



## Thermoelastic Analysis of the FGM Rotating Disk Structure in the Free Turbine of the Turboshaft Engine Using the Differential Quadratic Method

Behrooz Shahriari <sup>a\*</sup>, Mahdi Sharifi <sup>a</sup>, Abdollah Godarzi <sup>a</sup>

<sup>a</sup> Faculty of Mechanics, Malek Ashtar University of Technology, Isfahan, Iran

### Original Article

Use your device to scan and read the article online



**Citation:** Shahriari B, Sharifi M, Godarzi A. Thermoelastic analysis of the FGM rotating disk structure in the free turbine of the turboshaft engine using the differential quadratic method. *Mechanics of Advanced and Smart Materials*. 2024;3(4):516-536.

 <https://10.61186/masm.3.4.516>

### KEYWORDS

Turboshaft engine,  
Free turbine,  
FGM rotating disk,  
Thermoelastic analysis,  
Differential quadratic method.

### ABSTRACT

The rotating disk in the free turbine of the turboshaft engine is one of the critical components of the engine, which is under to various mechanical and thermal loads. In this study, thermoelastic analysis has been performed on a rotating disk with variable thickness and made of functionally graded materials using the generalized quadratic differential method. First, by expanding the displacement differential equation and then by applying the thermal strain caused by the thermal gradient, the radial and circumferential stress-strain relations in the elastic state and from the combination of these equations, the stress relations in terms of strain are obtained. Finally, by placing the strain-displacement relationships in the stress-strain equations and placing the resulting equation in the disk equilibrium relationship, the thermo-elastic equation of this disk is obtained. This general equilibrium equation is related to a disk with variable thickness and properties that is under symmetrical thermal loading and centrifugal. Changes in the thickness, temperature and properties of the disk as a function of the radius have been investigated and the results have been compared. In this study, the validation was done with the variable material theory method and at the end, the stress, strain and displacement in the state of temperature-dependent properties was checked. The results show that the maximum error is 5% and this method can be effective in the analysis of rotating disks under mechanical and thermal loading in turbine engines.

### Extended Abstract

#### 1. Introduction

The application of rotating disk is in air turbine engines and compressors. considering the high efficiency and the need to increase the resistance of materials against thermal and mechanical, loads the thermoelastic analysis of rotating disks made of modern materials becomes necessary. The free turbine (power turbine) according to Figure 1 is the power generator in the turboshaft engine. Figure 2 also shows how to use the power produced by the free turbine in a helicopter. Considering the variable properties of anisotropic materials in the thermoelastic equation, it is necessary to use a suitable numerical method in the thermoelastic analysis of this disk. The rotating disk in the turboshaft engine is subjected to severe thermal gradients and severe mechanical loading, including centrifugal force.

\* Corresponding author. Tel.: +989131254080

E-mail address: [shahriari@mut-es.ac.ir](mailto:shahriari@mut-es.ac.ir)

DOI: <https://10.61186/masm.3.4.516>

Received: January 14, 2024; Received in revised form: March 04, 2024; Accepted: March 18, 2024

© Author



Kord Kheili and Naghd Abadi [4] presented a semi-analytical solution to obtain the stresses of a hollow rotating disk that was subjected to thermal loading. Cveticanin [9] has used homotopy perturbation method for nonlinear differential equations. Singh [10] calculated the stress and strain rate distribution for the anisotropic rotating disk and compared the result with the isotropic rotating disk. Jalali and Shahriari [12] investigated the elastic analysis of an FGM annular rotating disk using the finite difference method. Yousefi et al. [13] performed an exact analytical solution for the axial compressor spool drum of a gas turbine engine. Shahriari and Sadeghi Nezhad [14] presented an exact analytical solution for the thermoelastic analysis of an FGM rotating drum in both homogeneous states and under internal and external loadings. Shahriari and Safari [15] analyzed the FGM rotating disk in an aircraft gas turbine engine that is subjected to mechanical and thermal loads with four variable material properties (VMP), Galerkin and Rangkota methods with two different laws. Shahriari and Sedighi [17] analyzed the disk with non-linear variable thickness in gas turbine engine by hypergeometric method.

The purpose of this study is to analyze the stress of the rotating disk using the differential quadratic method. The governing equations of the disk are extracted and solved using the mentioned method in order to calculate the stresses caused by the loading of the rotating disks.

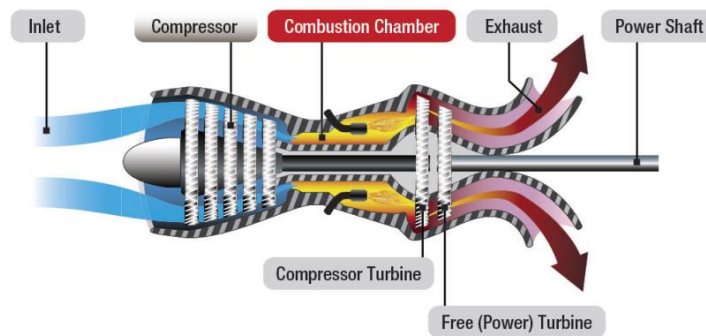


Figure 1. Schematic of a turbofan engine and free turbine position [1]

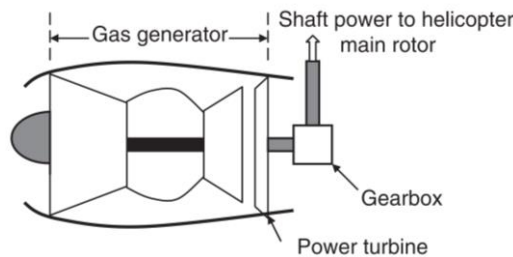


Figure 2. The power of the free turbine that generates the power of the main rotor shaft of the helicopter [2]

2. Thermoelasticity equation of rotating disk

The equilibrium equation for the element of figure 3 of the disk in the radial direction is written as equation 1:

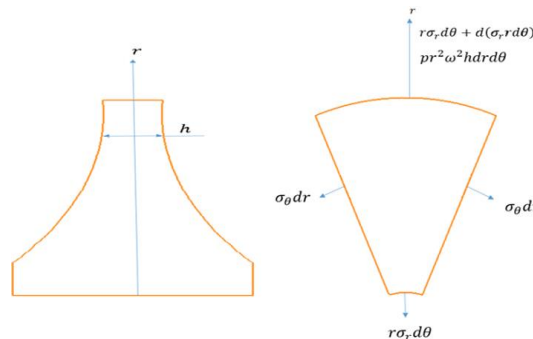


Figure 3. Stresses on the element from the disk along with the disk thickness profile

$$d\sigma_r r d\theta + \sigma_r r d r d\theta + \sigma_r r d^2\theta + pr^2\omega^2 h dr d\theta - \sigma_\theta dr d\theta = 0 \tag{1}$$

where h is the thickness and  $\omega$  is the angular velocity of the disk. Stress relations in terms of strain are obtained from equation 2:

$$\sigma_r = \frac{E}{(1-\nu^2)}(\epsilon_r + \nu\epsilon_\theta - (1+\nu)\alpha\Delta T) \tag{2}$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{(1-\nu^2)}(\epsilon_\theta + \nu\epsilon_r - (1+\nu)\alpha\Delta T) \tag{3}$$

E is the modulus of elasticity,  $\nu$  is Poisson's ratio, and  $\alpha$  is the coefficient of thermal expansion. By inserting equation 2 and 3 in the equilibrium equation, equation 4 is obtained. This is the general equation of equilibrium of a disk, with variable thickness and properties, which is symmetrical under centrifugal and thermal loading.

$$r h E \frac{d^2 u}{dr^2} + \left( r h \frac{dE}{dr} + r E \frac{dh}{dr} + h E \right) \frac{du}{dr} + \left( \nu E \frac{dh}{dr} + \nu h \frac{dE}{dr} - \frac{1}{r} E h \right) u + (1-\nu^2) h \rho \omega^2 r^2 - r(1+\nu) \frac{d(h E \alpha \Delta T)}{dr} = 0 \tag{4}$$

The value of each property at the beginning and end changes with the temperature in the form of equation 5, and the value of that property at any radius of the disk is obtained by equation 6.

$$P_o \text{ (or } P_i) = P_0(P_{-1}T^{-1} + 1 + P_1T + P_2T^2 + P_3T^3) \tag{5}$$

$$P(r) = (P_o - P_i) \left( \frac{r - r_i}{r_o - r_i} \right)^n + P_i; \quad r_i < r < r_o \tag{6}$$

where  $r_i$  is the inner radius and  $r_o$  is the outer radius of the disk. The thickness of the profile used in this problem is parabolic according to Figure 4 and is a function of the radius with constant coefficients, which is expressed as equation 7.

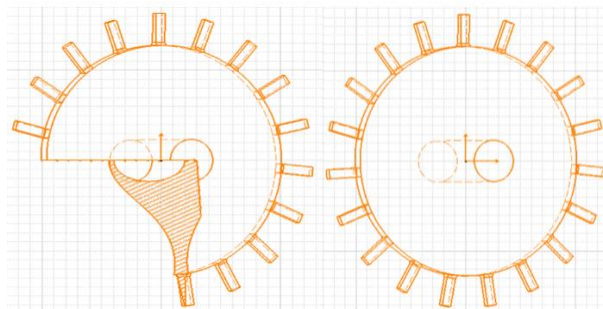


Figure 4. Cutaway view of thickness profile schematic

$$h(r) = h_0 \left( 1 - q \left( \frac{r}{r_0} \right)^{m_1} \right) \tag{7}$$

$h_0$  is the thickness in the axis of the disk.  $q$  is a number between zero and one, but it can also be zero. When  $q$  becomes zero, the thickness profile becomes uniform.  $m_1$  is a number that is always positive if it becomes equal to one and  $q$  is opposite to zero.

The temperature distribution of  $T(r)$  is defined by equation 8 in the radial direction.

$$T(r) = A \ln \left( \frac{r}{r_0} \right) + T_0$$

$$A = \frac{T_i - T_0}{\ln \frac{r_i}{r_0}} \tag{8}$$

The criterion used to obtain the equivalent stress is the von-Mises criterion.

