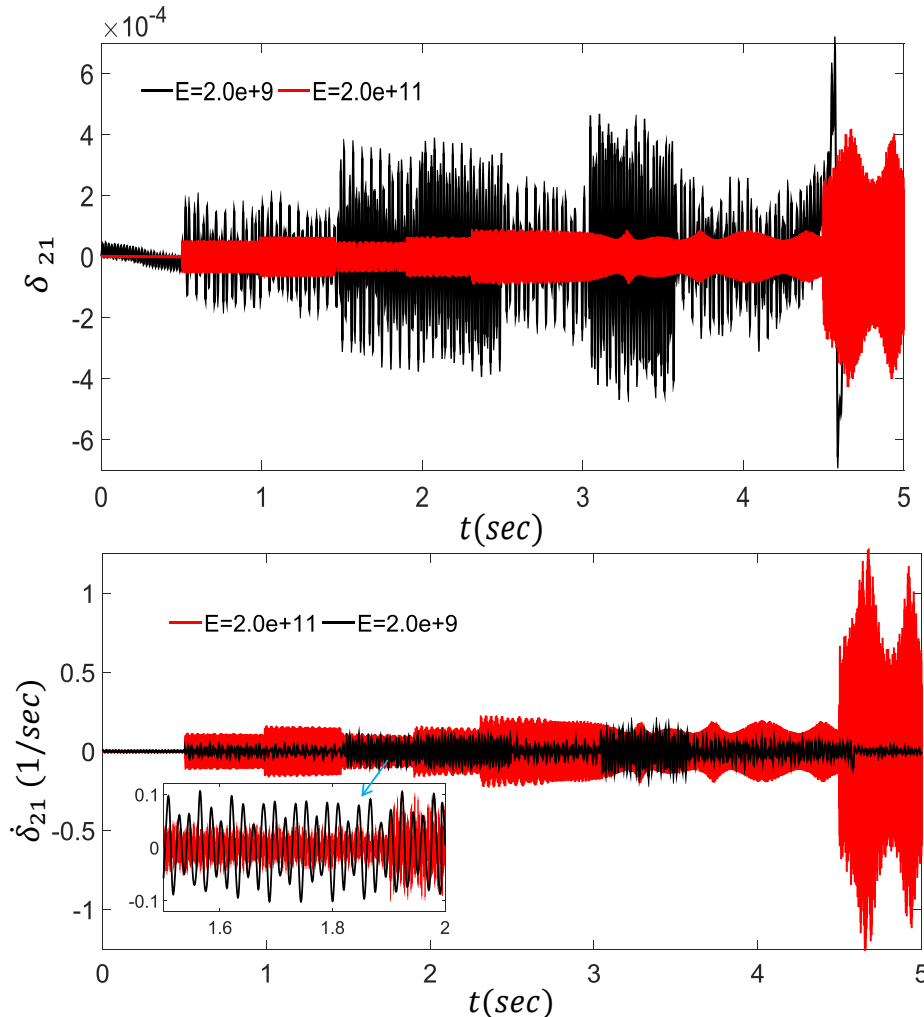


شکل ۱۴ موقعیت زاویه‌ای و سرعت زاویه‌ای مفصل دوم برای دو مقدار متفاوت مدول یانگ

برای توجیه چرایی این موضوع، اولین مختصات مودال تعمیم‌یافته و نیز اولین سرعت مودال تعمیم‌یافته از لینک دوم در شکل ۱۵ رسم شده است (در اینجا نیز برای اجتناب از طولانی شدن مقاله از ارائه نتایج مربوط به لینک اول صرف نظر شده است). همان‌گونه که در این شکل مشاهده می‌گردد، با افزایش مدول الاستیسیته، سختی سیستم و در نتیجه فرکانس ارتعاشات افزایش، ولی دامنه ارتعاشات کاهش می‌یابد. با این حال سرعت مختصات‌های مودال تعمیم‌یافته با افزایش سختی سیستم، افزایش می‌یابد. این امر موجب می‌گردد تا سرعت زاویه‌ای مفاصل نیز دستخوش تغییرات شدیدی گردد. برای سیستم رباتیکی مورد مطالعه که به شدت نسبت به تغییر در شرایط اولیه در شروع هر قدم حساس است، این تغییرات یک عامل بسیار مهم در برهم زدن وضعیت تعادلی آن محسوب می‌گردد. در واقع همین امر در نهایت به واژگونی ربات می‌انجامد.

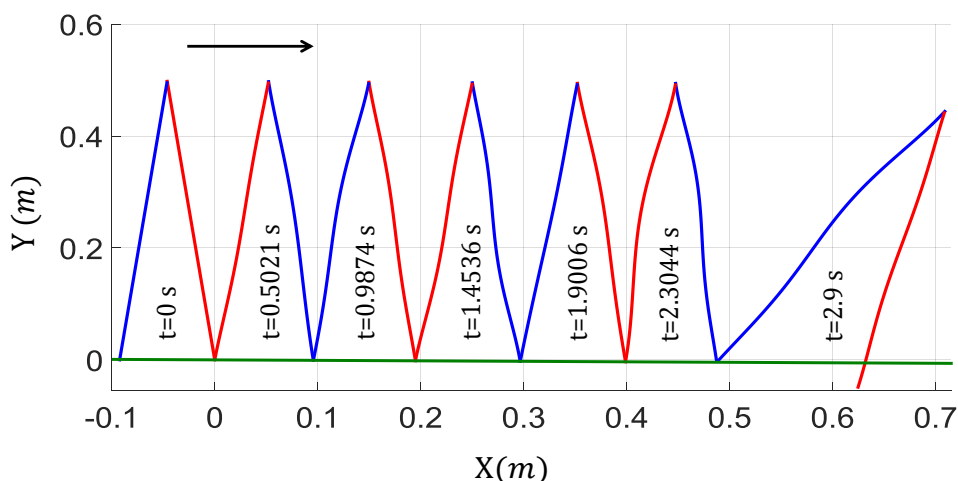
در پایان پیکربندی ربات برای حالتی که مدول الاستیسیته  $E = 2 \times 10^{11}$  است، رسم شده است. همان‌گونه که پیشتر نیز خاطرنشان شد، مرتبه مختصات‌های مودال تعمیم‌یافته (تغییر فرم‌های کوچک) بسیار کوچک‌تر از مرتبه موقعیت زاویه‌ای مفاصل (حرکت‌های بزرگ) است. لذا اگر پیکربندی ربات با مقادیر واقعی به دست آمده از شبیه‌سازی عددی رسم گردد، تغییر فرم‌های الاستیک در آن مشاهده نخواهد شد. به همین دلیل در رسم شکل ۱۶ مقادیر مختصات‌های مودال تعمیم‌یافته بیست برابر شده‌اند. با بزرگ‌نمایی صورت گرفته، به راحتی تغییر فرم‌های الاستیک در لینک‌های ربات مشاهده می‌گردد. البته در قدم اول، تا پیش از برخورد پای در حال نوسان با سطح شیب‌دار، به دلیل عدم تحریک مودهای ارتعاشی، هیچ‌گونه تغییر فرم الاستیکی در لینک‌های ربات دیده نمی‌شود. اما در گام‌های بعدی، در اثر برخورد پای در حال نوسان با سطح شیب‌دار، و متعاقباً اعمال نیروی ضربه‌ای

