

Large deformation analysis of functionally graded cylinder under extension-torsion: analytical closed form and finite element solutions

Ali Taheri ^{a*}

^a Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, University of Larestan, Larestan, 7431813115, Iran

Original Article

Use your device to scan
and read the article online



Citation: Taheri A. Large deformation analysis of functionally graded cylinder under extension-torsion: analytical closed form and finite element solutions. *Mechanics of Advanced and Smart Materials*. 2024;4(1):20-39.

 <https://10.61186/masm.4.1.20>

KEYWORDS

Extension-torsion,
Rubber-like cylinder,
Functionally graded material,
Hyperelastic material,
Finite element method.

ABSTRACT

In this study, an analytical solution has been developed to examine the mechanical behavior of an incompressible functionally graded hyperelastic cylinder subjected to simultaneous extension and torsion. The recently proposed exp-exp strain energy density is employed to predict the behavior of hyperelastic material, and its related material parameters are assumed to vary along the radial direction in an exponential fashion. Finite element analysis is conducted by preparing a user-defined UHYPER subroutine in ABAQUS to evaluate the proposed analytical solutions. FEM results and those of the analytical solution are in good agreement for various stretches and twists and reveal that the form of stress distributions and the maximum stress depend on the exponential power in the material variation function. In contrast to axial stretch, the effect of twist on the distribution of longitudinal stress is more complicated, and for large twists, two extrema in the stress distribution plot are observed, which move toward the center and outer surface of the cylinder on further twisting. Moreover, the longitudinal stress controls the variation of von-Mises and strain energy density throughout the radial direction. Additionally, considering an axial stretch, a point is identified where the axial force arising from torsion is compressive for stretches below this value, and it brings about the cylinder to elongate under twisting. However, this part of the total axial force varies from a tension state to a compression one for larger stretches, i.e., by increasing the twist, the cylinder first tends to shorten and then elongates on further twisting.

Extended Abstract

1. Introduction

Stretchable materials play the crucial role in the industrial applications including designing sensors and actuators [1], soft microfluidic devices [2], microchannel of conductive liquid [3] and tissue engineering [4]. Regarding the vast application of stretchable materials such as elastomers, rubber-like materials and hydrogels, these materials have been studied in numerous problems [5-8]. Specifically, the problem of extension-torsion and its preliminary discussions for nonlinear elastic material has been firstly presented by Rivlin [9, 10]. While, the multifarious applications of hyperelastic materials in addition to the similar response of these materials in comparison with soft biological tissues draw a great deal of researchers' attention. Besides, the problem of

* Corresponding author. Tel.: +987152265604

E-mail address: taheri@lar.ac.ir

DOI: <https://10.52547/masm.4.1.20>

Received: February 03, 2024; Received in revised form: February 13, 2024; Accepted: March 12, 2024.

© Author



Extension-torsion is known as a vital practical experimental method to identify the mechanical response of soft biological tissue, i.e., papillary muscles which are located in the heart [11, 12].

However, despite the numerous researches in linear elasticity of FGMs, a few studies on the mechanical behaviour of hyperelastic FGMs are available, and more importantly, the combined extension and torsion loading of FG rubber-like materials still appears to be lacking. Hence, in the present study, the extension and torsion which is crucially important to be used in soft biological tissues are studied for an FG circular cylinder composed of nonlinear incompressible isotropic material. The invariant-based exp-exp energy density function proposed by Mansouri et al. [23] is utilized due to its mathematical simplicity, stability of the model while considering first and second strain invariants, and the conformity of the models results and experimental data. Furthermore, the finite element analysis is included in the present investigation to verify the proposed analytical solutions by developing a user-defined subroutine (UHYPER) in ABAQUS. This FE analysis is included in the present investigation to verify the proposed analytical solutions by developing an ABAQUS user material subroutine, UHYPER.

2. Extension-torsion of cylinder composed of hyperelastic material

In nonlinear elasticity, the mechanical characteristics of hyperelastic materials are defined by introduction of strain energy density functions W . Furthermore, considering F as the deformation gradient, the preliminary frameworks of nonlinear elasticity is defined. The left Cauchy-Green tensor is determined as $B = FF^T$. Assuming the invariant-based strain energy, a hyperelastic constitutive law can be defined as:

$$S = 2 \frac{\partial W}{\partial C} \quad (1)$$

in which, tensor S stands for second Piola-Kirchhoff stress. Assuming $J = \det(F)$, we have:

$$\sigma_i = \frac{\lambda_i}{J} \frac{\partial W}{\partial \lambda_i} \quad (2)$$

Reminding that the modified material parameters for FGMs introduced in equation (17) varies in the radial direction, hence, the material parameters considered in this paper are assumed to alter along the radial direction in an exponential fashion as follows:

$$\begin{aligned} x(R) &= x_{in} + (x_{out} - x_{in}) \frac{\exp(k(R - R_{in})) - 1}{\exp(k) - 1} \quad \text{for } k \neq 0 \\ x(R) &= x_{in} + (x_{out} - x_{in}) \frac{(R - R_{in})}{(R_{out} - R_{in})} \quad \text{for } k = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

where ξ stands for any material parameters and subscript *in*, and *out* denotes the parameters correspondent with the materials at the centre and outer surface of the cylinder, respectively.

Henceforth, we further investigate the influences of torsion on the generated total axial force of hyperelastic cylinder. Assuming $N_0(\gamma_0)$ stands for the amount of axial force generated by axial stretch γ_0 in the absence of torsional twist ($\tau = 0$), $N_T(\gamma_0, \tau)$ is the portion of axial force created by the applied torsional twist. Thus, the total axial force generated by the external extension-torsion loading is defined as:

$$N = N_0(\gamma_0) + N_T(\gamma_0, \tau) \quad (4)$$

Considering the amount of axial load generated by specified stretch, the portion of axial force induced from the external torsional twist looks to be crucially important to specify the direction and magnitude of the resultant total longitudinal force. Examining the variation of contribution of axial force arising from torsion, the derivative of the longitudinal force of hyperelastic cylinder with respect to the applied torsional twist is studied. Utilizing the exp-exp strain energy function and equation (15), the torsional moment generated in cylinder and also total axial force are calculated as:

$$N = 2\pi \int_0^{R_{out}} \left[\begin{aligned} &-2\gamma\tau^2 \int_R^{R_{out}} (\zeta A_1^*(R) m_1^*(R) e^{m_1^*(R)(\gamma^2 + 2\gamma^{-1} + \gamma\tau^2 R^2 - 3)}) d\zeta \\ &+ 2(\gamma^2 - \gamma^{-1}) A_1^*(R) m_1^*(R) e^{m_1^*(R)(\gamma^2 + 2\gamma^{-1} + \gamma\tau^2 R^2 - 3)} \\ &+ 2(\gamma - \gamma^{-2} - \tau^2 R^2) B_1^*(R) n_1^*(R) e^{n_1^*(R)(2\gamma + \gamma^{-2} + \tau^2 R^2 - 3)} \end{aligned} \right] dR. \quad (5)$$

3. Finite Element Model

Taking into account that FE analysis for the problem of extension-torsion of circular cylinder composed of FG materials has not been carried out before, a 3-dimensional FE modelling is generated in the present study to verify the proposed analytical solutions. A user-defined UHYPER subroutine is written to be utilized for defining the strain energy function and its pertained material parameters. The 3D model is divided into several subsections through the radial direction as layers, where a set of constant material parameters correspondent with the radial position is assigned to each layer. Figure 1 depicts the schematics of 3D FE model with its mesh network using 3D stress element (C3D8H). The optimum number of layers for accurate and reliable FE analysis of extension-torsion is discussed in the following section. Ensuring the convergence of the FE modeling, the mesh independency is checked for various results.

4. Results and discussion

Applying the presented analytical solution to exp-exp constitutive model, the stress distribution and resultant total axial force and moment for an FG hyperelastic cylinder subject to combined extension and torsion is evaluated. In addition, the results of the FE analysis are used to evaluate the analytical solutions.

In the present study, the hyperelastic materials at the centre and outer surface of the FG cylinder are chosen to be VHB 4905, and natural-rubber gum, respectively and their relevant material parameters of exp-exp model are presented in Table 1 which are calculated using least squares regression approach [24].

Table 1. The exp-exp model parameters and initial shear modulus of VHB 4905 and natural-rubber gum [23].

Utilized material	Model parameters	Initial shear modulus μ_0
VHB 4905	$A_1 = 0.240, m_1 = 0.024$ $B_1 = 0.799, n_1 = 0.049$	0.375
natural-rubber gum	$A_1 = 64.50, m_1 = 0.0031$ $B_1 = 304.0, n_1 = 0.000035$	1.257

Parameter k controls the form and intensity of the material variation throughout the radial direction. Various values of k are considered to study its effect on the stress distribution. For instance, the variation of A_1^* throughout the radial direction is illustrated in Figure 1. It is worth mentioning that the distribution of other material parameters has a similar trend to that of A_1^* .

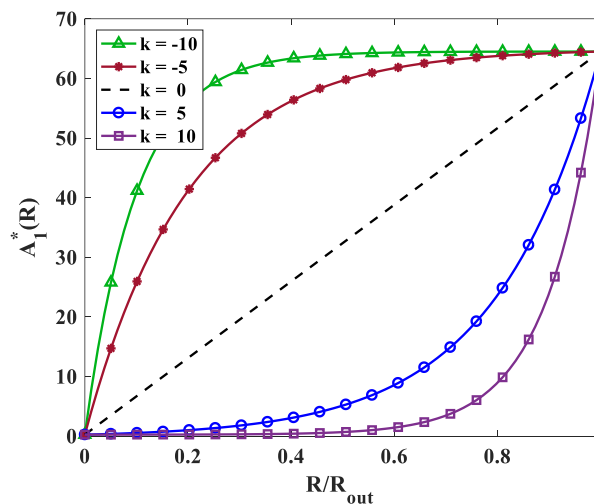


Figure 1. Distribution of material parameter A_1^* throughout the radial direction considering various amount of k

Figure 3 (a) illustrates the variation of radial stress throughout the radius for $\gamma = 1.25, \tau = 1$ and $k = 0$ considering different number of layers in FE modelling of FG cylinder. Obviously, rising the number of strips in FGM modelling increases the accuracy and reliability of the results. However, considering the fact that increasing the number of layers results in time-consuming computations, an optimum number of layers that guarantees a good agreement with analytical results should be identified to reduce the computational cost. It is evident in Figure 3 that for 80 layers, an excellent agreement between the analytical solutions and FE analysis is achieved. In addition, it is apparent that the radial stress begins from an extremum value appearing at the centre and becomes zero at the outer surface which reflects the stress-free condition at outer radius $R/R_{out} = 1$. The variation of the

dimensionless hoop and longitudinal stress for $\gamma = 1.25$, $\tau = 1$, $k = 0$ and various number of layers are plotted in Figure 3 (b and c), respectively. Similar to the radial stress, for 80 layers, the results are in a great agreement with those of analytical calculations. Although the longitudinal stress is positive throughout the radial direction, approaching the exterior surface from the central point of the cylinder, the hoop component of the stress converts from negative to positive.