### 3. Solution method

Solving some differential equations is difficult or impossible, so the desired equations can be converted into solvable equations using numerical methods; One of these numerical methods is the differential quadratic (DQ) method. In this method, the derivative of the function is defined as equation 9:

$$f_x^{(n)}(x_i) = \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(n)} f(x_j) \quad , n = 1, \dots, N - 1 \tag{9}$$

The first step in this method is determining the coordinates of the nodes, which is obtained from the following equations:

A) Points with equal distances:

$$X_i = \frac{i-1}{N-1}a \quad i = 1, \dots, N_x \quad (10)$$

$$Y_i = \frac{i-1}{N-1}b \quad i = 1, \dots, N_y \quad (11)$$

B) Points with unequal distances:

$$X_i = \frac{a}{2} \left\{ 1 - \cos \left( \frac{i-1}{N_x-1} \pi \right) \right\} \quad i = 1, \dots, N_x \quad (12)$$

$$Y_i = \frac{b}{2} \left\{ 1 - \cos \left( \frac{i-1}{N_y-1} \pi \right) \right\} \quad i = 1, \dots, N_y \quad (13)$$

In the above expressions, a and b are respectively the length of the desired interval in the directions x and y, and  $N_x$  and  $N_y$  expressing the number of nodes in the said directions.

The second step is to determine the weight coefficients used in this method from the following equations:

$$A_{ij}^{(1)} = \frac{M(X_i)}{(X_i - X_j)M(X_j)} \quad i, j = 1, \dots, N_x \quad j \neq i \quad (14)$$

$$B_{ij}^{(1)} = \frac{P(Y_i)}{(Y_i - Y_j)P(Y_j)} \quad i, j = 1, \dots, N_y \quad j \neq i \quad (15)$$

$$M(X_i) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N_x} (X_i - X_j) \quad (16)$$

$$P(Y_i) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N_y} (Y_i - Y_j) \quad (17)$$

Considering equation 4 and simplifying the coefficients, the disk equation is obtained in the form of equation 18. This equation is solved by differential quadratic method.

$$Au'' + Bu' + Cu + D = 0 \quad (18)$$

#### 4. Thermoelastic analysis of a specific rotating FGM disk and Verification of results

In this part, a specific FGM disk with geometrical specifications and mechanical properties according to Table 1 is analyzed. Mechanical properties are placed in a temperature-dependent state. The specifications of Table 1 are related to titanium and zirconium materials.

The diagram of changes in displacement, radial and circumferential stress, radial and circumferential strain according to the radius of the disk, was obtained by the GDQM method and validated with [15] reference diagrams.

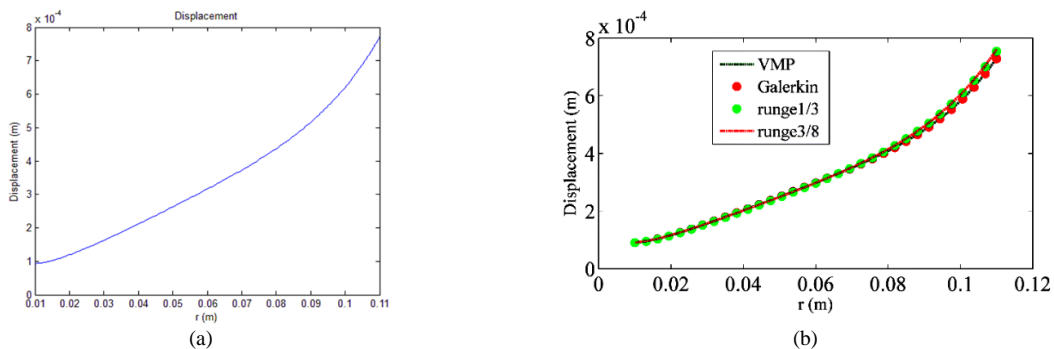


Figure 5. Displacement diagram of specific rotating FGM disk by (a) GDQM method (b) Other methods

Table 1. Temperature-dependent mechanical characteristics of a specific rotating FGM disk [15]

Mechanical specifications	value
---------------------------	-------

		outer surface	inner surface
Modulus of elasticity (Pa)	P <sub>0</sub>	244.27 × 10 <sup>9</sup>	122.56 × 10 <sup>9</sup>
	P <sub>-1</sub>	0	0
	P <sub>1</sub>	-1.37 × 10 <sup>-3</sup>	-4.59 × 10 <sup>-4</sup>
	P <sub>2</sub>	1.214 × 10 <sup>-6</sup>	0
	P <sub>3</sub>	-3.68 × 10 <sup>-10</sup>	0
Poisson's ratio		0.3	0.3
Density ( $\frac{kg}{m^3}$ )		3000	4429
Temperature (°K)		473	373
Angular velocity ( $\frac{rad}{s}$ )		5670	5670
Coefficient of thermal expansion ( $\frac{1}{C}$ )	P <sub>0</sub>	12.766 × 10 <sup>-6</sup>	7.578 × 10 <sup>-6</sup>
	P <sub>-1</sub>	0	0
	P <sub>1</sub>	-1.49 × 10 <sup>-3</sup>	6.638 × 10 <sup>-4</sup>
	P <sub>2</sub>	1.006 × 10 <sup>-5</sup>	-3.15 × 10 <sup>-6</sup>
	P <sub>3</sub>	-6.78 × 10 <sup>-11</sup>	0
FGM index		5	
Boundary conditions (Pa)		$\sigma_r = -1343930$ ; $r = r_i$ $\sigma_r = 6348111$ ; $r = r_o$	

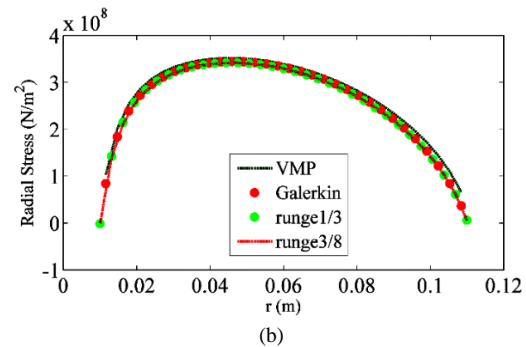
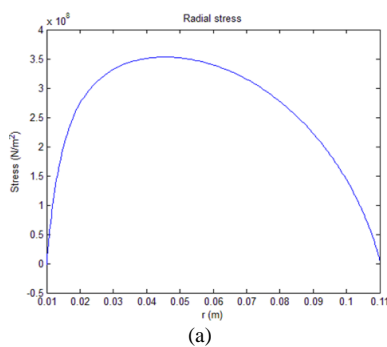


Figure 6. Radial stress diagram of specific rotating FGM disk by (a) GDQM method (b) Other methods

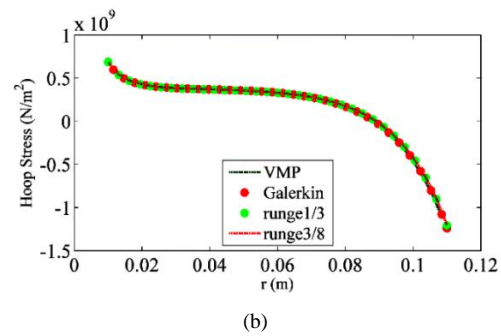
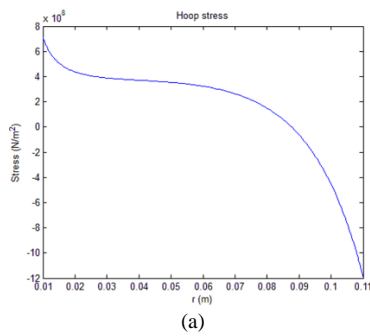


Figure 7. Circumferential stress diagram of specific rotating FGM disk by (a) GDQM method (b) Other methods

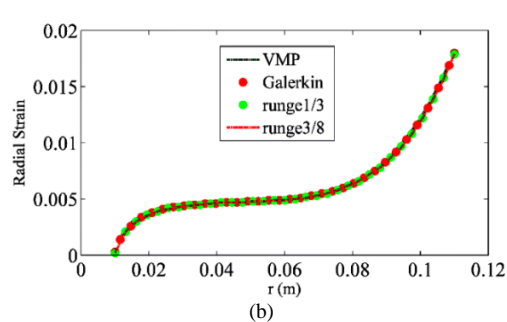
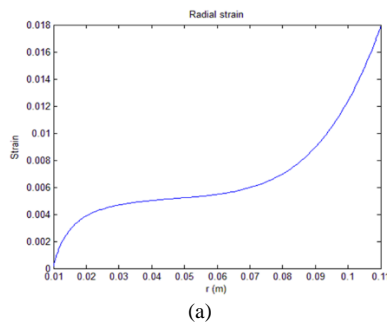


Figure 8. Radial strain diagram of a specific rotating FGM disk by (a) GDQM method (b) Other methods

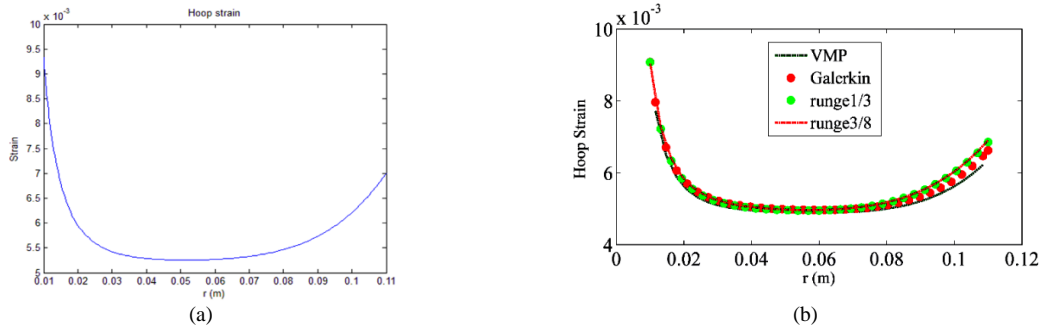


Figure 9. Circumferential strain diagram of a specific rotating FGM disk by (a) GDQM method (b) Other methods

## 5. Conclusion

In this study, the thermoelastic analysis of rotating FGM disk in turboshaft engine was done by differential quadratic method. The loading on the disk includes the centrifugal load caused by the rotation of the disk with a certain angular velocity, the extensive tensile load on the external environment of the disk due to the centrifugal force of the blades, and the extensive compressive load applied by the disk on the shaft. Also, the thermal load caused by the thermal gradient is also on the disk. In this study, the differential quadratic method was used for the FGM rotating disk in the air gas turbine engine in the temperature-dependent internal and external loading mode. The results of the GDQM method were very close to the other methods and the maximum error in the diagrams was 4% or 5%, which is an acceptable result. Also, the results of GDQM and VMP methods were very close.