به این پا، سیستم دستخوش ارتعاش شده که نتیجه آن توسط تغییر فرم‌های الاستیک ایجاد شده در لینک‌های تشکیل‌دهنده سیستم به راحتی قابل مشاهده است. از طرفی با توجه به شکل ۱۶ این نتیجه حاصل می‌گردد که هر چه ربات گام‌های بیشتری را بپیماید، دامنه این تغییر فرم‌ها افزایش می‌یابد. دلیل این امر تجمیع ارتعاشات از قدم‌های قبل است؛ تا آنجا که در قدم ششم سیستم پایداری خود را از دست داده و سرانجام واژگون می‌گردد.



شکل ۱۵ مختصات مودال و سرعت مودال تعمیم‌یافته اولین شکل مودال از لینک دوم

در پایان پیکربندی ربات برای حالتی که مدول الاستیسیته  $E = 2 \times 10^{11}$  است، رسم شده است. همان‌گونه که پیشتر نیز خاطرنشان شد، مرتبه مختصات‌های مودال تعمیم‌یافته (تغییر فرم‌های کوچک) بسیار کوچک‌تر از مرتبه موقعیت زاویه‌ای مفاصل (حرکت‌های بزرگ) است. لذا اگر پیکربندی ربات با مقادیر واقعی به دست آمده از شبیه‌سازی عددی رسم گردد، تغییر فرم‌های الاستیک در آن مشاهده نخواهد شد. به همین دلیل در رسم شکل ۱۶ مقادیر مختصات‌های مودال تعمیم‌یافته بیست برابر شده‌اند. با بزرگ‌نمایی صورت گرفته، به راحتی تغییر فرم‌های الاستیک در لینک‌های ربات مشاهده می‌گردد. البته در قدم اول، تا پیش از برخورد پای در حال نوسان با سطح شیب‌دار، به دلیل عدم تحریک مودهای ارتعاشی، هیچ‌گونه تغییر فرم الاستیکی در لینک‌های ربات دیده نمی‌شود. اما در گام‌های بعدی، در اثر برخورد پای در حال نوسان با سطح شیب‌دار، و متعاقباً اعمال نیروی ضربه‌ای به این پا، سیستم دستخوش ارتعاش شده که نتیجه آن توسط تغییر فرم‌های الاستیک ایجاد شده در لینک‌های تشکیل‌دهنده سیستم به راحتی قابل مشاهده است. از طرفی با توجه به شکل ۱۶ این نتیجه حاصل می‌گردد که هر چه ربات گام‌های بیشتری را بپیماید، دامنه این تغییر فرم‌ها افزایش می‌یابد. دلیل این امر تجمیع ارتعاشات از قدم‌های قبل است؛ تا آنجا که در قدم ششم سیستم پایداری خود را از دست داده و سرانجام واژگون می‌گردد.



شکل ۱۶ پیکربندی ربات الاستیک در گذر از یک سطح شیب‌دار با زاویه شیب  $\alpha = 0.5 \text{ deg}$

## ۶- نتیجه‌گیری

در این تحقیق، آنالیز حرکت خودران ربات‌های دوپا متشکل از  $n$  لینک انعطاف‌پذیر بر روی سطوح شیب‌دار مورد مطالعه قرار گرفت. از چالش‌های پیشروی این تحقیق می‌توان به معادلات دینامیکی به شدت غیرخطی سیستم مورد مطالعه در هر دو فاز نوسان و انتقال، بالا بودن درجات آزادی سیستم به دلیل در نظر گرفتن حرکت‌های بزرگ و تغییر فرم‌های کوچک سیستم به‌طور هم‌زمان، و پیچیدگی مدل‌سازی ارتعاشی سیستم به دلیل استفاده از روش دقیق‌تر مودهای فرضی نسبت به دیگر روش‌ها اشاره نمود. باین حال تمامی این موارد به شیوه‌ای کاملاً نظام‌مند در قالب روابطی با چارچوب بسیار محکم ریاضیاتی و نیز ارائه شکل‌های گرافیکی پاسخ داده شدند.

اما مهم‌ترین هدف این مقاله ارائه یک روش سیستماتیک جهت به‌دست آوردن شرایط اولیه مناسب جهت حرکت خودران ربات دوپای انعطاف‌پذیر بر روی سطوح شیب‌دار با استفاده از معادلات دینامیکی سیستم بود. در این راستا، ابتدا معادلات حاکم بر دینامیک سیستم در فاز نوسان حول نقطه تعادل خطی سازی شد. سپس با یافتن ارتباط میان مختصات‌ها و سرعت‌های تعمیم‌یافته در قدم جدید برحسب مقادیر متناظر آن در قدم قدیم، به یک مسئله مقدار ویژه رسیدیم که حل آن، شرایط اولیه مناسب جهت حرکت خودران ربات‌های انعطاف‌پذیر را نتیجه می‌دهد. شبیه‌سازی‌های صورت گرفته برای رباتی با دو لینک انعطاف‌پذیر نشان داد که با رها کردن ربات از شرایط اولیه به‌دست‌آمده، سیستم می‌تواند چند گام را با حفظ تعادل به‌صورت خودران طی کند. در ادامه تأثیر استفاده از لینک‌های ویسکوالاستیک در پایداری حرکت ربات‌های دوپا خودران مورد مطالعه قرار گرفت. در آنجا دیدیم که چگونه ارتعاشات پدید آمده در اثر برخورد پای در حال نوسان به سطح شیب‌دار، موجب می‌گردد تا ربات انعطاف‌پذیر نسبت به ربات صلب پایداری کمتری داشته باشد. همچنین این نتیجه ارزشمند حاصل شد که افزایش ضریب کلونین-ویت در لینک‌های انعطاف‌پذیر موجب افزایش پایداری حرکت ربات می‌شود. لذا می‌توان با انتخاب لینک‌های ویسکوالاستیک با میرایی مناسب، ضمن داشتن حرکتی نرم، پایداری حرکت ربات‌های خودران را افزایش داد. از طرفی افزایش مدول الاستیسیته لینک‌های ویسکوالاستیک، اگرچه موجب کاهش دامنه ارتعاشات لینک‌ها می‌گردد؛ اما به دلیل افزایش سرعت ارتعاشات، موجب کاهش پایداری حرکت ربات می‌شود.