5. Summary and Conclusion

In the present study, the mechanical behavior of an incompressible isotropic functionally graded hyperelastic circular cylinder subjected to combined extension and torsion was investigated. The material was assumed to alter exponentially through the radial direction. The VHB 4905 and natural-rubber gum were assigned as the materials of the center and the outer surface of the cylinder, respectively. The exponential strain energy density was employed in this paper due to the mathematical stability and simplicity and its great conformity with the experimental observation during various loadings to predict the behavior of cylinder made of FG hyperelastic material. Finite element analysis was conducted by developing an ABAQUS user-material UHYPER subroutine to evaluate the presented analytical solutions. After identifying the optimum number of layers to model the FG cylinder, a mesh independency study was conducted to achieve an accurate and reliable FE analysis. Results revealed that the distribution of the stress and the location of maximum stress strongly depends on the exponential power in material variation function. The radial, tangential and longitudinal stress distribution was evaluated for different amounts of torsional twist and longitudinal stretch. The radial stress regardless of the value of the twist or stretch starts from a maximum compressive value at the center and vanishes at the outer surface. Moreover, independent from the magnitude of the twist or axial stretch, the hoop stress distribution plots intersect approximately at $R/R_{out} = 0.53$ where the hoop component of stress alters from the compressive value to tensile one. Although increasing the axial stretch had no effect on the location of the maximum longitudinal stress, a different scenario was observed for the effect of the twist. For $\tau = 1$ the maximum longitudinal stress took place approximately at $R/R_{out} = 0.5$, while on further twisting two extrema appeared in the stress distribution plot which moved toward the center and outer surface of the hyperelastic cylinder. Moreover, the longitudinal stress dominated the form of the variation and value of the von-mises and strain energy density throughout the radial direction. For negative k 's, the variation of the total moment and axial force was relatively smooth while for positive amounts of k , the rate of variation was intensified. Moreover, the total force, generated in the longitudinal direction, altered from an initial tensile to a final compressive one due to the effect of torsion. However, a specific alteration point was obtained for the axial stretch, where $\partial N/\partial \tau = 0$. Therefore, for $\gamma < \gamma_{alteration}$, the contribution of axial force arising from torsion, N_T was always compressive which implies that the length of the cylinder always tends to elongate when the external twist applies while for the stretches larger than the alteration value $\gamma > \gamma_{alteration}$, N_T changes from the tensile to compressive, i.e. the cylinder begins to shorten and then elongate by increasing the torsional twist.



تحلیل تغییر شکل بزرگ استوانه تابعی تحت بارگذاری کشش-پیچش: حل تحلیلی والمان محدود

علی طاهری الف*

الف استادیار، دانشکده فنی و مهندسی، مجتمع آموزش عالی لارستان، لارستان، ایران، taheri@lar.ac.ir

واژگان کلیدی	چکیده
استوانه هایپرالاستیک، بارگذاری کشش- پیچش، ماده تابعی، ماده هایپرالاستیک، حل المان محدود.	در این مطالعه، یک راه حل تحلیلی برای بر سر سی رفتار مکانیکی یک استوانه هایپرالاستیک با جنس تابعی و تراکم ناپذیر که تحت کشش و پیچش همزمان قرار دارد، ارائه شده است. روش چگالی انرژی کرنش نمایی-نمایی که اخیراً ارائه شده برای پیش بینی رفتار ماده هایپرالاستیک استفاده می شود و فرض می شود پارامترهای مواد مرتبط با آن در امتداد جهت شعاعی به صورت نمایی تغییر می کنند. تحلیل المان محدود با تهیه یک زیر برنامه UHYPER در ABAQUS برای اعتبار سنجی راه حل تحلیلی پیشنهادی انجام می شود. نتایج المان محدود و نتایج حل تحلیلی برای کشش و پیچش های مختلف مطابقت خوبی دارند و نشان می دهند که شکل توزیع تنش و حداکثر تنش به توان نمایی در تابع تغییرات مواد بستگی دارد. بر خلاف کشش محوری، تأثیر پیچش بر توزیع تنش طولی پیچیده تر است و برای پیچش های بزرگ، دو اکسترمم در نمودار توزیع تنش مشاهده می شود که در پیچش های بیشتر به سمت مرکز و سطح بیرونی استوانه حرکت می کند. علاوه بر این، تنش طولی تغییرات فون میز و چگالی انرژی کرنش را در سراسر جهت شعاعی کنترل می کند. علاوه بر این، با در نظر گرفتن کشش محوری، نقطه ای مشخص می شود که نیروی محوری ناشی از پیچش برای کشش های زیر این مقدار فشاری است و باعث می شود که سیلندر تحت پیچش افزایش طول یابد؛ اما این قسمت از کل نیروی محوری از حالت کششی به حالت فشاری تغییر می کند. در واقع با افزایش پیچش، استوانه ابتدا کوتاه شده و سپس در پیچش بیشتر کشیده می شود.
تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۱۱/۱۴	
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۲/۱۱/۲۴	
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۱۲/۲۲	

۱- مقدمه

مواد کشش پذیر دسته ای از مواد هستند که با توجه به خواصشان در سالهای اخیر کاربردهای مختلفی برای آنها در نظر گرفته شده و به نظر می رسد در آینده نیز بیشتر مورد توجه قرار گیرند. از جمله کاربردهای مهم این مواد استفاده از آنها در حسگرها است [۱]. این مواد با توجه به میزان انعطاف پذیری و تغییر شکل، نه تنها در حسگرها بلکه در سایر قطعات الکترونیکی نیز کاربردهای خاصی خواهند داشت [۲]، خاصیت مقاومت در برابر خستگی این مواد نیز مورد توجه قرار گرفته است [۳] و البته یکی از مهم ترین کاربردهای آن استفاده در مهندسی بافت و بیومکانیک است [۴]. با توجه به کاربرد گسترده مواد کشش پذیر مانند الاستومرها، مواد شبه لاستیکی و هیدروژل ها، این مواد در مسائل متعددی مورد مطالعه قرار گرفته اند [۵-۸]. به طور خاص، مسئله کشش-پیچش و بحث های اولیه آن برای مواد الاستیک غیر خطی ابتدا توسط ریولین [۹، ۱۰] ارائه شده است. در حالی که کاربردهای متنوع مواد هایپرالاستیک علاوه بر رفتار مشابه این مواد در مقایسه با بافت های نرم بیولوژیکی، توجه بسیاری

از پژوهشگران را به خود جلب کرده است. علاوه بر این، مشکل اکستنشن-پیچ خوردگی^۱ به عنوان یک روش تجربی عملی حیاتی برای شناسایی پاسخ مکانیکی بافت نرم بیولوژیکی، و به صورت خاص عضلات پاپیلاری^۲ که در قلب قرار دارند، شناخته شده است [۱۱، ۱۲].

در مکانیک غیرخطی، خواص مواد شبه لاستیکی با استفاده از تابع چگالی انرژی کرنش، با خاصیت هایپرلاستیسیتیه مورد بررسی قرار می‌گیرد. مدل‌های ساختاری میکرو مکانیکی و مدل‌های مبتنی بر رفتار متنوعی برای بررسی خواص مکانیکی مواد غیرخطی-لاستیک ارائه شده‌اند [۱۳-۱۶]. همچنین، پان و ژون [۱۷] یک مدل ساختاری ویسکوالاستیک برای لاستیک‌ها ارائه کردند که با برهم‌نهی مدل‌های ویسکوز نئو هوک و مدل ویسکوز کانولوشن^۳ به دست آمد. بعدها، لویز-کمپوس و همکاران [۱۸] برای مطالعه رفتار مواد الاستومری با در نظر گرفتن غیرخطی بودن هر دو بخش الاستیک و ویسکوالاستیک، مدلی ساختاری برای مواد ویسکو-هایپرلاستیک ارائه کردند.

به طور کلی، یک تابع انرژی کرنش مناسب تابعی با فرم ریاضی نسبتاً ساده، تعداد کافی و موثر پارامترهای خواص مواد، سازگار با مشاهدات تجربی و قابلیت پیش‌بینی رفتار مواد تحت بارگذاری چند محوری است [۱۹]. در سال‌های اخیر، با الهام از کارهای پیشگام، مطالعات زیادی به پیشنهاد یا اصلاح اشکال جدیدی از توابع انرژی کرنش سازگار با مشاهدات تجربی مواد همگن الاستومری و کامپوزیت اختصاص یافته است.

بچیر و همکاران [۲۰] یک مدل نئوهوک اصلاح شده را پیشنهاد کردند و آزمایش‌های تجربی را برای همبستگی پارامترهای مدل انجام دادند. خواجه سعید و همکاران [۲۱] دو مدل ساختاری برای مواد شبه لاستیکی ارائه کردند که انرژی کرنش دارای روند لگاریتمی و نمایی بودند. با کمک سری‌های نمایی و تابع انرژی کرنشی، دریجانی و همکاران [۲۲] یک مدل ساختاری را برای مواد هایپرلاستیک ارائه دادند. بعدها، منصوری و دریجانی [۲۳] با استفاده از توابع نمایی، یک مدل ساختاری هایپرلاستیک را به عنوان تابعی از متغیرهای کرنش فرض کردند. علاوه بر سادگی و استفاده از متغیر سوپیه دوم، سازگاری این مدل با آزمایش‌های تجربی مختلف بافت‌های بیولوژیکی و مواد فوق الاستیک، مزیت جالب مدل ساختاری آن‌ها است. علاوه بر این، غیرخطی بودن روابط بار با افزایش طول را می‌توان در مطالعات با استفاده از سایر مدل‌های سازنده یافت [۲۴].