## تحلیل ترموالاستیک سازه دیسک دوار FGM در توربین آزاد موتور توربوشفت به روش مربعات دیفرانسیلی

بهروز شهریاری الف\*، مهدی شریفی ب، عبدالله گودرزی ج

الف دانشیار، مجتمع دانشگاهی مکانیک، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، اصفهان، ایران، [shahriari@mut-es.ac.ir](mailto:shahriari@mut-es.ac.ir)

ب کارشناسی ارشد، مجتمع دانشگاهی مکانیک، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، اصفهان، ایران، [mahdisharifi13780@gmail.com](mailto:mahdisharifi13780@gmail.com)

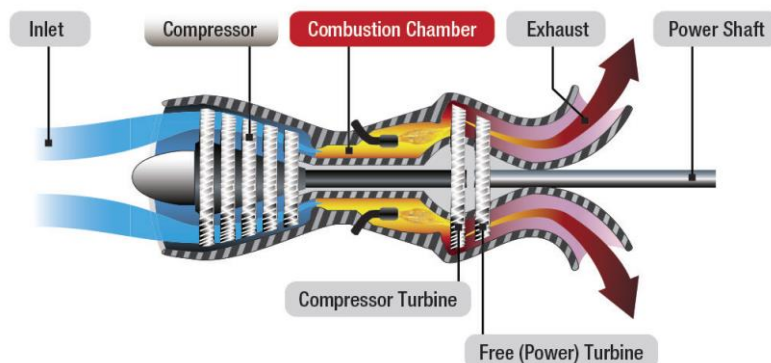
ج کارشناسی ارشد، مجتمع دانشگاهی مکانیک، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، اصفهان، ایران، [abdollah.gudarzi@gmail.com](mailto:abdollah.gudarzi@gmail.com)

چکیده	واژگان کلیدی
<p>دیسک دوار در توربین آزاد موتور توربوشفت یکی از اجزای بحرانی موتور است که تحت بارهای مکانیکی و حرارتی مختلف قرار دارد. در این تحقیق، تحلیل ترموالاستیک بر روی یک دیسک دوار با ضخامت متغیر و از مواد مدرج عملکردی با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته انجام شده است. ابتدا با گسترش معادله دیفرانسیل جابجایی و سپس با اعمال کرنش حرارتی ناشی از گرادیان حرارتی، روابط تنش-کرنش شعاعی و محیطی در حالت الاستیک و از ترکیب این معادلات روابط تنش بر حسب کرنش به دست می آید. در نهایت با جایگذاری روابط کرنش-جابه جایی در معادلات تنش-کرنش و جایگذاری معادله حاصله در رابطه تعادل دیسک، معادله ترموالاستیک این دیسک به دست می آید. این معادله کلی تعادل مربوط به یک دیسک با ضخامت و خواص متغیر است که تحت بار حرارتی متقارن و گریز از مرکز قرار دارد. تغییرات در ضخامت، دما و خواص دیسک به عنوان تابعی از شعاع بررسی شده و نتایج مقایسه شده است. در این مطالعه اعتبارسنجی با روش تئوری مواد متغیر انجام شده و در انتها، تنش و کرنش و جابه جایی در حالت خواص وابسته به دما، بررسی شده است. نتایج نشان می دهند بیشترین خطا ۵ درصد است و این روش می تواند در تحلیل دیسک های دوار تحت بارگذاری مکانیکی و حرارتی در موتورهای توربین موثر باشد.</p>	<p>موتور توربوشفت، توربین آزاد، دیسک دوار FGM، تحلیل ترموالاستیک، روش مربعات دیفرانسیلی.</p>
	تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۱۰/۲۴
	تاریخ بازنگری: ۱۴۰۲/۱۲/۱۴
	تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۱۲/۲۸

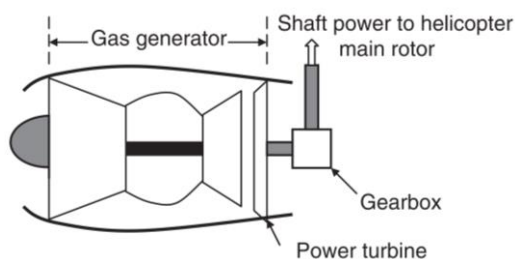
### ۱- مقدمه

از میان کاربردهای دیسک دوار می توان به مواردی همچون موتورهای توربینی هوایی، توربین های گاز زمینی، توربین های بخار، پمپ ها و کمپرسورها اشاره نمود. با توجه به پیشرفت صنعت و لزوم استفاده از مواد با راندمان بالا و نیاز به افزایش مقاومت مواد در برابر بارهای حرارتی و مکانیکی، تحلیل ترموالاستیک دیسک های دوار ساخته شده از مواد مدرن ضرورت می یابد. توربوشفت نوعی موتور توربین گاز است که جهت تولید توان برای استفاده در روتورها استفاده می شود. در موتور توربوشفت، هدف تولید قدرت زیاد، اطمینان پذیری بالا، اندازه کوچک و وزن سبک است. موتور توربوشفت در بالگردها، قایق ها، کشتی ها، تانک ها، هواناو و تجهیزات ثابت کاربرد دارد. استفاده از چندین نوع سوخت نظیر گاز طبیعی، سوخت دیزل و متان این مولدها را برای کاربرد در سکوها نفتی و ساحلی و کشتی ها مناسب می سازد. هر چند این موتورها بیشتر به علت استفاده در هواپیما معروف شده اند، اما در حمل و نقل زمینی، دریایی، و کاربردهای ثابت مثل نیروگاه ها بیشترین تنوع در ترکیب را دارا بوده و در حال توسعه هستند.

توربین آزاد (یا توربین قدرت) مطابق شکل ۱ مولد توان در موتور توربوشفت است. همچنین شکل ۲ نحوه استفاده از توان تولیدی توسط توربین آزاد را در یک بالگرد نشان می‌دهد؛ توان توربین به شفت متصل به توربین منتقل شده و توسط گیربکس به شفت روتور اصلی بالگرد انتقال می‌یابد. توربین آزاد از دو بخش دیسک و پره‌ها ساخته شده است. استحکام دیسک توربین آزاد با توجه به حضور انواع بارهای مکانیکی و حرارتی دارای اهمیت است.



شکل ۱ شماتیک یک موتور توربوشفت و موقعیت توربین آزاد [۱]



شکل ۲ توربین قدرت آزاد مولد توان شفت روتور اصلی بالگرد [۲]

با توجه به خواص متغیر مواد ناهمسانگرد در معادله ترموالاستیک، لزوم به‌کارگیری روش مناسب عددی در تحلیل ترموالاستیک این دیسک ضروری است. مهم‌ترین اهداف طراحی سازه و تولید مواد، کاهش وزن، کاهش هزینه، افزایش استحکام و پاسخگویی مناسب در برابر تنش‌های وارده بر آن می‌باشد. با در نظر گرفتن مواد تابعی برای هر سازه می‌توان به صورت تقریبی به همه مزیت‌های فوق رسید. برای طراحی هر سازه‌ای باید نسبت به پاسخگویی استحکام آن در شرایط بارگذاری آگاه شد لذا مساله باید تحت تحلیل‌های مختلف سازه‌ای از جمله تحلیل تنش و کرنش در بارگذاری‌های مختلف قرار گیرد. دیسک دوار در موتور توربوشفت تحت گرادیان شدید حرارتی و بارگذاری سخت مکانیکی از جمله بارهای گریز از مرکز قرار دارد. طراحی این دیسک با استفاده از مواد تابعی می‌تواند منجر به ایجاد یک دیسک با عملکرد سازه‌ای بالا گردد. در این تحقیق از دو جنس تیتانیوم و زیرکونیوم جهت ساخت دیسک FGM<sup>۱</sup> استفاده شده است.

جاهد و بیدآبادی [۳] خزش اولیه و ثانویه را برای دیسک دوار غیر همگن بررسی کردند. آن‌ها از خواص مواد تنها مدول الاستیسیته را تابعی از شعاع در نظر گرفته و بقیه را ثابت فرض کردند. همچنین آنها از ترم‌های مشتق پارامترهای متغیر در معادلات صرف نظر کردند. کردخیلی و نقدآبادی [۴] راه حل نیمه تحلیلی برای به دست آوردن تنش‌های دیسک دوار توخالی که تحت بارگذاری حرارتی قرار داشت را ارائه دادند. فرهاد نیا و همکاران [۵] به بررسی کماتش تیر ساخته‌شده از مواد هدفمند (FGM) در شرایط مرزی مختلف با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی (GDQM)<sup>۲</sup> پرداختند. آنان با قیاس روش مربعات دیفرانسیلی با روش اجزا محدود به نتایج قابل قبولی دست یافتند.

وکیلی و همکاران [۶] به مقایسه‌ی روش‌های مختلف در تحلیل ترموالاستیک دیسک‌های دوار ساخته‌شده از مواد هدفمند

<sup>۱</sup> Functionally Graded Material

<sup>۲</sup> Generalized differential quadrature method

پرداختند. در این مقاله رفتار ترموالاستیک یک دیسک دوار هدفمند با ضخامت متغیر با استفاده از روش‌های مختلف مورد بررسی قرار گرفته است. برای این منظور، نخست با گسترش معادله‌ی دیفرانسیل انتقال حرارت، توزیع دما در دیسک به دست آمده سپس با در نظر گرفتن توزیع دما و با گسترش معادله‌ی دیفرانسیل جابه‌جایی، رفتار ترموالاستیک دیسک بررسی شده است. در گسترش این معادلات خواص فیزیکی به صورت تابعی توانی از شعاع فرض شده‌اند. معادلات دیفرانسیل ترمومکانیکی به دست آمده با روش‌های تحلیلی، شبه‌تحلیلی و روش مربعات دیفرانسیلی حل شده و همچنین پاسخ‌های به دست آمده با نتایج حاصل از روش تحلیل المان محدود مقایسه شده‌اند. مقایسه‌ی این چهار روش از آن جهت صورت گرفته است که حل تحلیلی معادلات مذکور در تمامی حالات بعید به نظر می‌رسد و از این رو تعیین روشی مناسب با دقت کافی و زمان حل مناسب به خصوص برای انجام اهدافی همچون بهینه‌سازی اهمیت ویژه‌ای دارد. نتایج حاصل نشان از مناسب‌تر بودن روش حل شبه‌تحلیلی برای تحلیل ترموالاستیک دیسک‌های دوار دارد.