اگرچه روش ارائه شده در این مقاله برای سیستمی متشکل از  $n$  لینک الاستیک استخراج گردید، ولی به دلیل ماهیت به‌شدت ناپایدار سیستم مورد مطالعه، حرکت خودران تنها در حالتی که سیستم تنها از دو لینک تشکیل شده باشد، محقق گردید. البته این به این معنا نیست که استخراج معادلات برای حالت کلی فاقد ارزش است. چرا که روش ارائه شده در این مقاله جهت تعیین شرایط اولیه مناسب جهت حرکت خودران سیستم، دقیقاً منطبق بر رفتار طبیعی سیستم است که از معادلات دینامیکی به‌دست‌آمده است. لذا اگر روش فوق با طراحی کنترلر همراه گردد، می‌تواند برای ربات‌های دو پایی متشکل از تعداد بیشتری

لینک الاستیک مورد استفاده قرار گیرد. همچنین در اینجا انعطاف‌پذیری لینک‌ها با استفاده از شکل مودهایی با شرایط مرزی گیردار-گیردار مدل‌سازی گردید. می‌توان اثر دیگر شکل مودها همچون گیردار-آزاد را بر روی پایداری حرکت سیستم مورد مطالعه قرار داد. این‌ها مواردی هستند که نویسندگان در کارهای آینده خویش به دنبال پاسخ به آن‌ها هستند.

## ۷- مراجع

- [1] Kerimoğlu D, Morgül Ö, Saranlı U. Stability and control of planar compass gait walking with series-elastic ankle actuation. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*. 2017; 39(3); 312-323.
- [2] Iida F, Minekawa Y, Rummel J, Seyfarth A. Toward a human-like biped robot with compliant legs. *Robotics and Autonomous Systems*. 2009; 57:139-144.
- [3] Zelik KE, Huang TWP, Adamczyk PG, Kou AD. The role of series ankle elasticity in bipedal walking. *Journal of Theoretical Biology*. 2014; 346:75-85.
- [4] Deng K, Zhao M, Xu W. Level-ground walking for a bipedal robot with a torso via hip series elastic actuators and its gait bifurcation control. *Robot Auton Syst*. 2016; 79:58-71.
- [5] Wu Y, Yao D, Xiao X. The effects of ground compliance on flexible planar passive biped dynamic walking. *Journal of Mechanical Science and Technology*. 2018; 32:1793-1804.
- [6] Fathizadeh M, Mohammadi H, Taghvaei S. A modified passive walking biped model with two feasible switching patterns of motion to resemble multi-pattern human walking. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2019; 127:83-95.
- [7] Kino H, Sakata K, Uemura M, Mori N. Simulation verification for the robustness of passive compass gait with a joint stiffness adjustment. *Advanced Robotics*. 2019; 33:1129-1143.
- [8] Tokhi M. M. O, Azad A. *Flexible Robot Manipulators: Modelling, Simulation and Control*. Second edition; IET, 2017.
- [9] Hastings G, Book W. Verification of a linear dynamic model for flexible robotic manipulators. *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation, IEEE*, 1986.
- [10] Chen B, Huang J, Ji JC. Control of flexible single-link manipulators having Duffing oscillator dynamics. *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2019; 121:44-57.
- [11] Khairudin M, Mohamed Z, Husain AR, Mamat R. Dynamic characterization of a two-link flexible manipulator: theory and experiments. *Advances in robotics research*. 2014; 1:61-79.
- [12] Garcia-Perez OA, Silva-Navarro G, Peza-Solis JF. Flexible-link robots with combined trajectory tracking and vibration control. *Applied Mathematical Modelling*. 2019; 70:285-298.
- [13] Qiu Z, Li C, Zhang X. Experimental study on active vibration control for a kind of two-link flexible manipulator. *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2019; 11:623-644.
- [14] Morlock M, Meyer N, Pick M. Robert Seifried, Real-time trajectory tracking control of a parallel robot with flexible links. *Mechanism and Machine Theory*. 2021; 158:104220.
- [15] Shang D, Li X, Yin M, Li F. Dynamic modeling and fuzzy compensation sliding mode control for flexible manipulator servo system. *Applied Mathematical Modelling*. 2022; 107:30-556.
- [16] Li F, Zhang Z, Wu Y, Chen Y, Liu K, Yao J. Improved fuzzy sliding mode control in flexible manipulator actuated by PMAs. *Robotica*. 2022; 40:2683-2696.
- [17] Korayem MH, Shafei AM. A new approach for dynamic modeling of n-viscoelastic-link robotic manipulators mounted on a mobile base. *Nonlinear Dynamics*. 2015; 79:2767-2786.
- [18] Patil O, Gandhi P. On the dynamics and multiple equilibria of an inverted flexible pendulum with tip mass on a cart. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*. 2014; 136:041017.
- [19] Peng Y, Liu J, He W. Boundary control for a flexible inverted pendulum system based on a PDE model. *Asian Journal of Control*. 2018; 20:12-21.
- [20] Shen Y, Kuang Y. Transient contact-impact behavior for passive walking of compliant bipedal robots. *Extreme Mechanics Letters*. 2021; 42:101076.
- [21] Safartoobi M, Dardel M, Mohammadi Daniali H. Gait cycles of passive walking biped robot model with flexible legs. *Mechanism and Machine Theory*. 2021; 159:104292.