اخیراً، مواد تابعی از نظر عملکردی به دلیل کاربرد همه جانبه خود، مورد توجه زیادی قرار گرفته‌اند و به طور گسترده در سیستم‌های مهندسی مورد استفاده قرار گرفته‌اند. تغییر مواد از طریق مواد تابعی و امکان کنترل این تغییرات و افزایش توزیع تنش هنگام اعمال بر بارگذاری حرارتی و مکانیکی، مواد تابعی را به یک فناوری منحصربه‌فرد و یک راه‌حل عملی در بسیاری از مسائل مهندسی تبدیل کرد. علاوه بر این، به دلیل رفتار مکانیکی برجسته مواد هایپرلاستیک و کاربرد گسترده مداوم آن‌ها در سازه‌های مهندسی از مقیاس نانو تا ماکرو، برخی از محققان تمرکز خود را بر روی توصیف رفتار مکانیکی مواد تابعی ساخته شده از مواد فوق الاستیک قرار داده‌اند. عنانی و رحیمی [۲۵] توزیع تنش را در یک پوسته کروی ضخیم تحت فشار فوق الاستیک تابعی با استفاده از مدل نئوهوکی اصلاح‌شده تعیین کردند. بیلگیلی [۲۶] ناهمگنی تنش-کرنش را در یک لوله توخالی هایپرلاستیک تابعی بررسی کرد که در آن دما و کرنش سختی و تغییر مدول برشی در امتداد شعاع در چارچوب مدل‌های نئوهوکی و جنت^۴ تعمیم یافته مدل‌سازی شد. عنانی و رحیمی [۲۷] راه حلی را برای تعیین توزیع تنش در یک پوسته کروی هایپرلاستیک تابعی پیشنهاد کردند. آن‌ها از یک مدل نئوهوکی تقویت شده استفاده کردند و پارامترهای مواد را با استفاده از آزمایشات تجربی کالیبره کردند. در مطالعه دیگری، آن‌ها رفتار پوسته استوانه‌ای دوار را با استفاده از تابع انرژی کرنش برای یک ماده هایپرلاستیک تابعی تجزیه و تحلیل کردند [۲۸]. عنانی و رحیمی [۲۹] یک مدل ساختاری جدید برای توصیف رفتار ویسکو-هایپرلاستیک مواد لاستیکی تابعی همسانگرد عرضی با در نظر گرفتن مدل ماکسول^۵ ارائه کردند. تأیید تجربی در کار آنها نشان

¹ extension-torsion

² Papillary muscles

³ neo-Hookean and convolution viscous models

⁴ Gent models

⁵ Maxwell model

داد که مدل ارائه شده برای پیش‌بینی تغییر شکل وابسته به زمان لاستیک‌ها کارآمد است. پاسکن و کودا [۳۰] از یک تحلیل المان محدود چهاروجهی مرتبه بالا برای مطالعه تغییر شکل‌های بزرگ مواد هایپیرلاستیک درجه‌بندی شده عملکردی استفاده کردند. تحلیل تنش و پایداری مخازن تحت فشار تابعی ساخته شده از مواد هایپیرلاستیک تحت تغییر شکل‌های بزرگ توسط معلمی و همکاران انجام شده است [۳۱]. همچنین در تحقیقی دیگر با استفاده از تابع انرژی کرنش نمایی-نمایی و در نظر گرفتن یک استوانه هایپیرلاستیک تابعی، الماسی و همکاران [۳۲] یک راه‌حل تحلیلی برای مخازن تحت فشار، همراه با بار حرارتی ارائه کردند.

مسئله پیچش-کشش توسط بسیاری از محققین مورد مطالعه قرار گرفته است. همفری و همکاران [۳۳] تغییر شکل بزرگ کشش-پیچش ترکیبی یک استوانه ساخته شده از مواد هایپیرلاستیک همگن عرضی همسانگرد را بررسی کردند. آن‌ها مدل ساختاری را با داده‌های عضلات پاپیلاری کالیبره کردند. این مساله همچنین برای مدل معروف اوگدن^۶ توسط اوگدن و چادویک [۳۴] مورد بحث قرار گرفت. کانر و هورگان [۳۵] با مطالعه اثرات کرنش سختی مواد شبه لاستیکی، تحقیقی را در مورد پیچش-کشش سیلندر انجام دادند و مدل‌های ساختاری مختلفی از جمله گنت [۱۶] و فانگ [۳۶] را مقایسه کردند. این مشکل نیز توسط هورگان و مورفی [۳۷] با استفاده از مدل وارگا [۳۸] مورد مطالعه قرار گرفت. مشکل پیچش بر روی امتداد حتی برای هایپیرلاستیک همسانگرد عرضی با در نظر گرفتن خواص بافت نرم مورد بررسی قرار گرفت [۳۹].

با این حال، علیرغم تحقیقات متعدد در مورد کشش خطی مواد تابعی، مطالعات کمی در مورد رفتار مکانیکی مواد تابعی هایپیرلاستیک در دسترس است، و مهمتر از آن، به نظر می‌رسد که ترکیبی از گسترش و بارگذاری پیچشی مواد لاستیک مانند تابعی هنوز وجود ندارد. از این‌رو، در مطالعه حاضر، کشش و پیچش که برای استفاده در بافت‌های بیولوژیکی نرم بسیار مهم است برای یک استوانه دایره‌ای ساخته شده از مواد تابعی متشکل از مواد همسانگرد تراکم‌ناپذیر غیرخطی مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در تابع چگالی انرژی نمایی-مبتنی بر ثابت پیشنهاد شده توسط منصوری و همکاران [۲۳] پایداری مدل با در نظر گرفتن متغیرهای کرنش اول و دوم، و انطباق نتایج مدل‌ها و داده‌های تجربی مورد استفاده قرار می‌گیرد. علاوه بر این، تجزیه و تحلیل اجزای محدود در تحقیق حاضر گنجانده شده است تا راه‌حل‌های تحلیلی پیشنهادی را با توسعه یک زیربرنامه تعریف شده توسط کاربر (UHYPER) در ABAQUS اعتبارسنجی کند.

در این مقاله در بخش ۲، مقدمات مدل‌سازی ساختاری و سینماتیک مسئله کشش-پیچش مورد بحث قرار می‌گیرد، و در بخش‌های فرعی مربوط به آن، یک راه‌حل تحلیلی شکل بسته برای تابع انرژی کرنش مبتنی بر متغیر و یک مدل نمایی-نمایی پیشنهاد شده است. در بخش ۳، مدل‌سازی المان محدود ترکیبی کشش و پیچش یک استوانه هایپیرلاستیک تابعی به طور خلاصه مورد بحث قرار می‌گیرد. بخش ۴ به نتایج و بحث در مورد تحقیقات حاضر می‌پردازد. در نهایت، خلاصه و نتیجه‌گیری در بخش ۵ ارائه شده است.

۲- بارگذاری کشش-پیچش یک استوانه هایپیرلاستیک

در کشش غیرخطی، ویژگی‌های مکانیکی مواد هایپیرلاستیک با معرفی توابع چگالی انرژی کرنش (W) تعریف می‌شود. علاوه بر این، با در نظر گرفتن F به عنوان گرادیان تغییر شکل، چارچوب‌های اولیه الاستیسیته غیرخطی تعریف می‌شود. تانسور کوشی-گرین سمت چپ^۷ به صورت $B = FF^T$ مشخص شده است. با فرض انرژی کرنشی مبتنی بر نامتغیر^۸، یک معادله ساختاری هایپیرلاستیک را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$S = 2 \frac{\partial W}{\partial C} \quad (1)$$

که در آن S تنش دوم پایولا-کیرشهف است. با فرض $J = \det(F)$ داریم:

^۶ Ogden model

^۷ The left Cauchy-Green tensor

^۸ invariant-based strain energy

$$\sigma_i = \frac{\lambda_i \partial W}{J \partial \lambda_i} \quad (۲)$$

که در آن σ_i تنش های اصلی کوشی است. با در نظر گرفتن تعریف B، نامتغیرهای کرنش به صورت زیر خواهند بود [۶]:

$$\begin{aligned} I_1 &= \text{tr } B = l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 \\ I_2 &= \frac{1}{2}(\text{tr } B)^2 - \text{tr } B^2 = l_1^2 l_2^2 + l_2^2 l_3^2 + l_3^2 l_1^2 \\ I_3 &= \det B = l_1^2 l_2^2 l_3^2 \end{aligned} \quad (۳)$$

که در آن $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ تغییر طول در جهت های اصلی هستند. با توجه به تراکم ناپذیری، حجم استوانه باید ثابت بماند که در نتیجه آن $\det F = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$.

با در نظر گرفتن استوانه ای دایره ای متشکل از مواد هایپرالاستیک همسانگرد تراکم ناپذیر که تحت کشش در جهت طولی و پیچش قرار گرفته اند، مختصات تغییر شکل نیافته و تغییر شکل یافته را می توان به ترتیب (R, θ, Z) و (r, θ, z) فرض کرد. بنابراین، داریم:

$$\begin{aligned} r &= \gamma^{-1/2} R, \\ \theta &= \theta + \tau \gamma Z, \\ z &= \gamma Z \end{aligned} \quad (۴)$$

که در آن γ و τ به ترتیب نشان دهنده کشش محوری و پیچش در واحد طول کشیده شده است. همچنین قابل توجه است که $\gamma^{-1/2}$ از شرایط تراکم ناپذیری به دست می آید.

با در نظر گرفتن معادله (۴) به عنوان یک میدان تغییر شکل، تانسور گرادیان تغییر شکل کل مسئله کشش-پیچش به صورت زیر تعریف می شود:

$$F = \begin{bmatrix} \gamma^{-1/2} & 0 & 0 \\ 0 & \gamma^{-1/2} & \gamma^{1/2} \tau R \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \quad (۵)$$

همچنین تانسور تغییر شکل سمت چپ کوشی-گرین (B) و معکوس آن (B^{-1}) به صورت زیر هستند:

$$B = \begin{bmatrix} \gamma^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \gamma^{-1} + \gamma \tau^2 R^2 & \gamma^{3/2} \tau R \\ 0 & \gamma^{3/2} \tau R & \gamma^2 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & \gamma^{-1/2} \tau R \\ 0 & \gamma^{-1/2} \tau R & \gamma^{-2} + \tau^2 R^2 \end{bmatrix} \quad (۶)$$

بر این اساس نامتغیرهای کرنش به این صورت به دست می آیند:

$$I_1 = \gamma^2 + 2\gamma^{-1} + \gamma \tau^2 R^2, I_2 = 2\gamma + \gamma^{-2} + \tau^2 R^2, I_3 = 1. \quad (۷)$$

بنابراین تنش کوشی برای یک ماده تراکم ناپذیر هایپرالاستیک به این صورت معرفی می شود:

$$\sigma = -pI + 2 \frac{\partial W}{\partial I_1} B - 2 \frac{\partial W}{\partial I_2} B^{-1}, \quad (۸)$$

جایی که I نشان دهنده تانسور واحد مرتبه دوم است که در فشار ضرب شده است. با در نظر گرفتن مؤلفه های تنش کوشی، نیروی محوری و گشتاور پیچشی حاصل را می توان به صورت زیر به دست آورد:

$$M = \int_0^{2\pi} \int_0^{r_{out}} \sigma_{z\theta} r^2 dr d\theta, N = \int_0^{2\pi} \int_0^{r_{out}} \sigma_{zz} r dr d\theta \quad (۹)$$

علاوه بر این، در حالت استوانه ای، معادله تعادل در جهت شعاعی به این شکل تعریف می شود:

$$r \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = \sigma_\theta - \sigma_r \quad (۱۰)$$