صادقی و همکاران [۷] به تحلیل دیسک دوار ضخامت متغیر تحت شرایط مرزی مشخص پرداختند. آن‌ها با بررسی رفتار دیسک‌ها، تنش‌های شعاعی و محیطی و جابجایی‌های شعاعی را در یک دیسک دوار با تقارن محوری محاسبه نمودند. ترابی و افشاری [۸] با استفاده از قوانین انتقال حرارت یک بعدی و تئوری الاستیسیته دو بعدی، معادلات حاکم بر توزیع دما و تحلیل تنش‌های مکانیکی و حرارتی در یک دیسک دوار با ضخامت متغیر و خواص متغیر در راستای طولی را استخراج کردند با توجه به پیچیدگی‌های موجود در معادلات حرارت و تحلیل تنش، از روش عددی تفاضلات مربعی برای حل تمامی معادلات استفاده خواهد شد؛ از این طریق توزیع دما و مؤلفه‌های تنش و جابجایی در دیسک به دست خواهد آمد. در نهایت تاثیر چگونگی تغییرات ضخامت و خواص ماده در راستای شعاعی بر روی توزیع دما، تنش و جابجایی در دیسک بررسی می‌گردد.

کوتیکانین [۹] از روش اغتشاش هوموتوپ<sup>۱</sup> برای معادلات دیفرانسیل غیر خطی خالص استفاده کرده است. او از راه حل‌های تقریبی اولیه در فرم تابع بیضوی ژاکوبی<sup>۲</sup> برای به دست آوردن راه حل تقریبی-تحلیلی استفاده کرد. در پایان به این نتیجه رسید که روش کار در نمونه، بسیار مناسب به دست می‌آید، اما دلایل نظری هنوز یافت نشده است. سینگ [۱۰] توزیع نرخ تنش و کرنش را برای دیسک دوار ناهمسانگرد محاسبه کرد و با همسانگرد مقایسه نمود. وی همچنین روش تحلیلی را برای رفتار خزش حالت پایدار دیسک دوار ناهمسانگرد ارائه داد. پان و هان [۱۱] حل ترموالاستیسیته برای دیسک‌های توخالی و توپر دوار محوری در شرایط تنش صفحه‌ای را ارائه کردند.

جلالی و شهریاری [۱۲] با استفاده از روش تفاضل محدود، تحلیل الاستیک یک دیسک دوار حلقوی FGM را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها مدول الاستیسیته، چگالی و ضخامت دیسک طبق یک تابع توانی متغیر با شعاع فرض کرده و تنش شعاعی، تنش محیطی و تغییر شکل شعاعی دیسک حلقوی چرخان FGM با ضخامت متغیر را با شرایط مرزی مختلف با استفاده از روش تفاضل محدود عددی به دست آوردند. یوسفی و همکاران [۱۳] حل تحلیلی دقیقی را برای درام اسپول<sup>۳</sup> کمپرسور محوری یک موتور توربین گاز جهت محاسبه تنش‌ها، کرنش‌ها و جابجایی‌ها در دو حالت مختلف یکی درام از جنس همگن و دیگری FGM تحت نیروی گریز از مرکز ناشی از دوران و بارگذاری یکنواخت شعاعی در سطوح داخلی و خارجی انجام دادند. آن‌ها در حالت FGM خواص ماده شامل مدول یانگ و چگالی در راستای شعاع اسپول را متغیر در نظر گرفتند و تنش‌ها و جابجایی‌ها را برای ماده همگن و ماده FGM با ضرایب غیرهمگن مختلف محاسبه نمودند. نتایج نشان دادند که استفاده از ماده FGM با ضریب مناسب نسبت به همگن، می‌تواند منجر به بهبود قابل توجه ضریب اطمینان و کاهش جابجایی‌ها، کرنش‌ها و تنش‌های اسپول مدنظر گردد. از سوی دیگر انتخاب ضریب FGM نامناسب می‌تواند باعث کاهش ضریب اطمینان و حتی شکست در سازه شود. شهریاری و صادقی نژاد [۱۴] یک حل تحلیلی دقیق برای تحلیل ترموالاستیک یک درام دوار FGM در هر دو حالت همگن و تحت بارگذاری‌های داخلی و خارجی ارائه دادند. آن‌ها تغییرات خواص مکانیکی در راستای شعاعی درام به صورت نمایی فرض کرده و دمای درام را به صورت تابع دلخواهی از شعاع در نظر گرفتند نتایج تحلیل آن‌ها نشان داد تغییر پارامترهای سرعت دورانی، مقدار و نوع بارگذاری وارده بر روی سطوح داخلی و خارجی، ضخامت درام و ثابت‌های غیر همگن نقش مؤثری در کاهش یا افزایش تنش‌ها و جابجایی درام داشته و با تغییر در مقدار بارگذاری شعاعی، سرعت دورانی، ضخامت و انتخاب ماده FGM با

<sup>1</sup> Homotopy perturbation method

<sup>2</sup> Jacobi elliptic function

<sup>3</sup> Spool drum

ضریب غیر همگن مناسب بجای ماده همگن می‌تواند درامی با سطح تنش‌های پایین‌تر و ضریب اطمینان بالاتر طراحی کرد. شهریاری و صفری [۱۵] دیسک دوار FGM در یک موتور توربین‌گاز هواپیما که تحت بارهای مکانیکی و حرارتی قرار دارد را با چهار روش خواص مواد متغیر<sup>۱</sup> (VMP)، گالرکین<sup>۲</sup> و رانگ‌کو<sup>۳</sup> با دو قانون متفاوت مورد تحلیل قرار دادند و مقادیر جابجایی، تنش و کرنش آن را محاسبه کردند. آن‌ها نشان دادند که نتایج به‌دست‌آمده از هر چهار روش به هم نزدیک بوده و می‌توانند برای تحلیل مسائل از این نوع استفاده شوند.

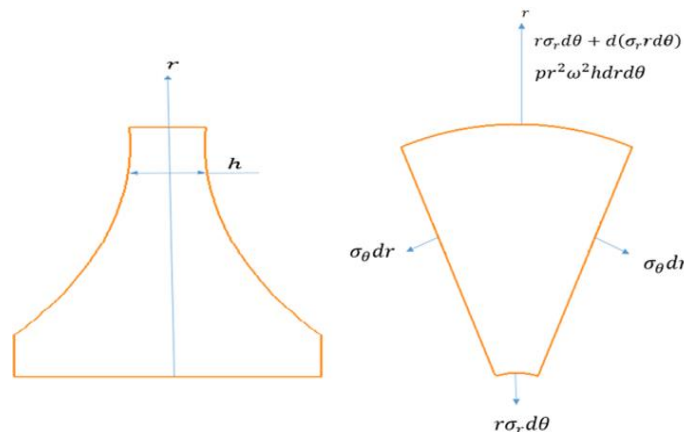
جعفری مهرآبادی و همکاران [۱۶] تحلیل خمش میکرو تیر ساخته‌شده از مواد مدرج تابعی روی بستر الاستیک را با استفاده از تئوری گرادیان کرنش با به‌کارگیری مدل تیر اویلر-برنولی مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها پس از استخراج معادلات حرکت، برای حل آن‌ها از روش عددی دیفرانسیل مربعی تعمیم‌یافته در شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده استفاده نمودند. سپس اثر پارامترهای مختلف از قبیل ضریب مقیاس طول و ضریب اندیس توانی ماده مدرج تابعی و ضرایب بستر الاستیک بر خیز تیر را مورد بحث و بررسی قرار دادند.

شهریاری و صدیقی [۱۷] دیسک با ضخامت متغیر غیر خطی در موتور توربین‌گازی را با روش هایپرژئومتریک تحلیل کردند. آن‌ها محاسبه عددی و تحلیلی دقیق کرنش‌ها و تنش‌های الاستیک در دیسک دوار موتور توربین‌گازی با ضخامت متغیر و تحت گرادیان حرارتی را ارائه نمودند.

هدف این تحقیق، تحلیل تنش دیسک دوار با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی است. معادلات حاکم بر دیسک استخراج شده و حل آن با استفاده از روش مذکور به منظور محاسبه تنش‌های ناشی از بارگذاری دیسک‌های دوار انجام می‌شود.