- [22] Safartoobi M, Dardel M, Mohammadi Daniali H. Passive walking biped robot model with flexible viscoelastic legs. *Nonlinear Dynamics*. 2022; 109:2615–2636.
- [23] Shin HC, Choi SB. Position control of a two-link flexible manipulator featuring piezoelectric actuators and sensors. *Mechatronics*. 2001; 11:707–729.
- [24] Tang LW, Gouttefarde M, Sun HN, Yin LR, Zhou CJ. Dynamic modelling and vibration suppression of a single-link flexible manipulator with two cables. *Mechanism and Machine Theory*. 2021; 162:104347.
- [25] Li D, Zu J, Goldenberg A. Dynamic modeling and mode analysis of flexible-link flexible-joint robots. *Mechanism and Machine Theory*. 1998; 33:1031–1044.
- [26] Wei J, Cao D, Liu L, Huang W. Global mode method for dynamic modeling of a flexible-link flexible-joint manipulator with tip mass. *Applied Mathematical Modelling*. 2017; 48:787–805.
- [27] Mattioni A, Wu Y, Le Gorrec Y. Infinite dimensional model of a double flexible-link manipulator: The Port-Hamiltonian approach. *Applied Mathematical Modelling*. 2020; 83:59-75.
- [28] Khalil W, Boyer F, Morsli F. General Dynamic Algorithm for Floating Base Tree Structure Robots with Flexible Joints and Links. *Journal of Mechanisms and Robotics*. 2017; 9:031003.
- [29] Mata V, Provenzano S, Cuadrado JI, Valero F. Serial-robot dynamics algorithms for moderately large number large number of joints. *Mechanism and Machine Theory*. 2002; 37:739–755.
- [30] Korayem MH, Shafei AM. Application of recursive Gibbs–Appell formulation in deriving the equations of motion of N-viscoelastic robotic manipulators in 3D space using Timoshenko beam theory. *Acta Astronautica*. 2013; 83:273-294.
- [31] Korayem MH, Shafei AM, Doosthoseini M, Absalan F, Kadkhodaei B. Theoretical and experimental investigation of viscoelastic serial robotic manipulators with motors at the joints using Timoshenko beam theory and Gibbs–Appell formulation. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part K: Journal of Multi-body Dynamics*. 2016; 230:37-51.
- [32] Shafei AM, Korayem MH. Theoretical and experimental study of dynamic load- carrying capacity for flexible robotic arms in point- to- point motion. *Optimal Control Applications and Methods*. 2017 38:963-972.
- [33] Rezaei V, Shafei AM. Dynamic Analysis of Flexible Robotic Manipulators Constructed of Functionally Graded Materials. *Iranian Journal of Science and Technology. Transactions of Mechanical Engineering*. 2019; 43:327-342.
- [34] Korayem MH, Dehkordi SF. Motion equations of cooperative multi flexible mobile manipulator via recursive Gibbs–Appell formulation. *Applied Mathematical Modelling*. 2019; 65:443-463.
- [35] Kim J, Choi CH, Spong MW. Passive dynamic walking with symmetric fixed flat feet, *International conference on control and automation, Guangzhou, China, 2007*.
- [36] Obayashi I, Aoi S, Tsuchiya K, Kokubu H. Common formation mechanism of basin of attraction for bipedal walking models by saddle hyperbolicity and hybrid dynamics. *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*. 2015; 32:315–332.
- [37] Obayashi I, Aoi S, Tsuchiya K, Kokubu H. Formation mechanism of a basin of attraction for passive dynamic walking induced by intrinsic hyperbolicity. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 2016; 472:1–19.
- [38] Gritli H, Khraeif N, Belghith S. Period-three route to chaos induced by a cyclic-fold bifurcation in passive dynamic walking of a compass-gait biped robot. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2012; 17:4356–72.
- [39] Dardel M, Safartoobi M, Pashaei MH, Ghasemi MH, Navaei MK. Finite difference method to find period-one gait cycles of simple passive walkers. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2015; 20:79–97.

پیوست (الف):

پارامترهای ظاهر شده در معادله ۸ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned}
 B_{0i} &= \int_0^{l_i} \mu_i(\eta_i) d\eta_i & {}^i \bar{B}_{1i}(t) &= \sum_{j=1}^m \ddot{\delta}_{ij}(t) \bar{C}_{1ij} \\
 B_{2i}(t) &= \sum_{j=1}^m \dot{\delta}_{ij}(t) \tilde{C}_{1ij} & B_{3i}(t) &= C_{2i} + \sum_{j=1}^m \delta_{ij}(t) \tilde{C}_{1ij} \\
 B_{4i}(t) &= \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \ddot{\delta}_{ij}(t) \ddot{\delta}_{ik}(t) C_{3ijk} & {}^i \bar{B}_{5i}(t) &= \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \ddot{\delta}_{ij}(t) \ddot{\delta}_{ik}(t) \bar{C}_{4ijk} \\
 {}^i \bar{B}_{6i}(t) &= \sum_{j=1}^m \ddot{\delta}_{ij}(t) \bar{\alpha}_{ij} & B_{7i}(t) &= \sum_{j=1}^m \ddot{\delta}_{ij}(t) \beta_{ij} \\
 B_{8i}(t) &= \sum_{j=1}^m \dot{\delta}_{ij}(t) \beta_{ij} & B_{9i}(t) &= C_{5i} + \sum_{j=1}^m \delta_{ij}(t) (C_{6ij}^T + \beta_{ij}) \\
 B_{10i}(t) &= \int_0^{l_i} I_i(\eta_i) d\eta_i & &
 \end{aligned} \tag{A1-A11}$$