با فرض یک تابع انرژی کرنشی بر پایه نامتغیرها، معادلات (۶)، (۸) و (۱۰) و با در نظر گرفتن شرایط مرزی مرز آزاد $\sigma_r = 0$

در $R = R_{out}$ ، تنش‌های کوشی به صورت زیر به دست می‌آیند [۶]:

$$\sigma_{rr} = -2\gamma\tau^2 \int_R^{R_{out}} \zeta \frac{\partial W}{\partial I_1}(\zeta) d\zeta, \quad (11)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -2\gamma\tau^2 \int_R^{R_{out}} \zeta \frac{\partial W}{\partial I_1}(\zeta) d\zeta + 2\gamma\tau^2 R^2 \frac{\partial W}{\partial I_1} \quad (12)$$

$$\sigma_{zz} = -2\gamma\tau^2 \int_R^{R_{out}} \zeta \frac{\partial W}{\partial I_1}(\zeta) d\zeta + 2(\gamma^2 - \gamma^{-1}) \frac{\partial W}{\partial I_1} + 2(\gamma - \gamma^{-2} - \tau^2 R^2) \frac{\partial W}{\partial I_2} \quad (13)$$

$$\sigma_{z\theta} = 2\gamma^{3/2}\tau R \frac{\partial W}{\partial I_1} + 2\gamma^{1/2}\tau R \frac{\partial W}{\partial I_2}, \quad (14)$$

علاوه بر این، گشتاور تولید شده و نیروی محوری با استفاده از تنش‌های معرفی شده در رابطه (۱۳) و (۱۴)، به صورت زیر محاسبه می‌شوند [۶]:

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{2\pi} \int_0^{R_{out}} \sigma_{z\theta} r^2 dr d\theta = 4\pi\tau \int_0^{R_{out}} R^3 \left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + \gamma^{-1} \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) dR, \\ N &= \int_0^{2\pi} \int_0^{R_{out}} \sigma_{zz} r dr d\theta = 4\pi(\gamma - \gamma^{-2}) \int_0^{R_{out}} R \left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + \gamma^{-1} \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) dR \\ &\quad - 4\pi\tau^2 \left(R \int_0^{R_{out}} R \frac{\partial W}{\partial I_1} dR + \int_0^{R_{out}} R^3 \gamma^{-1} \frac{\partial W}{\partial I_2} dR \right) \end{aligned} \quad (15)$$

در بین مدل‌های ساختاری مبتنی بر نامتغیر، چگالی انرژی کرنش نمای توسعه‌یافته توسط منصور و دریجانی به دلیل پایداری و همبستگی زیاد با آزمایش‌ها به صورت زیر در کار حاضر استفاده شده است [۲۳]:

$$\begin{aligned} W(\lambda_i) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \{ \exp[m_k(\lambda_1 - 1)] + \exp[m_k(\lambda_2 - 1)] + \exp[m_k(\lambda_3 - 1)] - 3 \} \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \{ \exp[n_k(\lambda_1^{-1} - 1)] + \exp[n_k(\lambda_2^{-1} - 1)] + \exp[n_k(\lambda_3^{-1} - 1)] - 3 \} \end{aligned} \quad (16)$$

در m_k, n_k, B_k, A_k پارامترهای ماده هستند. انطباق نتایج این مدل با داده‌های تجربی مختلف برای مواد هایپرالاستیک با در نظر گرفتن مفروضات تراکم‌ناپذیری و حتی تراکم‌پذیری مورد بررسی قرار گرفت. در این مقاله، یک فرم چهار پارامتری از تابع انرژی کرنش‌نمایی-نمایی برای توصیف رفتار ماده یک استوانه هایپرالاستیک تابعی در قالب رابطه زیر استفاده شده است.

$$W = A_1^*(R) \{ \exp[m_1^*(R)(I_1 - 3) - 1] \} + B_1^*(R) \{ \exp[n_1^*(R)(I_2 - 3) - 1] \} \quad (17)$$

لازم به ذکر است که $n_1^*(R), A_1^*(R), B_1^*(R), m_1^*(R)$ پارامترهایی هستند که به طور خاص برای مواد تابعی با تغییرات مواد در جهت شعاعی اصلاح شده‌اند. واضح است که برای مواد همگن، این پارامترها دیگر تابعی از شعاع نیستند.

با یادآوری اینکه پارامترهای مواد اصلاح‌شده برای مواد تابعی معرفی شده در معادله (۱۷) در جهت شعاعی متفاوت است، بنابراین، پارامترهای مواد در نظر گرفته شده در این مقاله در امتداد جهت شعاعی به صورت نمایی در نظر گرفته می‌شوند:

$$\begin{aligned} x(R) &= x_{in} + (x_{out} - x_{in}) \frac{\exp(k(R - R_{in})) - 1}{\exp(k) - 1} \quad \text{for } k \neq 0 \\ x(R) &= x_{in} + (x_{out} - x_{in}) \frac{(R - R_{in})}{(R_{out} - R_{in})} \quad \text{for } k = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

جایی که k می‌تواند هر یک از پارامترهای ماده در معادله (۱۷) باشد و پایین نویس‌های in و out به ترتیب پارامترهای متناظر با مواد در مرکز و سطح بیرونی استوانه را نشان می‌دهد.

از این پس، ما بیشتر تأثیرات پیچش را بر نیروی محوری کل تولید شده سیلندر هایپرالاستیک بررسی می‌کنیم. فرض می‌کنیم $N_0(\gamma_0)$ مقدار نیروی محوری ایجاد شده توسط افزایش طول محوری γ_0 در غیاب پیچش ($\tau = 0$) و $N_T(\gamma_0, \tau)$ بخشی از نیروی محوری است که توسط پیچش اعمال شده ایجاد می‌شود. بنابراین، کل نیروی محوری تولید شده توسط بارگذاری

کششی-پیچشی خارجی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$N = N_0(\gamma_0) + N_T(\gamma_0, \tau) \quad (19)$$

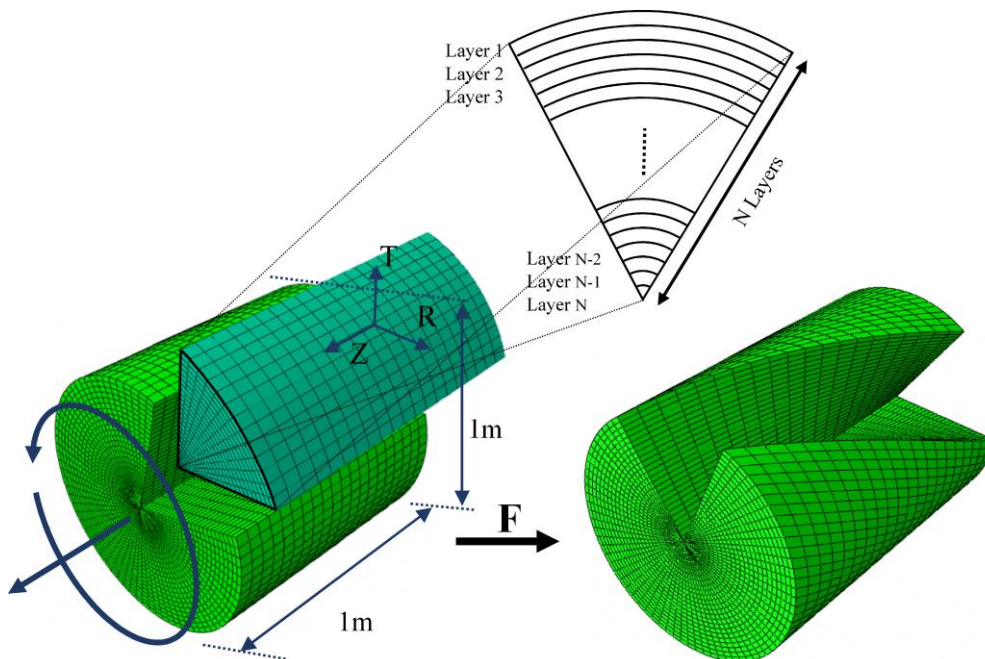
با در نظر گرفتن مقدار بار محوری ایجاد شده توسط مقدار مشخص کشش، به نظر می‌رسد بخشی از نیروی محوری ناشی از پیچش خارجی برای تعیین جهت و بزرگی نیروی طولی کل حاصله بسیار مهم است. با بررسی تغییر سهم نیروی محوری ناشی از پیچش، مشتق نیروی محوری استوانه هایدروالاستیک با توجه به مقدار پیچش اعمال شده مورد بررسی قرار می‌گیرد. با استفاده از تابع انرژی کرنش نمایی-نمایی که به صورت تابعی از نامتغیرها نوشته شده (رابطه ۱۷) و معادله (۱۵)، گشتاور پیچشی ایجاد شده در سیلندر و همچنین نیروی محوری کل به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$M = 4\pi \int_0^{R_{out}} R^3 \tau \left[A_1^*(R) m_1^*(R) e^{m_1^*(R)(\gamma^2 + 2\gamma^{-1} + \gamma \tau^2 R^2 - 3)} + \frac{B_1^*(R) n_1^*(R) e^{n_1^*(R)(2\gamma + \gamma^{-2} + \tau^2 R^2 - 3)}}{\gamma} \right] dR$$

$$N = 2\pi \int_0^{R_{out}} \left[-2\gamma \tau^2 \int_R^{R_{out}} (\zeta A_1^*(R) m_1^*(R) e^{m_1^*(R)(\gamma^2 + 2\gamma^{-1} + \gamma \tau^2 R^2 - 3)}) d\zeta \right. \\ \left. + 2(\gamma^2 - \gamma^{-1}) A_1^*(R) m_1^*(R) e^{m_1^*(R)(\gamma^2 + 2\gamma^{-1} + \gamma \tau^2 R^2 - 3)} \right. \\ \left. + 2(\gamma - \gamma^{-2} - \tau^2 R^2) B_1^*(R) n_1^*(R) e^{n_1^*(R)(2\gamma + \gamma^{-2} + \tau^2 R^2 - 3)} \right] dR. \quad (20)$$

۳- حل المان محدود

یک مدل سازی المان محدود سه بعدی در مطالعه حاضر برای اعتبارسنجی راه حل‌های تحلیلی پیشنهادی ایجاد می‌شود. یک زیربرنامه UHYPER تعریف شده توسط کاربر نوشته شده است تا برای تعریف تابع انرژی کرنش و پارامترهای مواد مربوط به آن استفاده شود. مدل سه بعدی در جهت شعاعی به عنوان لایه به چندین زیربخش تقسیم می‌شود، که در آن مجموعه‌ای از پارامترهای مواد ثابت مطابق با موقعیت شعاعی به هر لایه اختصاص داده می‌شود. شکل ۱ شماتیک مدل FE سه بعدی را با شبکه مش آن با استفاده از عنصر تنش سه بعدی (C3D8H) نشان می‌دهد. تعداد بهینه لایه‌ها برای تجزیه و تحلیل دقیق و قابل اعتماد المان محدود کششی-پیچشی در بخش زیر مورد بحث قرار گرفته است. با اطمینان از همگرایی مدل سازی FE، استقلال مش برای نتایج مختلف بررسی می‌شود.