## ۲- معادله ترموالاستیسیته حاکم بر دیسک دوار و شرط مرزی

به منظور معادلات و درک درست از مدل‌سازی مساله فرضیاتی در نظر گرفته شده است. تنش در راستای ضخامت تغییر ندارد. ضخامت دیسک از محور تا پره‌ها متغیر است و با تابعی از شعاع تغییر می‌کند. دما با تابعی مشخص از شعاع دیسک متغیر است. هندسه، توزیع خواص و بارگذاری دیسک، متقارن محوری است. چرخش دیسک با سرعت زاویه‌ای ثابت است. بار فشاری اثر شافت و نیروی گریز از مرکز وارده بر تیغه‌ها به صورت متقارن محوری بر سطح داخلی و خارجی دیسک وارد می‌شود. معادله تعادل برای المان شکل ۳ از دیسک در جهت شعاعی به صورت رابطه ۱ نوشته می‌شود:



شکل ۳ تنش‌های وارده بر المانی از دیسک به همراه پروفیل ضخامت دیسک

$$\sum F_r = 0 \quad r\sigma_r d\theta + d(\sigma_r r d\theta) - \sigma_r r d\theta + \rho r^2 \omega^2 h dr d\theta - 2\sigma_\theta dr \frac{d\theta}{2} = 0 \quad (1)$$

که در آن  $h$  ضخامت و  $\omega$  سرعت زاویه‌ای دیسک است. با فرض تنش صفحه‌ای ترم تنش در راستای  $z$  صفر می‌شود:

<sup>1</sup> Variable Material Properties method

<sup>2</sup> Galerkin method

<sup>3</sup> Runge-Kutta Method

$$\tau_{yz} = \tau_{xz} = \sigma_z = 0 \quad (2)$$

از معادله ۱، بعد از ساده‌سازی رابطه ۳ به دست می‌آید:

$$d\sigma_r r d\theta + \sigma_r dr d\theta + \sigma_r r d^2\theta + \rho r^2 \omega^2 h dr d\theta - \sigma_\theta dr d\theta = 0 \quad (3)$$

و نهایتاً با تقسیم همه ترم‌ها بر سطح مقطع المان رابطه ۴ حاصل می‌شود:

$$\frac{d}{dr}(hr\sigma_r) - h\sigma_\theta + h\rho r^2 \omega^2 = 0 \quad (4)$$

روابط کرنش-جاب‌جایی نیز به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} \quad (5)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r} \quad (6)$$

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^T \quad (7)$$

$\rho$  چگالی دیسک و  $\varepsilon^T$  بیانگر کرنش حرارتی ناشی از گرادیان حرارتی و  $\varepsilon^e$  کرنش الاستیک ناشی از سایر بارگذاری‌ها می‌باشد. روابط تنش-کرنش شعاعی و محیطی در حالت الاستیک از این قرار می‌باشند:

$$\varepsilon_r - \alpha\Delta T = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_\theta) \quad (8)$$

$$\varepsilon_\theta - \alpha\Delta T = \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu\sigma_r) \quad (9)$$

$E$  مدول الاستیسیته و  $\nu$  نسبت پواسون و  $\alpha$  ضریب انبساط حرارتی است. از دو معادله فوق روابط تنش برحسب کرنش به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\sigma_r = \frac{E}{(1-\nu^2)}(\varepsilon_r + \nu\varepsilon_\theta - (1+\nu)\alpha\Delta T) \quad (10)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{(1-\nu^2)}(\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_r - (1+\nu)\alpha\Delta T) \quad (11)$$

نهایتاً با جایگذاری روابط کرنش-جاب‌جایی در معادلات تنش-کرنش و جایگذاری معادله حاصله در رابطه تعادل دیسک معادله ۱۲ حاصل می‌شود. این معادله کلی تعادل یک دیسک ضخامت و خواص متغیر است که تحت بار گریز از مرکز و حرارتی متقارن است.

$$r h E \frac{d^2 u}{dr^2} + \left( r h \frac{dE}{dr} + r E \frac{dh}{dr} + h E \right) \frac{du}{dr} + \left( \nu E \frac{dh}{dr} + \nu h \frac{dE}{dr} - \frac{1}{r} E h \right) u + (1 - \nu^2) h \rho \omega^2 r^2 - r(1 + \nu) \frac{d(h E \alpha \Delta T)}{dr} = 0 \quad (12)$$

استفاده از رابطه غیر خطی متاثر از دمای مواد در حالتی که خواص به دما نیز وابسته باشد، مقدار هر خاصیت در ابتدا و انتها به صورت رابطه ۱۴ با دما تغییر می‌کند و از طرفی مقدار آن خاصیت در هر شعاعی از دیسک توسط رابطه ۱۳ به دست می‌آید. به این ترتیب خواص به هر دو پارامتر یعنی شعاع و دما وابسته است.

$$P(r) = (P_o - P_i) \left( \frac{r - r_i}{r_o - r_i} \right)^n + P_i; \quad r_i < r < r_o \quad (13)$$

$$P_o \text{ (or } P_i) = P_0(P_{-1}T^{-1} + 1 + P_1T + P_2T^2 + P_3T^3) \quad (14)$$

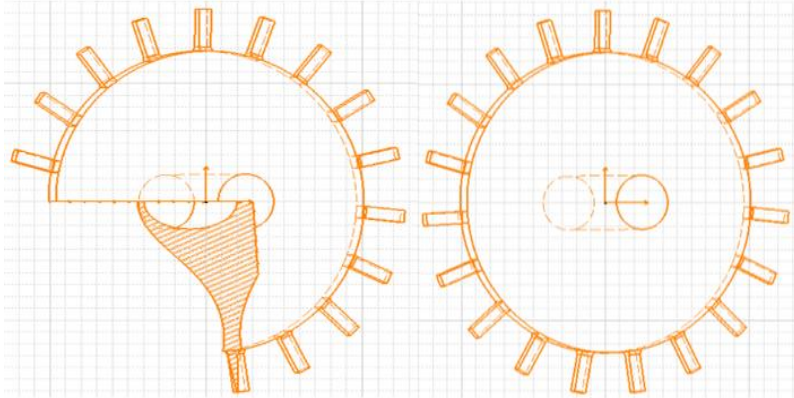
$$@ r = r_i; \sigma_r = -p_{im} \quad (15)$$

$$@ r = r_o; \sigma_r = p_{im}$$

که در آن  $r_i$  شعاع داخلی و  $r_o$  شعاع خارجی دیسک می‌باشند. این شرط زمانی استفاده می‌شود که در سطح داخلی دیسک تنش فشاری  $-p_{im}$  و در سطح بیرونی دیسک تنش کششی  $p_{im}$  وارد شود.

پروفیل ضخامت استفاده شده در این مساله مطابق شکل ۴ سهموی بوده و با ضرایب ثابت تابعی از شعاع است که به صورت معادله ۱۶ بیان می شود.

$$h(r) = h_0 \left(1 - q \left(\frac{r}{r_0}\right)^{m_1}\right) \quad (16)$$



شکل ۴ نمای برش خورده از شماتیک پروفیل ضخامت

پروفیل دیسک مدنظر پروفیل سهمی وار را دنبال می کند. که  $h_0$  ضخامت در محور دیسک است.  $q$  یک عدد بین صفر و یک است ولی می تواند صفر نیز شود. با صفر شدن  $q$  پروفیل ضخامت یکنواخت می شود.  $m_1$  یک عدد همواره مثبت است که اگر برابر یک شود و  $q$  مخالف صفر باشد.

پروفیل ضخامت به صورت خطی افزایش می یابد. اگر  $m_1$  یک عدد بین صفر و یک باشد پروفیل دیسک به صورت مقعر و اگر بزرگ تر از یک به صورت محدب تغییر می کند. همچنین توزیع دمای  $T(r)$  با رابطه ۱۷ در راستای شعاعی تعریف می شود.

$$T(r) = A \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) + T_0$$

$$A = \frac{T_i - T_0}{\ln\frac{r_i}{r_0}} \quad (17)$$

معیار به کاررفته برای بدست آوردن تنش معادل، معیار فون-میزز است. دلیل انتخاب این معیار بهترین پیش بینی برای مواد مختلف با توجه به استفاده از نظریه انرژی واپیچش است.

$$\sigma_e = \sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_\theta^2 - \sigma_r \sigma_\theta} \quad (18)$$

### ۳- روش حل

روش عددی به کاررفته جهت محاسبه معادله حاکم بر دیسک، مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته می باشد که در ادامه توضیح داده شد و روابط حاکم ارایه می شوند. حل مساله در حالت بارگذاری در سطح داخلی و خارجی دیسک و خواص مستقل از دما انجام می شود. چون حل معادلات دیفرانسیل پاره ای، دشوار و یا غیر ممکن می باشد می توان معادلات مورد نظر را با استفاده از روش های عددی، ساده و به معادلاتی قابل حل تبدیل نمود؛ که سبب ایجاد مقداری خطا در محاسبات می شود. یکی از این روش های عددی، روش مربعات تفاضلی (DQ)<sup>۱</sup> می باشد که در این روش، مشتق مرتبه  $n$ م تابع پیوسته  $f(x, r)$  نسبت به  $x$  در نقطه  $x_i$  به صورت مجموع خطی از مقادیر تابع وزن در همه نقاط نوشته می شود. در این روش، مشتق تابع به صورت زیر تعریف می گردد:

$$f_x^{(n)}(x_i) = \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(n)} f(x_j) \quad , n = 1, \dots, N - 1 \quad (19)$$

<sup>1</sup> Differential quadratic

به عنوان مثال شکل ماتریسی مشتقات مرتبه اول و دوم تابع  $f$  در راستای  $x$  با انتخاب پنج گره به صورت زیر نتیجه می‌شود:  
 الف) مشتق مرتبه اول در راستای  $x$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}^{(1)} & A_{12}^{(1)} & A_{13}^{(1)} & A_{14}^{(1)} & A_{15}^{(1)} \\ A_{21}^{(1)} & A_{22}^{(1)} & A_{23}^{(1)} & A_{24}^{(1)} & A_{25}^{(1)} \\ A_{31}^{(1)} & A_{32}^{(1)} & A_{33}^{(1)} & A_{34}^{(1)} & A_{35}^{(1)} \\ A_{41}^{(1)} & A_{42}^{(1)} & A_{43}^{(1)} & A_{44}^{(1)} & A_{45}^{(1)} \\ A_{51}^{(1)} & A_{52}^{(1)} & A_{53}^{(1)} & A_{54}^{(1)} & A_{55}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{bmatrix}$$

ب) مشتق مرتبه دوم در راستای  $x$ :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}^{(2)} & A_{12}^{(2)} & A_{13}^{(2)} & A_{14}^{(2)} & A_{15}^{(2)} \\ A_{21}^{(2)} & A_{22}^{(2)} & A_{23}^{(2)} & A_{24}^{(2)} & A_{25}^{(2)} \\ A_{31}^{(2)} & A_{32}^{(2)} & A_{33}^{(2)} & A_{34}^{(2)} & A_{35}^{(2)} \\ A_{41}^{(2)} & A_{42}^{(2)} & A_{43}^{(2)} & A_{44}^{(2)} & A_{45}^{(2)} \\ A_{51}^{(2)} & A_{52}^{(2)} & A_{53}^{(2)} & A_{54}^{(2)} & A_{55}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{bmatrix}$$