که ثوابت ظاهر شده در روابط فوق عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned}
 \bar{C}_{1ij} &= \int_0^{l_i} \mu_i(\eta_i) \bar{r}_{ij}(\eta_i) d\eta_i & C_{2i} &= \int_0^{l_i} \mu_i(\eta_i) \tilde{\eta}_i(\eta_i) d\eta_i \\
 C_{3ijk} &= \int_0^{l_i} \mu_i(\eta_i) \bar{r}_{ij}^T(\eta_i) \cdot \bar{r}_{ik}(\eta_i) d\eta_i & \bar{C}_{4ijk} &= \int_0^{l_i} \mu_i(\eta_i) \tilde{r}_{ij}(\eta_i) \tilde{r}_{ik}(\eta_i) d\eta_i \\
 C_{5i} &= \int_0^{l_i} \mu_i(\eta_i) \tilde{\eta}_i^T(\eta_i) \tilde{\eta}_i(\eta_i) d\eta_i & C_{6ij} &= \int_0^{l_i} \mu_i(\eta_i) \tilde{\eta}_i^T(\eta_i) \tilde{r}_{ij}(\eta_i) d\eta_i \\
 \bar{C}_{7ij} &= \int_0^{l_i} \mu_i(\eta_i) \tilde{\eta}_i(\eta_i) \bar{r}_{ij}(\eta_i) d\eta_i & C_{8ijk} &= \int_0^{l_i} \mu_i(\eta_i) \tilde{r}_{ij}^T(\eta_i) \tilde{r}_{ik}(\eta_i) d\eta_i \\
 \bar{\alpha}_{ij}(t) &= \bar{C}_{7ij} + \sum_{k=1}^m \delta_{ik}(t) \bar{C}_{4ikj} & \beta_{ij}(t) &= C_{6ij} + \sum_{k=1}^m \delta_{ik}(t) C_{8ikj}
 \end{aligned} \tag{A12-A21}$$

پیوست (ب):

مشتقات جزئی ظاهر شده در رابطه ۱۴ عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial S}{\partial \theta_j} &= \sum_{i=j+1}^n \frac{\partial^i \dot{v}_{O_i}^T}{\partial \theta_j} \cdot (B_{0i} {}^i \dot{v}_{O_i} + {}^i \bar{B}_{1i} - 2B_{2i} {}^i \bar{\omega}_i - B_{3i} {}^i \dot{\omega}_i - {}^i \bar{\omega}_i B_{3i} {}^i \bar{\omega}_i) \\
 &+ \sum_{i=j}^n \frac{\partial^i \dot{\omega}_i^T}{\partial \theta_j} \cdot (B_{3i} {}^i \dot{v}_{O_i} + {}^i \bar{B}_{6i} + 2B_{8i} {}^i \bar{\omega}_i + (B_{9i} + B_{10i}) {}^i \dot{\omega}_i + {}^i \bar{\omega}_i (B_{9i} + B_{10i}) {}^i \bar{\omega}_i)
 \end{aligned} \tag{B1}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial S}{\partial \ddot{\delta}_{jf}} &= \sum_{i=j+1}^n \frac{\partial^i \dot{v}_{O_i}^T}{\partial \ddot{\delta}_{jf}} \cdot (B_{0i} {}^i \dot{v}_{O_i} + {}^i \bar{B}_{1i} - 2B_{2i} {}^i \bar{\omega}_i - B_{3i} {}^i \dot{\omega}_i - {}^i \bar{\omega}_i B_{3i} {}^i \bar{\omega}_i) \\
 &+ \sum_{i=j+1}^n \frac{\partial^i \dot{\omega}_i^T}{\partial \ddot{\delta}_{jf}} \cdot (B_{3i} {}^i \dot{v}_{O_i} + {}^i \bar{B}_{6i} + 2B_{8i} {}^i \bar{\omega}_i + (B_{9i} + B_{10i}) {}^i \dot{\omega}_i + {}^i \bar{\omega}_i (B_{9i} + B_{10i}) {}^i \bar{\omega}_i) \\
 &+ \sum_{k=1}^m \ddot{\delta}_{jk} C_{3jfk} - 2 {}^j \bar{\omega}_j^T \cdot \sum_{k=1}^m \dot{\delta}_{jk} \bar{C}_{4jfk} - {}^j \bar{\omega}_j^T \cdot \beta_{jf} {}^j \bar{\omega}_j + {}^j \dot{v}_{O_j}^T \cdot \bar{C}_{1jf} + {}^j \dot{\omega}_j^T \cdot \bar{\alpha}_{jf}
 \end{aligned} \tag{B2}$$

$$\frac{\partial D}{\partial \theta_j} = 0 \tag{B3}$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\delta}_{jf}} = \sum_{k=1}^m \dot{\delta}_{jk} K_{jkf} \tag{B4}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta_j} = 0 \tag{B5}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \delta_{jf}} = \sum_{k=1}^m \delta_{jk} K_{jkf} \tag{B6}$$

پیوست (پ):

اعداد ظاهر شده در ماتریس اینرسی و بردار سمت راست معادلات حرکت در فاز نوسان (به ترتیب شکل‌های ۲ و ۳) عبارت‌اند از:

$1 := {}^j \bar{z}_j^T \cdot {}^j \sigma_k^k \bar{z}_k$ $4 := {}^j \bar{z}_j^T \cdot {}^j \sigma_{k^+} \Delta \bar{\varphi}_{kt}$ $7 := {}^j \bar{z}_j^T \cdot {}^j \gamma_k \bar{r}_{kt}(l_k)$ $10 := {}^j \bar{z}_j^T \cdot {}^j R_k \bar{\alpha}_{kt}$ $13 := -\Delta \bar{\varphi}_{jf}^T \cdot {}^{j^+} U_k^k \bar{z}_k$ $16 := -\bar{C}_{1jf}^T \cdot {}^j W_k^k \bar{z}_k$ $19 := -\Delta \bar{\varphi}_{jf}^T \cdot {}^{j^+} \psi_{k^+} \Delta \bar{\varphi}_{kt}$ $22 := -\bar{r}_{jf}^T(l_j) \cdot {}^{j^+} \xi_k^k \Delta \bar{\varphi}_{kt}$ $25 := C_{3jft}$ $28 := \bar{r}_{jf}^T(l_j) \cdot {}^j \lambda_k \bar{r}_{kt}(l_k)$ $31 := \Delta \bar{\varphi}_{jf}^T \cdot {}^j \tilde{r}_{O_k/O_{j+1}} \cdot {}^j R_k \bar{C}_{1kt}$ $34 := \sum_{i=j}^n -\frac{\partial^i \dot{\omega}_i^T}{\partial \dot{\theta}_j} \cdot {}^i \bar{T}_i$ $37 := \sum_{i=j}^n -\frac{\partial^i \dot{\omega}_i^T}{\partial \dot{\delta}_{jf}} \cdot {}^i \bar{T}_i$	$2 := -{}^j \bar{z}_j^T \cdot {}^j \psi_k^k \bar{z}_k$ $5 := -{}^j \bar{z}_j^T \cdot {}^j \psi_{k^+} \Delta \bar{\varphi}_{kt}$ $8 := -{}^j \bar{z}_j^T \cdot {}^j U_{k^+} \Delta \bar{\varphi}_{kt}$ $11 := \Delta \bar{\varphi}_{jf}^T \cdot {}^{j^+} \sigma_k^k \bar{z}_k$ $14 := -\bar{r}_{jf}^T(l_j) \cdot {}^{j^+} \xi_k^k \bar{z}_k$ $17 := \bar{\alpha}_{jf}^T \cdot {}^j R_k^k \bar{z}_k$ $20 := -\Delta \bar{\varphi}_{jf}^T \cdot {}^{j^+} U_{k^+} \Delta \bar{\varphi}_{kt}$ $23 := -\bar{C}_{1jf}^T \cdot {}^j W_{k^+} \Delta \bar{\varphi}_{kt}$ $26 := \Delta \bar{\varphi}_{jf}^T \cdot {}^{j^+} \gamma_k \bar{r}_{kt}(l_k)$ $29 := \bar{C}_{1jf}^T \cdot {}^j R_k \bar{r}_{kt}(l_k)$ $32 := \Delta \bar{\varphi}_{jf}^T \cdot {}^j R_k \bar{\alpha}_{kt}$ $35 := Q_{jf}$	$3 := -{}^j \bar{z}_j^T \cdot {}^j U_k^k \bar{z}_k$ $6 := {}^j \bar{z}_j^T \cdot {}^j \xi_{k^+} \bar{r}_{kt}(l_k)$ $9 := {}^j \bar{z}_j^T \cdot {}^j \tilde{r}_{O_k/O_j} \cdot {}^j R_k \bar{C}_{1kt}$ $12 := -\Delta \bar{\varphi}_{jf}^T \cdot {}^{j^+} \psi_k^k \bar{z}_k$ $15 := -\bar{r}_{jf}^T(l_j) \cdot {}^j V_k^k \bar{z}_k$ $18 := \Delta \bar{\varphi}_{jf}^T \cdot {}^{j^+} \sigma_{k^+} \Delta \bar{\varphi}_{kt}$ $21 := -\bar{r}_{jf}^T(l_j) \cdot {}^j V_{k^+} \Delta \bar{\varphi}_{kt}$ $24 := \bar{\alpha}_{jf}^T \cdot {}^j R_k \Delta \bar{\varphi}_{kt}$ $27 := \Delta \bar{\varphi}_{jf}^T \cdot {}^{j^+} \xi_{k^+} \bar{r}_{kt}(l_k)$ $30 := \bar{r}_{jf}^T(l_j) \cdot {}^j R_k \bar{C}_{1kt}$ $33 := \sum_{i=j+1}^n -\frac{\partial^i \dot{v}_{O_i}^T}{\partial \dot{\theta}_j} \cdot {}^i \bar{S}_i$ $36 := \sum_{i=j+1}^n -\frac{\partial^i \dot{v}_{O_i}^T}{\partial \dot{\delta}_{jf}} \cdot {}^i \bar{S}_i$
---	---	---

(C1-C37)

که ثوابت ظاهر شده در روابط فوق عبارت‌اند از:

${}^j \sigma_k = \sum_{i=\max(k,j)}^n {}^j R_i (B_{9i} + B_{10i}) {}^i R_k$ ${}^{j^+} \sigma_k = \sum_{i=\max(k,j+1)}^n {}^j R_i (B_{9i} + B_{10i}) {}^i R_k$ ${}^j \psi_k = \sum_{i=\max(k,j+1)}^n {}^j \tilde{r}_{O_i/O_j} \cdot {}^j R_i B_{3i} {}^i R_k$ ${}^{j^+} \psi_k = \sum_{i=\max(k,j+2)}^n {}^j \tilde{r}_{O_i/O_{j+1}} \cdot {}^j R_i B_{3i} {}^i R_k$ ${}^j U_k = \sum_{t=k}^{n-1} ({}^j \gamma_t + {}^j \xi_{t^+}) {}^t \tilde{r}_{O_{t+1}/O_t} {}^t R_k$ ${}^{j^+} U_k = \sum_{t=k}^{n-1} ({}^{j^+} \gamma_t + {}^{j^+} \xi_{t^+}) {}^t \tilde{r}_{O_{t+1}/O_t} {}^t R_k$	${}^j \sigma_{k^+} = \sum_{i=\max(k+1,j)}^n {}^j R_i (B_{9i} + B_{10i}) {}^i R_k$ ${}^{j^+} \sigma_{k^+} = \sum_{i=\max(k+1,j+1)}^n {}^j R_i (B_{9i} + B_{10i}) {}^i R_k$ ${}^j \psi_{k^+} = \sum_{i=\max(k+1,j+1)}^n {}^j \tilde{r}_{O_i/O_j} \cdot {}^j R_i B_{3i} {}^i R_k$ ${}^{j^+} \psi_{k^+} = \sum_{i=\max(k+1,j+2)}^n {}^j \tilde{r}_{O_i/O_{j+1}} \cdot {}^j R_i B_{3i} {}^i R_k$ ${}^j U_{k^+} = \sum_{t=k+1}^{n-1} ({}^j \gamma_t + {}^j \xi_{t^+}) {}^t \tilde{r}_{O_{t+1}/O_t} {}^t R_k$ ${}^{j^+} U_{k^+} = \sum_{t=k+1}^{n-1} ({}^{j^+} \gamma_t + {}^{j^+} \xi_{t^+}) {}^t \tilde{r}_{O_{t+1}/O_t} {}^t R_k$
---	---