شکل ۱ شماتیک مدل FE سه بعدی با شبکه مش آن با استفاده از عنصر تنش سه بعدی

۴- نتایج

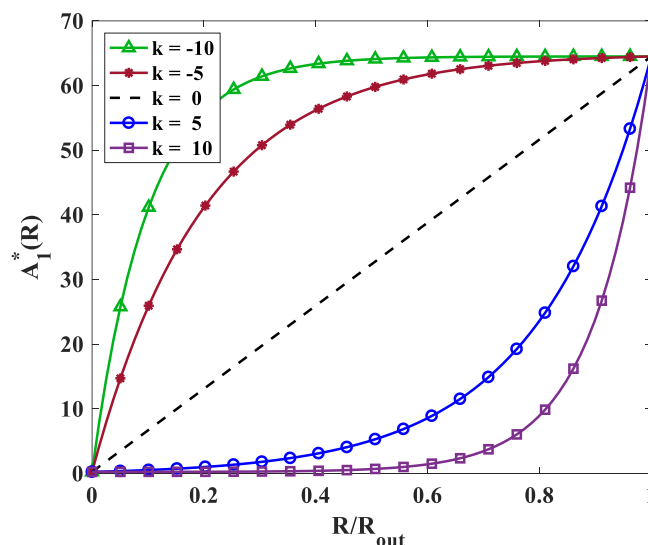
با استفاده از راه حل تحلیلی ارائه شده برای مدل ساختاری نمایی-نمایی، توزیع تنش و نیروی محوری و گشتاور کل حاصل برای یک استوانه هایپرا الاستیک تابعی در معرض کشش و پیچش ترکیبی ارزیابی می شود. علاوه بر این، نتایج تجزیه و تحلیل المان محدود برای ارزیابی راه حل های تحلیلی استفاده می شود.

در مطالعه حاضر، مواد هایپرا الاستیک در مرکز و سطح بیرونی سیلندر تابعی به ترتیب VHB 4905 و لاستیک طبیعی انتخاب شده و پارامترهای مواد مربوطه آن ها در مدل نمایی-نمایی در جدول ۱ ارائه شده که با استفاده از روش رگرسیون حداقل مربعات محاسبه شده است [۲۴].

جدول ۱ پارامترهای مواد مربوط به VHB 4905 و لاستیک طبیعی در مدل نمایی-نمایی [۲۴]

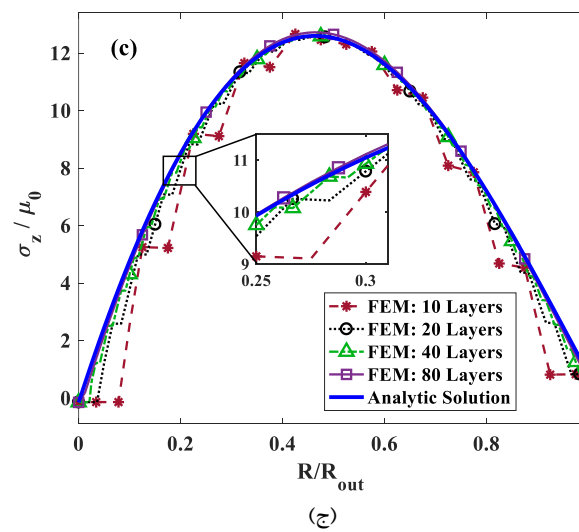
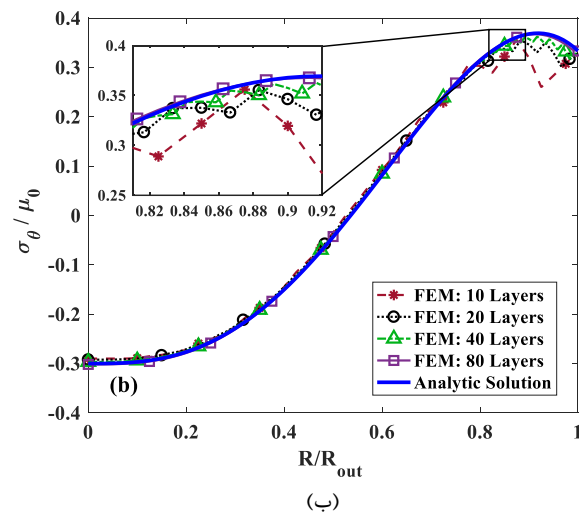
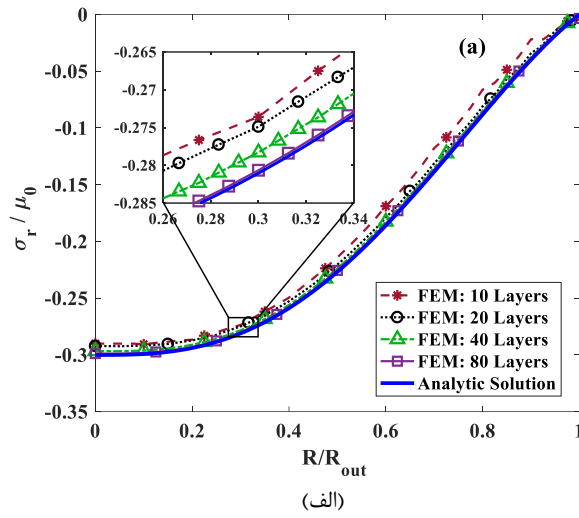
μ_0 Initial shear modulus	Model parameters	Utilized material
0.375	$A_1 = 0.240, m_1 = 0.024$ $B_1 = 0.799, n_1 = 0.049$	VHB 4905
1.257	$A_1 = 64.50, m_1 = 0.0031$ $B_1 = 304.0, n_1 = 0.000035$	natural-rubber gum

در معادله (۱۸)، پارامتر k شکل و شدت تغییرات مواد را در جهت شعاعی کنترل می کند. مقادیر مختلفی از k برای بررسی نقش آن بر توزیع تنش در نظر گرفته شده است. به عنوان مثال، تغییر A_1^* در جهت شعاعی در شکل ۲ نشان داده شده است. شایان ذکر است که توزیع سایر پارامترهای مواد روندی مشابه با A_1^* دارند.

شکل ۲ تغییر A_1^* در جهت شعاعی در مقادیر مختلفی از k

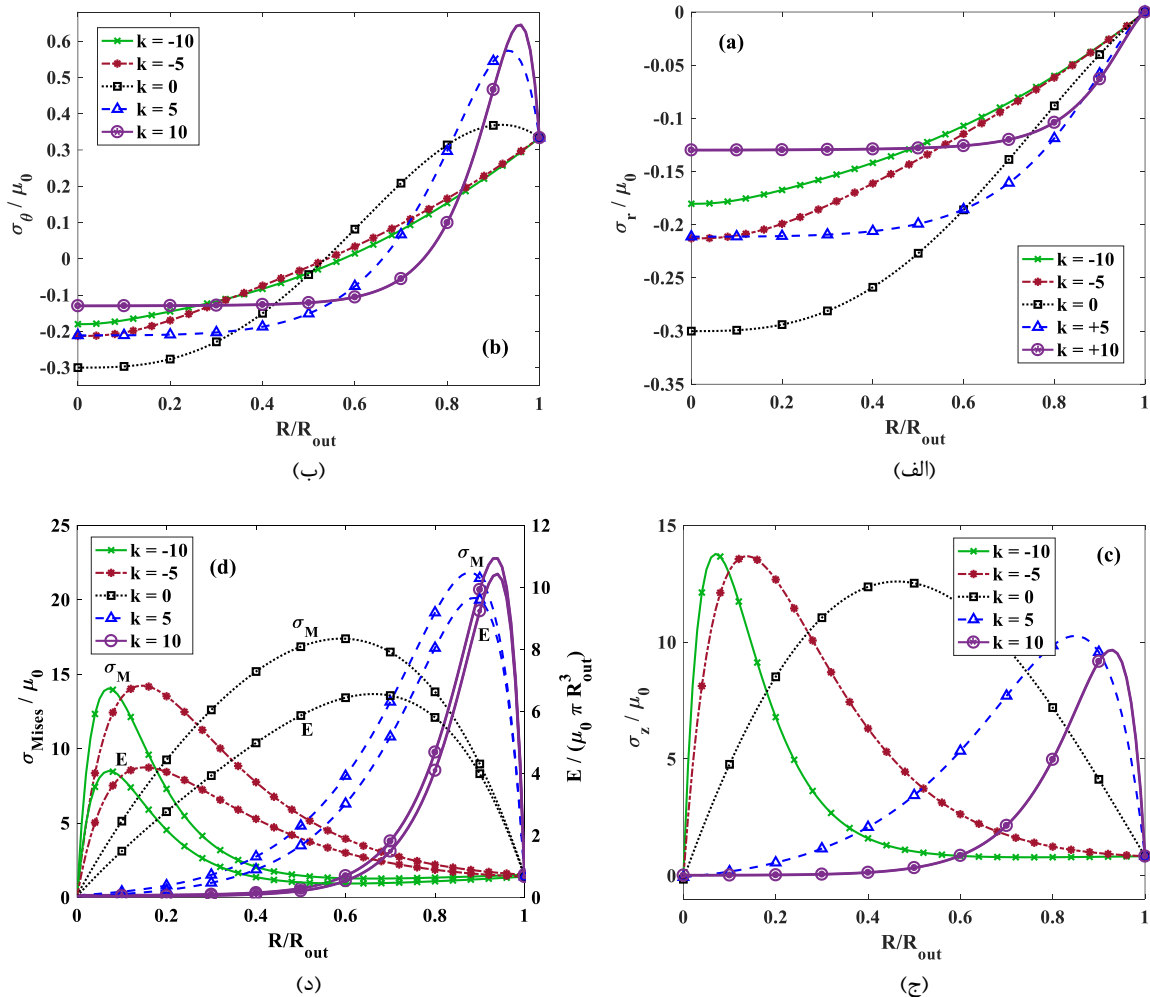
شکل ۳- الف تغییر تنش شعاعی را بر حسب شعاع برای $\tau = 1$ ، $\gamma = 1.25$ و $k = 0$ با در نظر گرفتن تعداد لایه های مختلف در مدل سازی المان محدود تابعی نشان می دهد. بدیهی است که افزایش تعداد نوارها در مدل سازی مواد تابعی دقت و قابلیت اطمینان نتایج را افزایش می دهد. با این حال، با توجه به این واقعیت که افزایش تعداد لایه ها منجر به محاسبات زمان بر می شود، باید تعداد بهینه ای از لایه ها که تطابق خوبی با نتایج تحلیلی را تضمین می کند شناسایی کرد تا هزینه محاسباتی کاهش یابد. در شکل ۳ مشخص است که برای ۸۰ لایه، تطابق خوبی بین راه حل های تحلیلی و تجزیه و تحلیل المان محدود به دست آمده است. علاوه بر این، مشخص است که تنش شعاعی از یک مقدار بیشینه که در مرکز ظاهر می شود شروع می شود و در سطح بیرونی صفر می شود که شرایط بدون تنش را در شعاع بیرونی ($R/R_{out} = 1$) نشان می دهد. تغییرات تنش بی بعد حلقه ای و تنش بی بعد طولی برای $\tau = 1$ ، $\gamma = 1.25$ و $k = 0$ به ترتیب در شکل ۳-ب و ۳-ج نشان داده شده است. مشابه تنش شعاعی، برای ۸۰ لایه، نتایج مطابقت زیادی با محاسبات تحلیلی دارد. اگرچه تنش طولی در سراسر جهت شعاعی

مثبت است، اما با نزدیک شدن به سطح بیرونی از نقطه مرکزی استوانه، بخش حلقه‌ای، تنش از منفی به مثبت را می‌پوشاند.