### ۳-۱- تعیین مختصات گره‌ها

مرحله اول در این روش انتخاب مختصات گره‌ها می‌باشد که طریقه این انتخاب از روابط زیر به دست می‌آید:  
 الف) نقاط با فواصل مساوی:

$$X_i = \frac{i-1}{N-1} a \quad i = 1, \dots, N_x \quad (20)$$

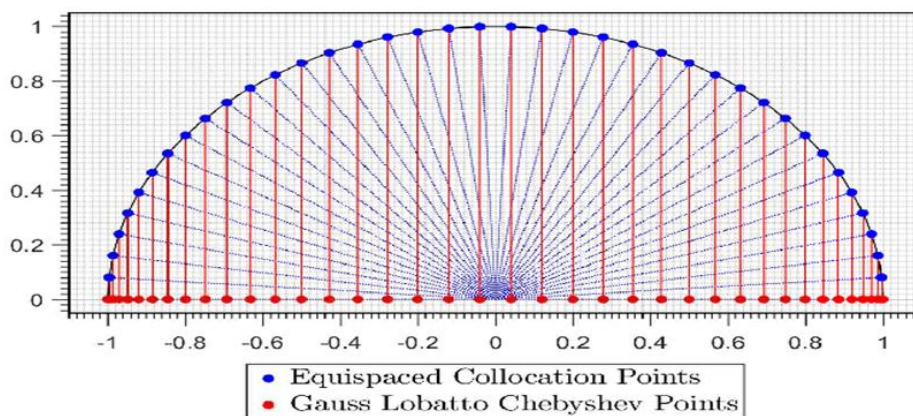
$$Y_i = \frac{i-1}{N-1} b \quad i = 1, \dots, N_y \quad (21)$$

ب) نقاط با فواصل نامساوی:

$$X_i = \frac{a}{2} \left\{ 1 - \cos \left( \frac{i-1}{N_x-1} \pi \right) \right\} \quad i = 1, \dots, N_x \quad (22)$$

$$Y_i = \frac{b}{2} \left\{ 1 - \cos \left( \frac{i-1}{N_y-1} \pi \right) \right\} \quad i = 1, \dots, N_y \quad (23)$$

که در عبارات فوق  $a$  و  $b$  به ترتیب طول بازه مورد نظر در راستاهای  $x$  و  $y$  و  $N_x$  و  $N_y$  بیان‌کننده تعداد گره‌ها در راستاهای مذکور می‌باشند.



شکل ۵ قیاس شبکه‌بندی با فواصل مساوی و نامساوی

این نقاط به عنوان نقاط چپیشف-گاووس-لباتو<sup>۱</sup> شناخته می‌شوند. این تقسیم‌بندی اولین بار توسط شو و ریچاردس پیشنهاد شد. تحقیقات نشان می‌دهد که با استفاده از تقسیم‌بندی مذکور می‌توان به نتایجی با دقت بالاتر دست یافت، لذا در این تحقیق از این نوع تقسیم‌بندی استفاده می‌شود. برای مثال اگر طول  $a=1$  و  $b=2$  باشد و تعداد گره‌ها را در هر دو راستا برابر ۱۰ در نظر گرفته شود، شبکه‌بندی با فواصل غیر مساوی به صورت شکل ۵ خواهد بود. همان‌طور که مشاهده می‌شود، در شبکه‌بندی با فواصل نامساوی، گره‌ها در نزدیکی مرزها به هم نزدیک‌تر می‌باشند و در نقاط دور از مزر فاصله بیشتری از یکدیگر دارند.

### ۳-۲- تعیین درایه‌های ماتریس ضرایب وزنی

ضرایب وزنی مورد استفاده در این روش از روابط زیر به دست می‌آیند. برای مشتق مرتبه اول می‌توان نوشت:

$$A_{ij}^{(1)} = \frac{M(X_i)}{(X_i - X_j)M(X_j)} \quad i, j = 1, \dots, N_x \quad j \neq i \quad (24)$$

$$B_{ij}^{(1)} = \frac{P(Y_i)}{(Y_i - Y_j)P(Y_j)} \quad i, j = 1, \dots, N_y \quad j \neq i \quad (25)$$

که در روابط فوق:

$$M(X_i) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N_x} (X_i - X_j) \quad (26)$$

$$P(Y_i) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N_y} (Y_i - Y_j) \quad (27)$$

و برای مشتقات بالاتر:

$$A_{ij}^{(n)} = n \left( A_{ii}^{(n-1)} A_{ij}^{(1)} - \frac{A_{ij}^{(n-1)}}{X_i - X_j} \right) \quad i, j = 1, \dots, N_x \quad j \neq i \quad (28)$$

$$B_{ij}^{(m)} = m \left( B_{ii}^{(m-1)} B_{ij}^{(1)} - \frac{B_{ij}^{(m-1)}}{Y_i - Y_j} \right) \quad i, j = 1, \dots, N_y \quad j \neq i \quad (29)$$

همچنین می‌توان نوشت:

$$A_{ii}^{(n)} = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N_x} A_{ij}^{(n)} \quad \begin{cases} i = 1, \dots, N_x \\ n = 1, 2, \dots, N_x - 1 \end{cases} \quad (30)$$

$$B_{ii}^{(m)} = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N_y} B_{ij}^{(m)} \quad \begin{cases} i = 1, \dots, N_y \\ n = 1, 2, \dots, N_y - 1 \end{cases} \quad (31)$$

با در نظر گرفتن معادله ۱۲ و ساده‌نویسی ضرایب با حروف، معادله حاکم بر دیسک به فرم معادله ۳۲ به دست می‌آید. معادله ۳۲ با روش مربعات دیفرانسیلی حل می‌شود. لازم به ذکر است در این مقاله جهت اعمال شرایط مرزی از روش اصلاح ماتریس ضرایب وزنی استفاده شده است.

$$Au'' + Bu' + Cu + D = 0 \quad (32)$$

<sup>1</sup> Chebyshev-Gauss-Lobatto

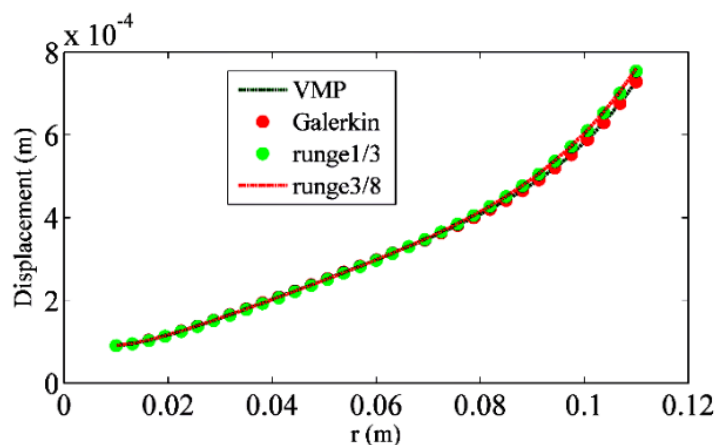
#### ۴- تحلیل ترموالاستیک یک دیسک FGM دوار خاص و صحت‌سنجی نتایج

در این قسمت یک دیسک FGM خاص با مشخصات هندسی و خواص مکانیکی جدول ۱ مورد تحلیل قرار می‌گیرد. لازم به ذکر است خواص مکانیکی در حالت وابسته به دما قرار داده شده است. در بررسی انجام شده شرط مرزی برای دیسک لحاظ شده است که در جدول ۱ آورده شده است. در این حالت اثر بار گسترده کششی ناشی از حذف پره‌ها و بار گسترده فشاری ناشی از اثر متقابل شافت به عنوان شرایط مرزی متفاوت به شکل شرط مرزی در جدول ۱ به مساله اضافه می‌شود (واحد تنش‌های مرزی پاسکال است). مشخصات ذکر شده در این جدول مربوط به دو ماده تیتانیوم و زیرکونیوم می‌باشد. شکل‌های ۶ تا ۱۵ به ترتیب نمودار تغییرات جابه‌جایی، تنش شعاعی و محیطی، کرنش شعاعی و محیطی برحسب شعاع دیسک، توسط هر دو روش را نشان می‌دهند. لازم به ذکر است صحت‌سنجی روش مربعات دیفرانسیلی استفاده شده در این تحقیق به کمک روش‌های VMP (تئوری مواد متغیر)، گلرکین، رانگ کوتا با نسبت ۱/۳ و رانگ کوتا با نسبت ۳/۸ استفاده شده در مرجع [۱۵] صورت پذیرفته است.

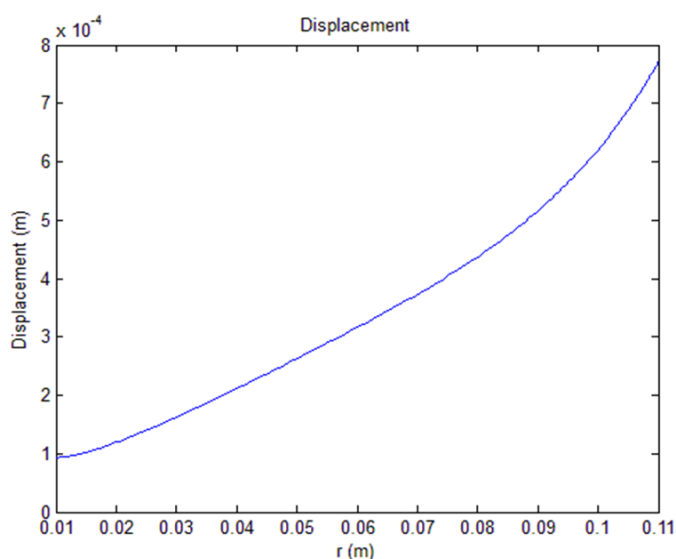
جدول ۱ مشخصات مکانیکی وابسته به دما در دیسک FGM دوار خاص [۱۵]

مقادیر		مشخصات مکانیکی	
سطح خارج	سطح داخل		
$244.27 \times 10^9$	$122.56 \times 10^9$	$P_0$	مدول الاستیسیته (Pa)
0	0	$P_{-1}$	
$-1.37 \times 10^{-3}$	$-4.59 \times 10^{-4}$	$P_1$	
$1.214 \times 10^{-6}$	0	$P_2$	
$-3.68 \times 10^{-10}$	0	$P_3$	
0.3	0.3		ضریب پواسون
3000	4429		چگالی ( $\frac{kg}{m^3}$ )
473	373		دما ( $^{\circ}K$ )
5670	5670		سرعت زاویه ای ( $\frac{rad}{s}$ )
$12.766 \times 10^{-6}$	$7.578 \times 10^{-6}$	$P_0$	ضریب انبساط حرارتی ( $\frac{1}{^{\circ}C}$ )
0	0	$P_{-1}$	
$-1.49 \times 10^{-3}$	$6.638 \times 10^{-4}$	$P_1$	
$1.006 \times 10^{-5}$	$-3.15 \times 10^{-6}$	$P_2$	
$-6.78 \times 10^{-11}$	0	$P_3$	
5		شاخص FGM	
$\sigma_r = -1343930$ ; $r = r_i$		(Pa) شرایط مرزی	
$\sigma_r = 6348111$ ; $r = r_o$			

شکل ۶ نمودار جابه‌جایی دیسک FGM دوار مرجع [۱۵] با روش‌های مختلف را نشان می‌دهد. همانطور که در شکل ۷ مشاهده می‌گردد روش GDQM مورد استفاده در این تحقیق نیز نموداری مشابه را به دست می‌دهد که حداکثر خطای آن با نمودار شکل ۶ به میزان ۳ درصد می‌باشد.