$$\begin{aligned}
 {}^j\xi_{k^+} &= \sum_{i=\max(k+1,j)}^n {}^jR_i B_{3i} {}^iR_k & {}^j\xi_k &= \sum_{i=\max(k,j+1)}^n {}^jR_i B_{3i} {}^iR_k \\
 {}^j\xi_{k^+}^+ &= \sum_{i=\max(k+1,j+1)}^n {}^jR_i B_{3i} {}^iR_k & {}^j\gamma_k &= \sum_{i=\max(k+1,j+1)}^n {}^j\tilde{r}_{O_i/O_{j+1}} B_{0i} {}^jR_k \\
 {}^j\gamma_k &= \sum_{i=\max(k+1,j+2)}^n {}^j\tilde{r}_{O_i/O_{j+1}} B_{0i} {}^jR_k & {}^jV_k &= \sum_{t=k}^{n-1} {}^j\lambda_t {}^t\tilde{r}_{O_{t+1}/O_t} {}^tR_k \\
 {}^jV_{k^+} &= \sum_{t=k+1}^{n-1} {}^j\lambda_t {}^t\tilde{r}_{O_{t+1}/O_t} {}^tR_k & {}^jW_k &= \sum_{t=k}^{j-1} {}^jR_t {}^t\tilde{r}_{O_{t+1}/O_t} {}^tR_k \\
 {}^jW_{k^+} &= \sum_{t=k+1}^{j-1} {}^jR_t {}^t\tilde{r}_{O_{t+1}/O_t} {}^tR_k & {}^j\lambda_k &= \sum_{i=\max(k+1,j+1)}^n B_{0i} {}^jR_k \\
 \frac{\partial {}^i\dot{\tilde{v}}_{O_i}}{\partial \ddot{\theta}_j} &= {}^iR_j {}^j\tilde{z}_j \times {}^i\tilde{r}_{O_i/O_j} & \frac{\partial {}^i\dot{\tilde{\omega}}_i}{\partial \ddot{\theta}_j} &= {}^iR_j {}^j\tilde{z}_j \\
 \frac{\partial {}^i\dot{\tilde{v}}_{O_i}}{\partial \ddot{\delta}_{jf}} &= {}^iR_j \tilde{r}_{jf}(l_j) + {}^iR_j \Delta \tilde{\varphi}_{jf} \times {}^i\tilde{r}_{O_i/O_{j+1}} & \frac{\partial {}^i\dot{\tilde{\omega}}_i}{\partial \ddot{\delta}_{jf}} &= {}^iR_j \Delta \tilde{\varphi}_{jf} \\
 {}^i\tilde{S}_i &= B_{0i} {}^i\dot{\tilde{v}}_{O_i}' - 2B_{2i} {}^i\tilde{\omega}_i - B_{3i} {}^i\dot{\tilde{\omega}}_i - {}^i\tilde{\omega}_i B_{3i} {}^i\tilde{\omega}_i & \Delta \tilde{\varphi}_{ij} &= \tilde{\varphi}_{ij}(l_i) - \tilde{\varphi}_{ij}(0) \\
 {}^i\tilde{T}_i &= B_{3i} {}^i\dot{\tilde{v}}_{O_i}' + 2B_{8i} {}^i\tilde{\omega}_i + (B_{9i} + B_{10i}) {}^i\dot{\tilde{\omega}}_i + {}^i\tilde{\omega}_i (B_{9i} + B_{10i}) {}^i\tilde{\omega}_i \\
 Q_{jf} &= -\sum_{k=1}^m \delta_{jk} V_{jkf} - \sum_{k=1}^m \dot{\delta}_{jk} D_{jkf} + 2 {}^j\tilde{\omega}_j^T \cdot \sum_{k=1}^m \dot{\delta}_{jk} \bar{C}_{4jfk} + {}^j\tilde{\omega}_j^T \cdot \beta_{jf} {}^j\tilde{\omega}_j - {}^j\dot{\tilde{v}}_{O_j}^T \cdot \bar{C}_{1jf} - {}^j\dot{\tilde{\omega}}_j^T \cdot \bar{\alpha}_{jf} \\
 {}^i\dot{\tilde{\omega}}_i &= \sum_{k=1}^{i-1} {}^iR_k \left( {}^k\tilde{\omega}_k + \Delta^k \tilde{\varphi}_k(l_k, t) \right) \times {}^iR_{k+1} {}^{k+1}\tilde{z}_{k+1} \dot{\theta}_{k+1} + \sum_{k=1}^{i-1} {}^iR_k \left( {}^k\tilde{\omega}_k \times \Delta^k \tilde{\varphi}_k(l_k, t) \right) \\
 {}^i\dot{\tilde{v}}_{O_i}' &= g {}^iR_{ref} \tilde{Y} + \sum_{k=1}^{i-1} {}^iR_k \left( {}^i\dot{\tilde{\omega}}_i \times {}^k\tilde{r}_{O_{k+1}/O_k} + {}^k\tilde{\omega}_k \times \left( 2 {}^k\tilde{v}_{O_{k+1}/O_k} + {}^k\tilde{\omega}_k \times {}^k\tilde{r}_{O_{k+1}/O_k} \right) \right)
 \end{aligned} \tag{C38-C69}$$

پیوست (ت):

مشتقات جزئی تابع انرژی شتاب نسبت به  $\ddot{\theta}_j$  و  $\ddot{\delta}_{jf}$  همانند روابطی است که به ترتیب در معادلات (B1) و (B2) ظاهر شده است. اما مشتق این تابع نسبت به شتاب‌های تعمیم‌یافته  $\ddot{X}$  و  $\ddot{Y}$  عبارت‌اند از:

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{X}} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial {}^i\dot{\tilde{v}}_{O_i}^T}{\partial \ddot{X}} \cdot \left( B_{0i} {}^i\dot{\tilde{v}}_{O_i}' + \bar{B}_{1i} - 2B_{2i} {}^i\tilde{\omega}_i - B_{3i} {}^i\dot{\tilde{\omega}}_i - {}^i\tilde{\omega}_i B_{3i} {}^i\tilde{\omega}_i \right) \tag{D1}$$

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{Y}} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial {}^i\dot{\tilde{v}}_{O_i}^T}{\partial \ddot{Y}} \cdot \left( B_{0i} {}^i\dot{\tilde{v}}_{O_i}' + \bar{B}_{1i} - 2B_{2i} {}^i\tilde{\omega}_i - B_{3i} {}^i\dot{\tilde{\omega}}_i - {}^i\tilde{\omega}_i B_{3i} {}^i\tilde{\omega}_i \right) \tag{D2}$$