شکل ۳ همگرایی نتایج FE به نتایج تحلیلی با تعداد لایه‌های مختلف به ازای $\gamma = 1.25$ و $\tau = 1$ شکل (الف) مربوط به تنش شعاعی، شکل (ب) تنش حلقوی و شکل (ج) تنش محوری را نشان می‌دهد

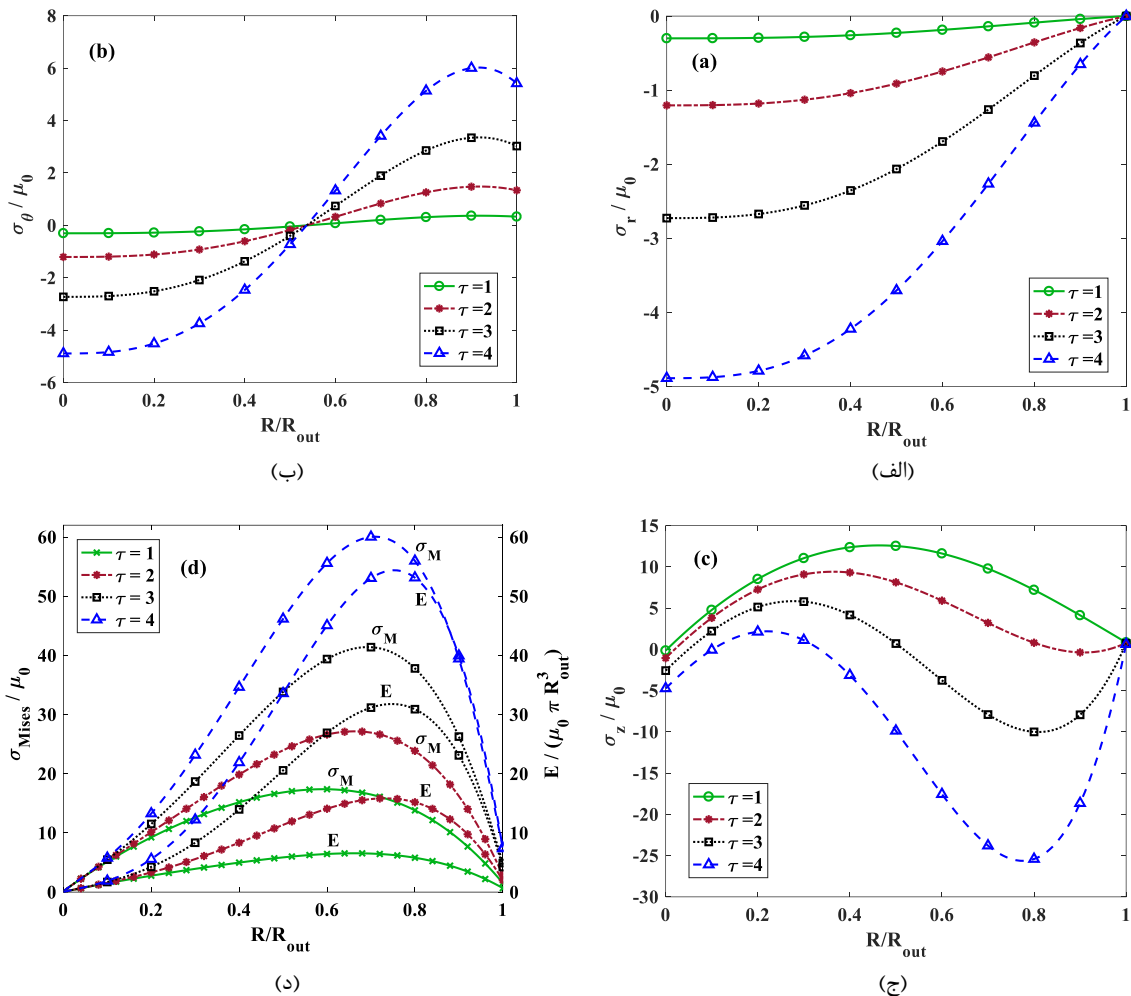
در مورد تأثیر k بر توزیع تنش بحث بیشتری می‌کنیم. شکل ۴ الف تنش شعاعی بدون بعد را برای $\gamma = 1.25, \tau = 1$ و مقادیر مختلف k را نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که بیشترین تنش شعاعی در $k = 0$ و در مقادیر بالاتر $|k|$ رخ می‌دهد، تنش شعاعی در نقطه مرکزی سیلندر کاهش می‌یابد. علاوه بر این، تنش شعاعی در سطح بیرونی استوانه دایره‌ای بدون توجه به مقدار k برای برآورده کردن شرایط مرزی بدون تنش در شعاع بیرونی صفر می‌شود. شکل ۴-ب نشان می‌دهد صرف نظر از مقدار k برای $\gamma = 1.25, \tau = 1$ ، تنش محیطی از حالت فشاری به کششی تغییر می‌کند. با این حال، محل نقطه تغییر بستگی به مقدار k دارد. شکل ۴-ج تغییرات تنش طولی را نشان می‌دهد. قابل توجه است که برای $k = 0$ تنش طولی تقریباً در $R/R_{out} = 0.5$ به حداکثر خود می‌رسد در حالی که برای $k > 0$ ، نقطه‌ای که حداکثر تنش طولی رخ می‌دهد به سمت سطح بیرونی و برای $k < 0$ این نقطه به سمت مرکز حرکت می‌کند. این عمدتاً به دلیل توزیع متفاوت مواد در جهت شعاعی برای مقادیر مثبت و منفی k مطابق شکل ۲ است. شکل ۴-د توزیع چگالی انرژی کرنش بدون بعد و تنش فون میسر را در جهت شعاعی برای $\gamma = 1.25, \tau = 1$ نشان می‌دهد. مشابه تنش طولی، حداکثر چگالی انرژی کرنش و تنش فون میسر برای مقادیر مثبت k نزدیک به سطح بیرونی ظاهر می‌شود در حالی که برای مقادیر منفی k به سمت مرکز حرکت می‌کند. این روند مشابه نشان می‌دهد که سهم تنش طولی به انرژی کل یا تنش فون میسر به طور قابل توجهی بیشتر از سهم تنش‌های شعاعی و حلقه‌ای است.



شکل ۴ تنش شعاعی، محیطی، محوری و فون میسر بدون بعد برای $\gamma = 1.25, \tau = 1$ و مقادیر مختلف k . شکل (الف) مربوط به تنش شعاعی، شکل (ب) تنش حلقوی، شکل (ج) تنش محوری و شکل (د) تنش فون میسر را نشان می‌دهد

با در نظر گرفتن یک مقدار ثابت برای k ، تمرکز را بر روی تأثیر پیچش و کشش بر توزیع تنش معطوف می‌کنیم. شکل ۵-الف توزیع تنش شعاعی را برای $\gamma = 1.25, k = 0$ و پیچش‌های مختلف نشان می‌دهد. واضح است که افزایش پیچش، سرعت تغییرات تنش را تشدید می‌کند و منجر به تنش شعاعی بالاتر می‌شود. توزیع مؤلفه‌های مماسی و محوری تنش در امتداد جهت