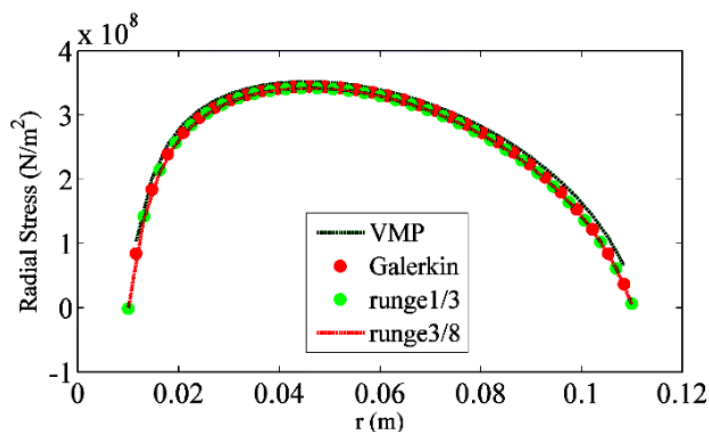


شکل ۶ نمودار جابه‌جایی دیسک FGM دوار مرجع [۱۵] با روش‌های مختلف

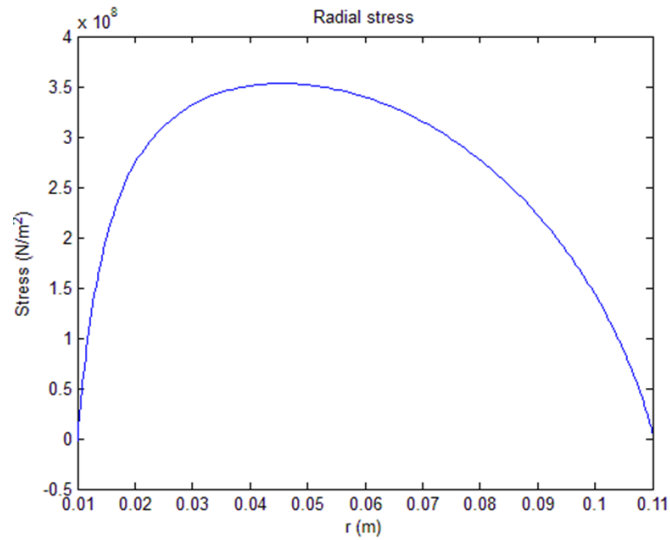


شکل ۷ نمودار جابه‌جایی دیسک FGM دوار خاص با روش GDQM

مقایسه شکل ۸ که نمودار تنش شعاعی دیسک FGM دوار مرجع [۱۵] با روش‌های مختلف را نشان می‌دهد با شکل ۹ که همین نمودار با روش GDQM استفاده شده در این تحقیق است میزان خطای ۴ درصد را در محاسبات نشان می‌دهد.

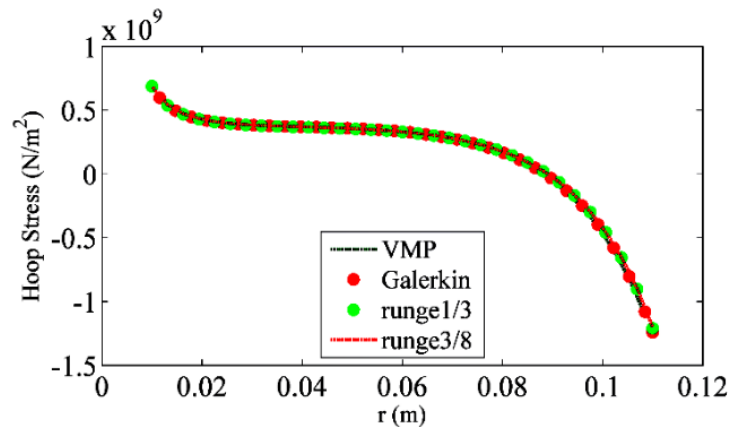


شکل ۸ نمودار تنش شعاعی دیسک FGM دوار مرجع [۱۵] با روش‌های مختلف

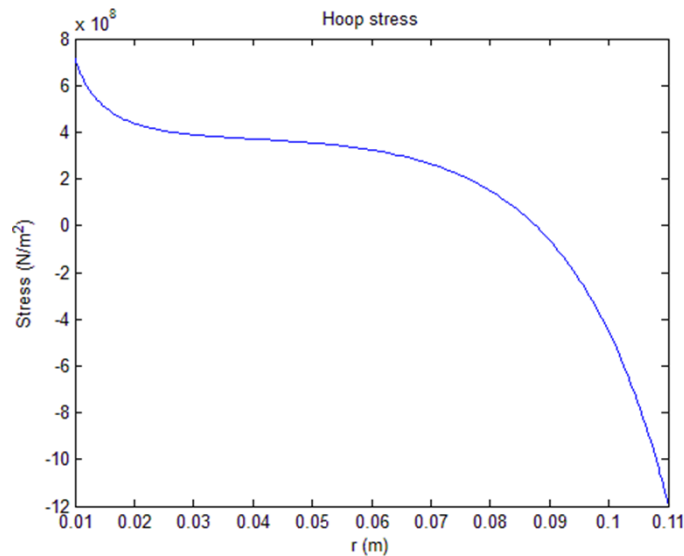


شکل ۹ نمودار تنش شعاعی دیسک FGM دوار خاص با روش GDQM

شکل ۱۰ نمودار تنش محیطی دیسک FGM دوار مرجع [۱۵] با روش‌های مختلف ترسیم شده است که مقایسه آن با تنش محیطی حاصل از روش GDQM در این تحقیق در شکل ۱۱، اختلاف حدود ۳ درصد را بیان می‌نماید.

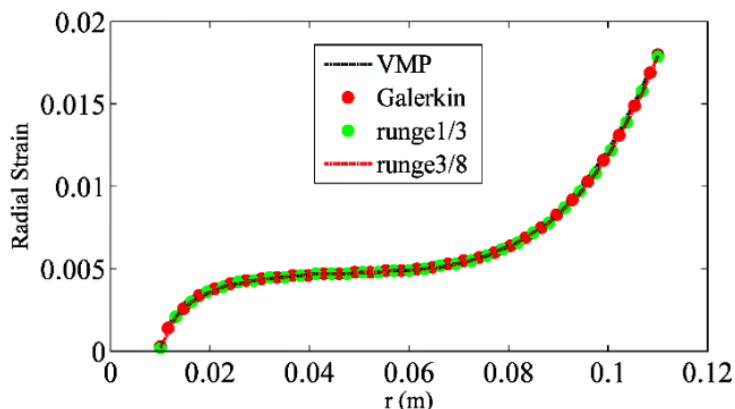


شکل ۱۰ نمودار تنش محیطی دیسک FGM دوار مرجع [۱۵] با روش‌های مختلف

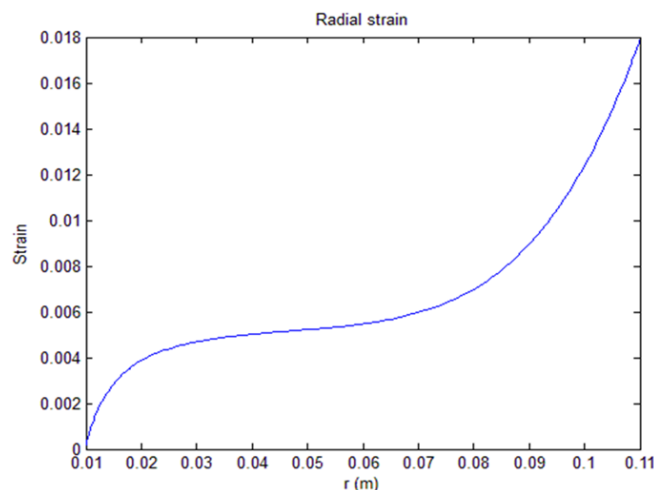


شکل ۱۱ نمودار تنش محیطی دیسک FGM دوار خاص با روش GDQM

در شکل ۱۲ نیز نمودار کرنش شعاعی دیسک FGM دوار مرجع [۱۵] با روش‌های مختلف ترسیم شده است که مقایسه آن با روش GDQM در این تحقیق در شکل ۱۳، اختلاف حدود ۳ درصد را نشان می‌دهد.