از طرفی مشتق تابع استهلاک ریلی نسبت به  $\dot{\theta}_j$  و  $\dot{\delta}_{jf}$  همانند روابطی است که به ترتیب در معادلات (B3) و (B4) ظاهر شده است. اما مشتق این تابع نسبت به سرعت‌های تعمیم‌یافته  $\dot{X}$  و  $\dot{Y}$  عبارت‌اند از:

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{X}} = \frac{\partial D}{\partial \dot{Y}} = 0 \tag{D3}$$

در پایان مشتق تابع انرژی پتانسیل کرنشی نسبت به  $\theta_j$  و  $\delta_{jf}$  همانند روابطی است که به ترتیب در معادلات (B5) و (B6) ظاهر شده است. اما مشتق این تابع نسبت به مختصات تعمیم‌یافته  $X$  و  $Y$  عبارت‌اند از:

$$\frac{\partial V}{\partial X} = \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \tag{D4}$$

پیوست (ث):

اعداد جدید ظاهر شده در ظاهر شده در ماتریس اینرسی و بردار سمت راست معادلات حرکت در فاز انتقال (به ترتیب شکل‌های ۴ و ۵) عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned}
 38 &:= {}^j \bar{z}_j^T \cdot {}^j \xi_{ref}^{ref} \bar{X} & 39 &:= {}^j \bar{z}_j^T \cdot {}^j \gamma_{ref}^{ref} \bar{X} & 40 &:= {}^j \bar{z}_j^T \cdot {}^j \xi_{ref}^{ref} \bar{Y} \\
 41 &:= {}^j \bar{z}_j^T \cdot {}^j \gamma_{ref}^{ref} \bar{Y} & 42 &:= \bar{r}_{jf}^T \cdot {}^j \lambda_{ref}^{ref} \bar{X} & 43 &:= \Delta \bar{\varphi}_{jf}^T \cdot {}^{j+} \gamma_{ref}^{ref} \bar{X} \\
 44 &:= \Delta \bar{\varphi}_{jf}^T \cdot {}^{j+} \xi_{ref}^{ref} \bar{X} & 45 &:= C_{1jf}^T \cdot {}^j R_{ref}^{ref} \bar{X} & 46 &:= \bar{r}_{jf}^T \cdot {}^j \lambda_{ref}^{ref} \bar{Y} \\
 47 &:= \Delta \bar{\varphi}_{jf}^T \cdot {}^{j+} \gamma_{ref}^{ref} \bar{Y} & 48 &:= \Delta \bar{\varphi}_{jf}^T \cdot {}^{j+} \xi_{ref}^{ref} \bar{Y} & 49 &:= C_{1jf}^T \cdot {}^j R_{ref}^{ref} \bar{Y} \\
 50 &:= {}^{ref} \bar{X}^T \cdot {}^{ref} V_k^k \bar{z}_k & 51 &:= {}^{ref} \bar{X}^T \cdot {}^{ref} \xi_k^k \bar{z}_k & 52 &:= {}^{ref} \bar{X}^T \cdot {}^{ref} \lambda_k \bar{r}_{kt} \\
 53 &:= {}^{ref} \bar{X}^T \cdot {}^{ref} R_k \bar{C}_{1kt} & 54 &:= {}^{ref} \bar{X}^T \cdot {}^{ref} V_{k^+} \Delta \bar{\varphi}_{kt} & 55 &:= {}^{ref} \bar{X}^T \cdot {}^{ref} \xi_{k^+} \Delta \bar{\varphi}_{kt} \\
 56 &:= {}^{ref} \bar{Y}^T \cdot {}^{ref} V_k^k \bar{z}_k & 57 &:= {}^{ref} \bar{Y}^T \cdot {}^{ref} \xi_k^k \bar{z}_k & 58 &:= {}^{ref} \bar{Y}^T \cdot {}^{ref} \lambda_k \bar{r}_{kt} \\
 59 &:= {}^{ref} \bar{Y}^T \cdot {}^{ref} R_k \bar{C}_{1kt} & 60 &:= {}^{ref} \bar{Y}^T \cdot {}^{ref} V_{k^+} \Delta \bar{\varphi}_{kt} & 61 &:= {}^{ref} \bar{Y}^T \cdot {}^{ref} \xi_{k^+} \Delta \bar{\varphi}_{kt} \\
 62 &:= \sum_{i=1}^n B_{0i} & 63 &:= \sum_{i=1}^n -\frac{\partial^i \bar{v}_{0i}^T}{\partial \bar{X}} \cdot {}^i \bar{S}_i & 64 &:= \sum_{i=1}^n -\frac{\partial^i \bar{v}_{0i}^T}{\partial \bar{Y}} \cdot {}^i \bar{S}_i
 \end{aligned}$$

(E1-E27)

که ثوابت ظاهر شده در روابط فوق عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned}
 {}^j \xi_{ref} &= \sum_{i=j}^n {}^j R_i B_{3i} {}^i R_{ref} & {}^{j+} \xi_{ref} &= \sum_{i=j+1}^n {}^j R_i B_{3i} {}^i R_{ref} \\
 {}^{ref} \xi_k &= \sum_{i=k}^n {}^{ref} R_i B_{3i} {}^i R_k & {}^{ref} \xi_{k^+} &= \sum_{i=k+1}^n {}^{ref} R_i B_{3i} {}^i R_k \\
 {}^j \gamma_{ref} &= \sum_{i=j+1}^n {}^j \tilde{r}_{O_i/O_j} B_{0i} {}^j R_{ref} & {}^{j+} \gamma_{ref} &= \sum_{i=j+2}^n {}^j \tilde{r}_{O_i/O_{j+1}} B_{0i} {}^j R_{ref} \\
 {}^j \lambda_{ref} &= \sum_{i=j+1}^n B_{0i} {}^j R_{ref} & {}^{ref} \lambda_k &= \sum_{i=k+1}^n B_{0i} {}^{ref} R_k \\
 {}^{ref} V_k &= \sum_{t=k}^{n-1} {}^{ref} \lambda_t {}^t \tilde{r}_{O_{t+1}/O_t} {}^t R_k & {}^{ref} V_{k^+} &= \sum_{t=k+1}^{n-1} {}^{ref} \lambda_t {}^t \tilde{r}_{O_{t+1}/O_t} {}^t R_k
 \end{aligned}$$

(E28-E37)