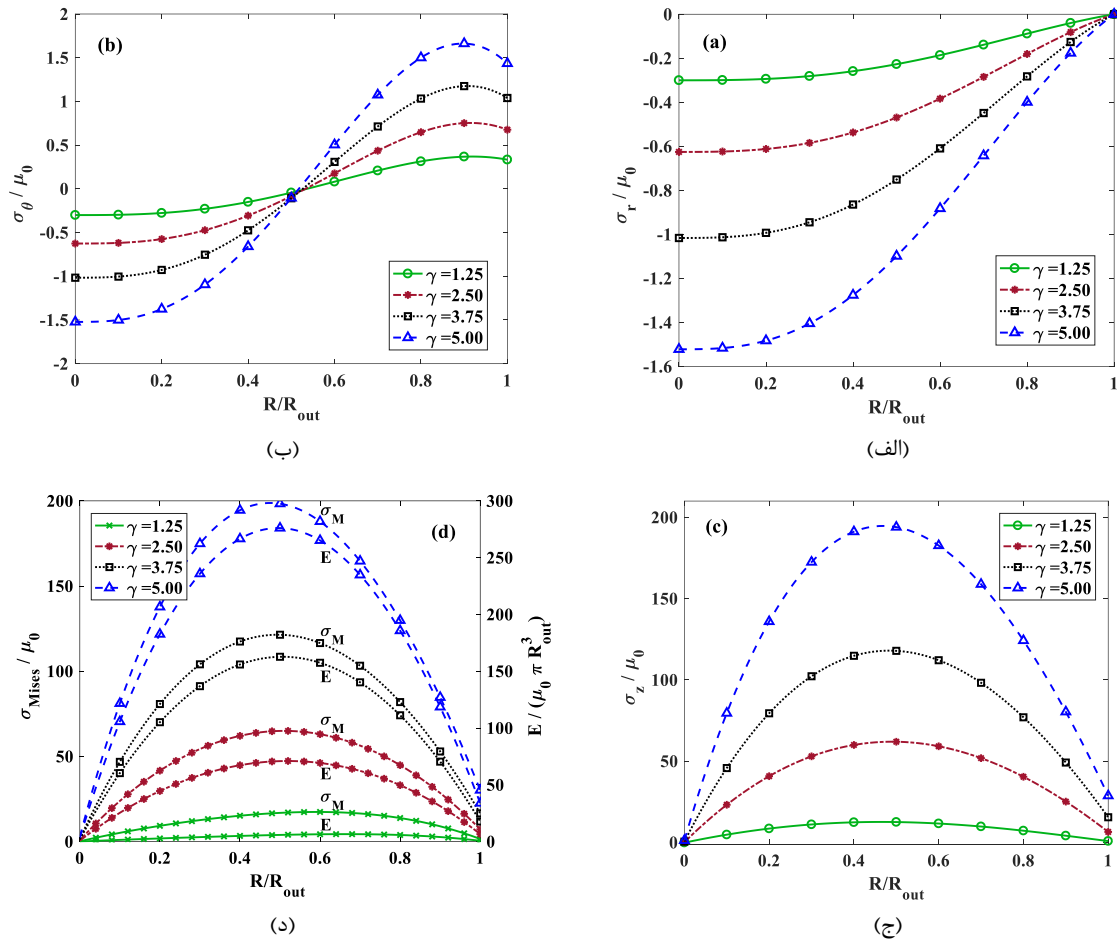
شعاعی برای $k = 0, \gamma = 1.25$ و بزرگی‌های مختلف پیچش به ترتیب در شکل ۵-ب و ۵-ج نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که صرف نظر از مقدار پیچش، نمودارهای توزیع تنش حلقه‌ای تقریباً در $R/R_{out} = 0.53$ همدیگر را قطع می‌کنند و تنش حلقه‌ای از مقدار فشاری به کششی تغییر می‌کند. با مراجعه به شکل ۵-ج، افزایش پیچش تاثیر پیچیده‌تری بر تغییر تنش طولی دارد. برای $\tau = 1$ ، حداکثر تنش طولی تقریباً در $R/R_{out} = 0.5$ روی می‌دهد، در حالی که برای پیچش‌های بزرگ‌تر، دو انتها شامل حداکثر و حداقل در نمودار تغییرات تنش مشخص می‌شوند. با افزایش پیچش، نقطه حداکثر به سمت مرکز حرکت می‌کند در حالی که نقطه حداقل به سمت سطح بیرونی جابجا می‌شود. شکل ۵-د توزیع تابع چگالی انرژی کرنش و همچنین تنش فون میسز را در امتداد جهت شعاعی برای $k = 0, \gamma = 1.25$ و پیچش‌های مختلف نشان می‌دهد. مشخص شد که مقدار مجذور تنش طولی بخش بزرگی از تنش فون میسز و تابع چگالی انرژی کرنش را ایجاد می‌کند.



شکل ۵ تنش شعاعی، محیطی، محوری و فون میسز بدون بعد برای $\gamma = 1.25, \tau = 1$ و مقادیر مختلف پیچش، شکل (الف) مربوط به تنش شعاعی، شکل (ب) تنش حلقوی، شکل (ج) تنش محوری و شکل (د) تنش فون میسز را نشان می‌دهد

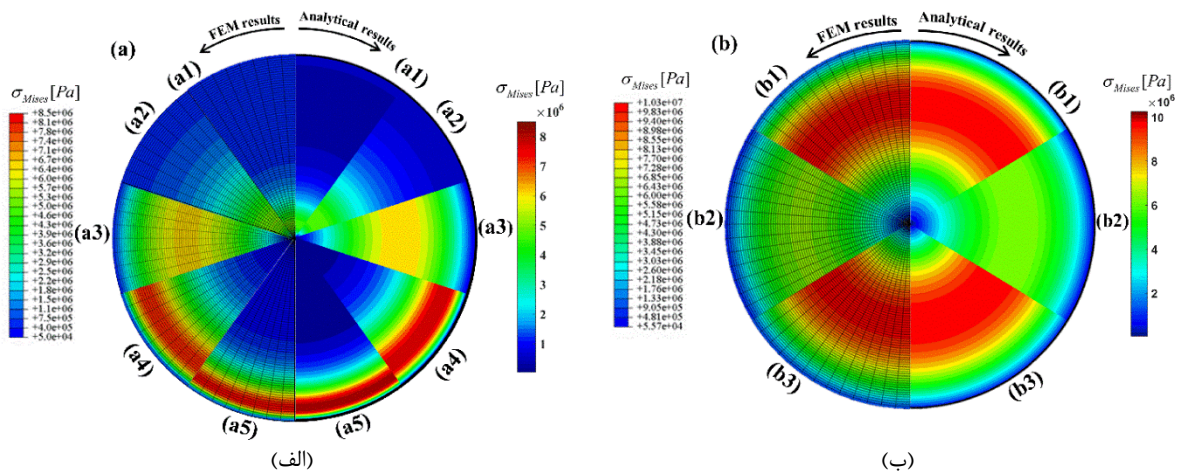
شکل ۶ توزیع تنش شعاعی را برای $k = 0$ و $\tau = 1$ و مقادیر مختلف کشش نشان می‌دهد. افزایش مقدار کشش محوری اثری مشابه پیچش دارد و تنش شعاعی را تشدید می‌کند. تأثیر کشش محوری خارجی اعمال شده بر روی استوانه بر تغییر تنش حلقه‌ای و تنش طولی برای $k = 0$ و $\tau = 1$ به ترتیب در شکل ۶ (b) و (c) نشان داده شده است. برای تنش حلقه‌ای، روند مشابه با تأثیر پیچش است. صرف نظر از کشش محوری، نمودارهای توزیع تنش حلقه‌ای تقریباً در $R/R_{out} = 0.53$ ، جایی که جزء مماسی تنش از حالت فشاری به کششی تغییر می‌کند، تقاطع می‌کنند. با این حال، بر خلاف اثر پیچیده پیچش بر تنش طولی، محل حداکثر تنش محوری تقریباً بدون توجه به بزرگی کشش محوری در $R/R_{out} = 0.5$ است. تغییرات چگالی انرژی کرنش

و تنش فون میسر در شکل ۶ نشان داده شده است.



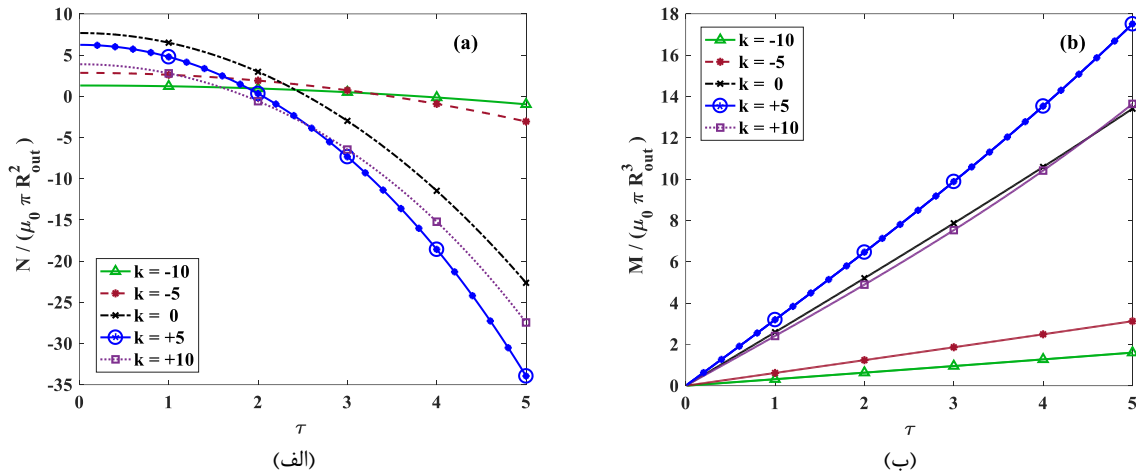
شکل ۶ تنش شعاعی، محیطی، محوری و فون میسر بدون بعد برای $\tau = 1$ $k = 0$ و مقادیر مختلف کشش، شکل (الف) مربوط به تنش شعاعی، شکل (ب) تنش حلقوی، شکل (ج) تنش محوری و شکل (د) تنش فون میسر را نشان می دهد

برای تأیید بیشتر دقت روش تحلیلی پیشنهادی و ارائه درک بصری بهتر، خطوط تنش فون میسر به دست آمده از روش تحلیلی و اجزای محدود مقایسه می شوند. شکل ۷-الف خطوط تنش فون میسر را برای یک بخش از مقطع برای مقادیر مختلف k که با نتایج ارائه شده در شکل ۴ مطابقت دارد نشان می دهد. علاوه بر این، در شکل ۷-ب، خطوط تنش فون میسر برای $k = 0$ و مقادیر مختلف τ و γ نشان داده شده است که نتایج نشان داده شده در شکل ۵-د و شکل ۶-د را تأیید می کند.



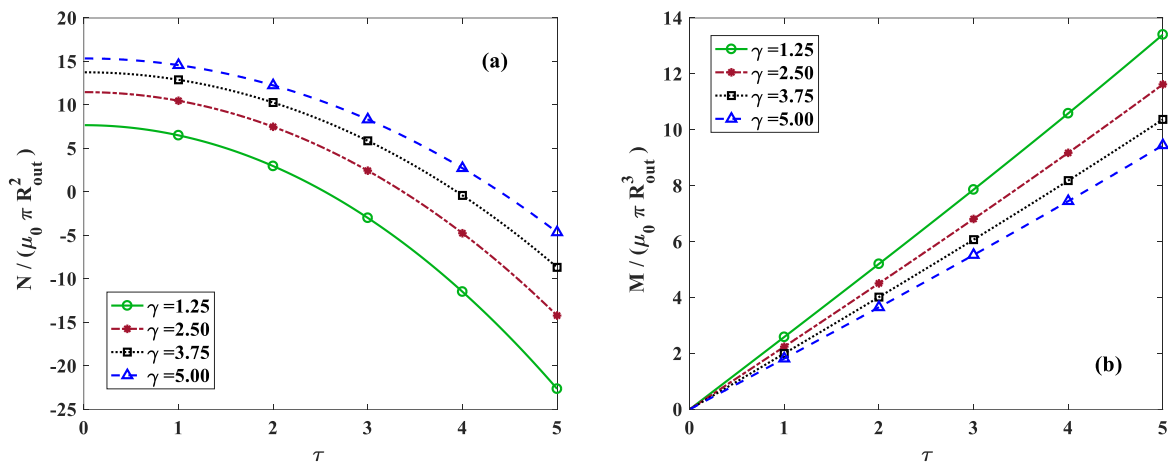
شکل ۷ کانتور تنش فون میسر برای حل المان محدود و تحلیلی به ازای، (a) $\gamma = 1.25$, $\tau = 1$ and (a1) $k = -10$, (a2) $k = -5$, (a3) $k = 0$, (a4) $k = +5$, (a5) $k = +10$, (b) $k = 0$ and (b1) $\gamma = 1.25$, $\tau = 2$ (b2) $\gamma = 1.25$, $\tau = 1$ (b3) $\gamma = 1.5$, $\tau = 1$

شکل ۸-الف تغییر نیروی کل بدون بعد را در امتداد محور نسبت به پیش برای مقادیر مختلف k نشان می دهد. نیروی کل برای پیچ های بزرگ تر بدون توجه به مقدار k به طور قابل توجهی کاهش می یابد. با این حال، نرخ تغییرات برای مقادیر k منفی صاف است، در حالی که برای مقادیر صفر یا مثبت تشدید می شود. تغییر گشتاور پیچشی در مقابل پیش در شکل ۸ نشان داده شده است. مشابه روند نیروی محوری، برای مقادیر منفی k ، نرخ تغییرات اندک مشاهده می شود، در حالی که برای مقادیر صفر و مثبت، نرخ تغییرات بیشتر است.