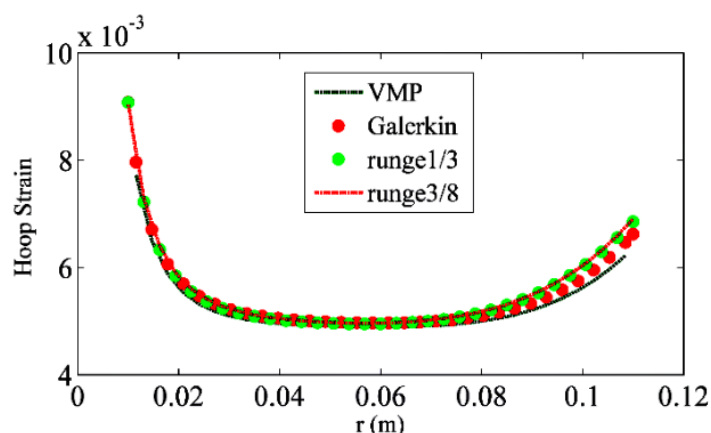


شکل ۱۲ نمودار کرنش شعاعی دیسک FGM دوار مرجع [۱۵] با روش‌های مختلف

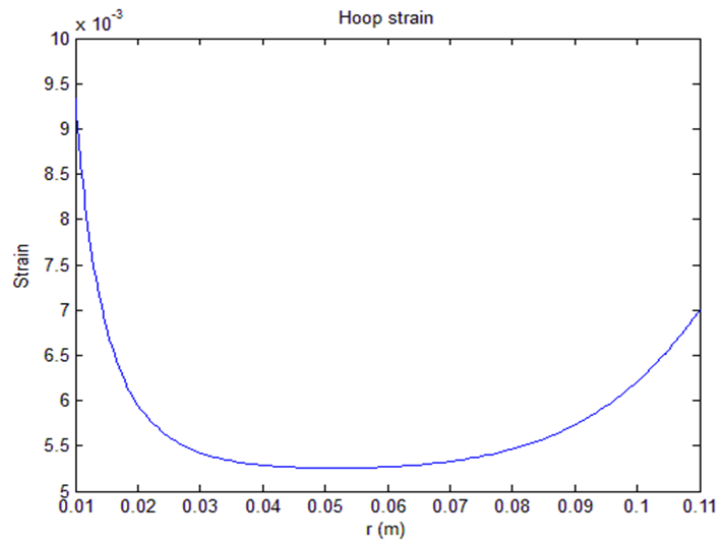


شکل ۱۳ نمودار کرنش شعاعی دیسک FGM دوار خاص به روش GDQM

مقایسه نمودار کرنش محیطی دیسک FGM دوار مرجع [۱۵] با روش‌های مختلف در شکل ۱۴ با نمودار حاصل از روش GDQM در شکل ۱۷ حاکی از اختلاف حداکثر ۵ درصد است.

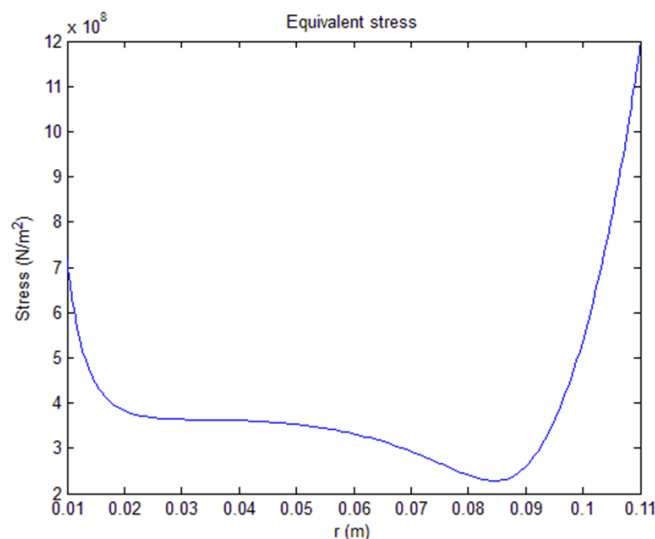


شکل ۱۴ نمودار کرنش محیطی دیسک FGM دوار مرجع [۱۵] با روش‌های مختلف



شکل ۱۵ نمودار کرنش محیطی دیسک دوار خاص با روش GDQM

بررسی نمودارهای ۶ تا ۱۵ و حداکثر اختلاف بین آنها، نشان می‌دهند که روش GDQM به کار گرفته شده در این تحقیق دارای دقت مناسبی است و قابلیت کاربرد در تحلیل دیسک‌های مشابه را دارد. در شکل ۱۶ نمودار تنش معادل با توجه به رابطه ۱۸ ترسیم شده است.



شکل ۱۶ نمودار تنش معادل دیسک دوار خاص با روش GDQM

## ۵- نتیجه‌گیری

در این تحقیق تحلیل ترموالاستیک دیسک دوار در موتور توربوشفت به روش مربعات دیفرانسیلی انجام شد. بارگذاری دیسک شامل بار گریز از مرکز ناشی از چرخش دیسک با سرعت زاویه‌ای مشخص، بار گسترده کششی وارد بر محیط خارجی دیسک ناشی از نیروی گریز از مرکز پره‌ها، بار گسترده فشاری ناشی از جا زدن دیسک بر روی شافت و بار حرارتی ناشی از گرادیان حرارتی بر روی دیسک می‌باشد. روش‌های پیاده شده جهت تحلیل تنش دیسک قابلیت استفاده در حالت‌های مختلف بارگذاری را دارند. در این تحقیق روش مربعات دیفرانسیلی در حالت بارگذاری در شعاع داخلی و خارجی دیسک و در نظر گرفتن خواص وابسته به دما دیسک دوار FGM در موتور توربین گاز هوایی پیاده‌سازی گردید. حالت بارگذاری و خواص وابسته به دما همراه با در نظر گرفتن اثر تیغه‌ها و شافت می‌باشند. نزدیکی و همخوانی قابل توجهی در نتایج این تحلیل با روش VMP به دست

آمد. در بررسی کلی روش‌های GDQM و VMP با هم، نزدیکی قابل قبول داشتند و بیشترین خطا در نمودارهای مختلف ۴ یا ۵ درصد مشاهده شد.

### Authorship Contribution Statement

**Dr. Behrooz Shahriari**



**Biography:** B. Shahriari was born in Isfahan, Iran in 1975. He received the B.S. in Mechanical Engineering and MSc. and PhD degrees in Aerospace Engineering from Malek Ashtar University of Technology in 2002 and 2012 and 2016, respectively. His current research interests are structural optimization and artificial intelligence.

**Contribution Statement:** Conceptualization, Methodology, Validation, Formal analysis, Investigation, Testing, Software, Visualization, Writing – original draft, Writing – review & editing.

**Mahdi Sharifi**



**Biography:** M. Sharifi received his MSc in Aerospace Engineering from Malek-Ashtar University of Technology in 2024. His field of research is structural design, analysis and optimization.

**Contribution Statement:** Conceptualization, Methodology, Formal analysis, Investigation, Testing, Software, Visualization, Writing – original draft, Writing – review & editing.

**Abdollah Godarzi**

**Biography:** A. Godarzi received his MSc in Mechanical Engineering from Malek-Ashtar University of Technology in 2018. His field of research is structural design, analysis and optimization.

**Contribution Statement:** Conceptualization, Methodology, Validation, Formal analysis, Investigation, Testing, Software, Visualization, Writing – original draft.

### ۶- مراجع

[1] Module 15 For B1 Certification, Gas Turbine Engine, Aviation Maintenance Technician Certification Series, Aircraft Technical Book Company, 2019.

- [2] Farokhi S. Aircraft propulsion: cleaner, leaner, and greener. John Wiley & Sons, 2021.
- [3] Jahed H, Bidabadi J. An axisymmetric method of creep analysis for primary and secondary creep. International journal of pressure vessels and piping. 2003; 80(9): 597-606.
- [4] Kordkheili SH, Naghdabadi R. Thermoelastic analysis of a functionally graded rotating disk. Composite Structures. 2007; 79(4): 508-516.
- [5] Farhatnia F, Bagheri MA, Ghobadi A. Buckling analysis of FGM thick beam under different boundary conditions using GDQM. Advanced Materials Research. 2012; 433: 4920-4924.
- [6] Vakili-Tahami F, Rasoulian A, Fard AMA. Comparison of Different Methods for Thermoelastic Analysis of Functionally Graded Rotating Disks. Mechanical Engineering. 2015; 45(2): 65-75, 2015. (in persian).
- [7] Sadeghi H, Ziaei S, Khoshro M. Analysis of variable thickness and heterogeneous FG rotating disc under temperature gradient and specific boundary conditions. Presented at the 22nd Annual International Conference on Mechanical Engineering, 2014. (in persian).
- [8] Torabi K, Afshari H. Thermo-Mechanical Stress Analysis in a Rotating Radially Graded FG-Disk with Non-Uniform Thickness. Amirkabir Journal Mechanical Engineering. 2018; 50(1): 33-46. (in persian).
- [9] Cveticanin L. Homotopy-perturbation method for pure nonlinear differential equation. Chaos, Solitons & Fractals. 2006; 30(5): 1221-1230.
- [10] Singh S. One parameter model for creep in a whisker reinforced anisotropic rotating disc of Al-SiCw composite. European Journal of Mechanics-A/Solids. 2008; 27(4): 680-690.
- [11] Pan E, Han F. Exact solution for functionally graded and layered magneto-electro-elastic plates. International Journal of Engineering Science. 2005; 43(3-4): 321-339.
- [12] Jalali MH, Shahriari B. Elastic Stress Analysis of Rotating Functionally Graded Annular Disk of Variable Thickness Using Finite Difference Method. Mathematical Problems in Engineering, 2018.
- [13] Yousefi Sh, Shahriari B, Sadeghinezhad MS. Elastic analysis of the rotating FGM spool drum of the axial compressor in aero gas turbine engine. 2020; 5(2): 55-66.
- [14] Shahriari B, Sadeghi Nezhad MS. Investigation on Effective Factors in Thermoelastic Analysis of FGM Rotating Drum in Air Turbine Engine under Nonlinear Thermal Loading, "Mechanic of Advanced and Smart Materials. 2020; 1(2): 106-135.
- [15] Shahriari B, Safari M. Stress Analysis of FGM Rotating Disk Subjected to Mechanical and Thermal Loads In Aircraft Gas Turbine Engine. Mechanics of Advanced Composite Structures. 2020; 7(1): 1-13. doi: 10.22075/mac.2019.14780.1145.
- [16] Jafari Mehrabadi S, NezamAbadi A, Moayeedi E. Deflection analysis of composite micro-beam on elastic foundation by strain gradient theory. Mechanic of Advanced and Smart Materials. 2022; 2(1): 94-107.
- [17] Shahriari B, Seddighi N. Stress analysis of non-linearly variable thickness rotating disk in gas turbine engine using hyper-geometric method. Journal of Simulation and Analysis of Novel Technologies in Mechanical Engineering. 2023; 15(2): 37-51.