شکل ۸ مقادیر بدون بعد (a) نیروی محوری (b) گشتاور در مقابل پیش برای $\gamma = 1.25$ و مقادیر مختلف k . خطوط و نشانگرها به ترتیب با نتایج روش تحلیلی و FE مطابقت دارند.

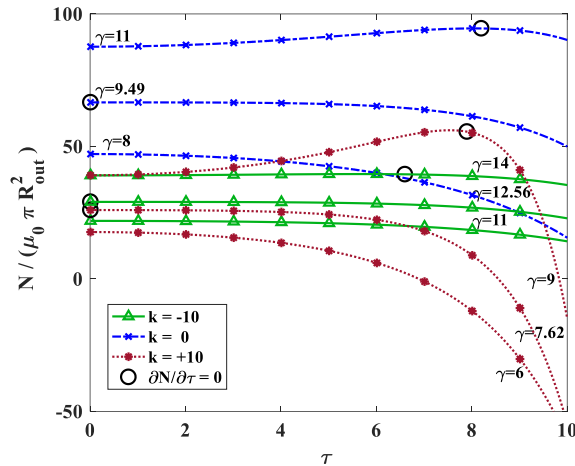
تغییر نیروی کل محوری بدون بعد و گشتاور تولید شده در مقابل پیش برای $k = 0$ و تغییر کشش محوری به ترتیب در شکل ۹ (الف) و (ب) نشان داده شده است.



شکل ۹ مقادیر بدون بعد (a) نیروی محوری (b) گشتاور در مقابل پیش برای $k = 0$ و کشش های محوری مختلف. خطوط و نشانگرها به ترتیب با نتایج روش تحلیلی و FE مطابقت دارند.

با مشتق گیری از معادله (۲۰)، موقعیتی که در آن نیروی محوری ایجاد شده از پیش از مقدار کششی به فشاری تغییر می کند، به عنوان نقطه دگرسانی مشخص می شود. برای $\gamma < \gamma_{alteration}$ ، N_T همیشه فشاری است که به این معنی است که استوانه در هنگام پیش تمایل به کشیده شدن دارد. با این حال، برای $\gamma > \gamma_{alteration}$ یک رفتار متفاوت مشاهده می شود و برای پیچ های نسبتاً کوچک، N_T ابتدا کششی است که به طور موقت کل نیروی محوری را افزایش می دهد، در حالی که در پیش بیشتر، N_T فشاری می شود و نیروی محوری کل کاهش می یابد. به عبارت دیگر، سیلندر برای پیش های به اندازه کافی

کوچک فشرده می‌شود و سپس در پیچش بیشتر کشیده می‌شود. شکل ۱۰ نتایج حل تحلیلی را برای تغییر نیروی محوری بدون بعد در مقابل پیچش برای مقادیر مختلف k نشان می‌دهد، حتی شامل تغییر شکل های بزرگ. نشانگرهای دایره‌ای نقاطی را نشان می‌دهند که در آن $\partial N/\partial \tau = 0$ و برای مقدار ثابت k ، با افزایش کشش محوری، این نقطه در پیچش‌های بزرگ‌تر ظاهر می‌شود.



شکل ۱۰ تغییر نیروی محوری بدون بعد در مقابل پیچش اعمالی برای $k = -10, 0, +10$

۵- نتیجه‌گیری

در مطالعه حاضر، رفتار مکانیکی یک استوانه دایره‌ای هایپروالاستیک تابعی همسانگرد تراکم‌ناپذیر که در معرض کشش و پیچش ترکیبی قرار گرفته است مورد بررسی قرار گرفت. فرض بر این بود که ماده به صورت نمایی در جهت شعاعی تغییر می‌کند. ماده VHB 4905 و لاستیک طبیعی به ترتیب به عنوان مواد مرکز و سطح بیرونی سیلندر اختصاص داده شدند. چگالی انرژی کرنش نمایی در این مقاله به دلیل پایداری و سهولت ریاضی و انطباق زیاد آن با مشاهدات تجربی در طی بارگذاری‌های مختلف برای پیش‌بینی رفتار استوانه ساخته شده از مواد هایپروالاستیک تابعی مورد استفاده قرار گرفت. تجزیه و تحلیل المان محدود با توسعه یک زیربرنامه UHYPER در ABAQUS برای ارزیابی راه‌حل‌های تحلیلی ارائه شده انجام شد. پس از شناسایی تعداد لایه‌های بهینه برای مدل‌سازی سیلندر تابعی، یک مطالعه استقلال مش برای دستیابی به یک آنالیز FE دقیق و قابل اعتماد انجام شد. نتایج نشان داد که توزیع تنش و محل حداکثر تنش به شدت به توان نمایی در تابع تغییرات مواد بستگی دارد. توزیع تنش شعاعی، مماسی و طولی برای مقادیر مختلف پیچش و کشش طولی مورد ارزیابی قرار گرفت. تنش شعاعی صرف نظر از مقدار پیچش یا کشش از یک مقدار فشاری حداکثر در مرکز شروع می‌شود و در سطح بیرونی صفر می‌شود.

علاوه بر این، مستقل از بزرگی پیچش یا کشش محوری، نمودارهای توزیع تنش حلقه تقریباً در $R/R_{out} = 0.53$ جایی که جزء حلقه تنش از مقدار فشاری به مقدار کششی تغییر می‌کند، تقاطع می‌کنند. اگرچه افزایش کشش محوری تأثیری بر محل حداکثر تنش طولی نداشت، سناریوی متفاوتی برای اثر پیچش مشاهده شد. برای $\tau = 1$ حداکثر تنش طولی تقریباً در $R/R_{out} = 0.5$ رخ داد، در حالی که در پیچش بیشتر، دو اکسترمم در نمودار توزیع تنش ظاهر شد که به سمت مرکز و سطح بیرونی استوانه هایپروالاستیک حرکت کردند. علاوه بر این، تنش طولی بر شکل تغییرات و مقدار فون میسز و چگالی انرژی کرنش در سراسر جهت شعاعی غالب بود. برای مقادیر k منفی، تغییرات گشتاور کل و نیروی محوری نسبتاً هموار بود، در حالی که برای مقادیر مثبت، میزان تغییرات تشدید شد. علاوه بر این، کل نیروی ایجاد شده در جهت طولی، از کشش آغاز شد و در اثر افزایش پیچش به فشاری تغییر یافت. با این حال، یک نقطه تغییر خاص برای کشش محوری به دست آمد، که در آن $\partial N/\partial \tau = 0$. بنابراین، برای $\gamma < \gamma_{alteration}$ ، نیروی محوری ناشی از پیچش، N_T همیشه فشاری بوده است که به این معنی است که طول استوانه همیشه زمانی که پیچش خارجی اعمال می‌شود، تمایل به کشیده شدن دارد، در حالی که برای کشش‌های بزرگ‌تر از $\gamma > \gamma_{alteration}$ از کششی به فشاری تغییر می‌کند، یعنی استوانه با افزایش پیچش طول استوانه شروع به کوتاه شدن می‌کند و سپس افزایش می‌یابد.

Authorship Contribution Statement

Dr. Ali Taheri

Biography: Assistant Professor, University of Larestan.



Contribution Statement: Methodology, Validation, analysis, Writing – original draft, review & editing.

۶- مراجع

- [1] Huang W, Ding O, Wang H., Wu Z, Luo Y, Shi W, Yang L, Liang Y, Liu C, Wu J. Design of stretchable and self-powered sensing device for portable and remote trace biomarkers detection, *Nature Communications*, 2023; 14:1-13.
- [2] Pan X, Xu Z, Bao R, Pan C. Research Progress in Stretchable Circuits: Materials, Methods, and Applications. *Advance Sensor Research*, 2023; 11:20-28.
- [3] Xiang C, Wang Z, Yang C, Yao X, Wang Y, Suo Z. Stretchable and fatigue-resistant materials, *Materials today*, 2020; 34:7-16.
- [4] Yan S, Shan Y, Jun L, Zulmari S, Ting Z, Marvin H, Bo L, Tong L, Long G, Yunhe Z, Yutao D, Bo Y, and Xudong W. Stretchable Encapsulation Materials with High Dynamic Water Resistivity and Tissue-Matching Elasticity, *ACS Appl. Mater. Interfaces*, 2022; 14: 18935–18943.
- [5] Shojaeifard M, Bayat M R, Baghani M. Swelling-induced finite bending of functionally graded pH-responsive hydrogels: a semi-analytical method. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2019; 40:679-694.
- [6] Valiollahi A, Shojaeifard M, Baghani M. Closed form solutions for large deformation of cylinders under combined extension-torsion. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2019; 157: 336-347.
- [7] Shojaeifard M, Rouhani F, Baghani M. A combined analytical–numerical analysis on multidirectional finite bending of functionally graded temperature-sensitive hydrogels. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 2019; 30: 1882 - 1895.
- [8] Xu J, Yuan X, Zhang H, Zhao Z, Zhao W. Combined effects of axial load and temperature on finite deformation of incompressible thermo-hyperelastic cylinder. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2019; 40: 499-514.
- [9] Rivlin R. Large elastic deformations of isotropic materials. III. Some simple problems in cylindrical polar coordinates. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 1948; 240:509-525.
- [10] Rivlin R S. Large elastic deformations of isotropic materials VI. Further results in the theory of torsion, shear and flexure. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 1949; 242:173-195.
- [11] Humphrey J D. *Cardiovascular solid mechanics: cells, tissues, and organs*. New York: Springer; 2013.
- [12] Taber L A. *Nonlinear theory of elasticity: applications in biomechanics*: World Scientific; 2004.
- [13] Rivlin R. Large elastic deformations of isotropic materials. I. Fundamental concepts. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 1948; 240:459-490.

- [14] Treloar L. The elasticity of a network of long-chain molecules—II. Transactions of the Faraday Society, 1943; 39:241-246.
- [15] Ogden R W. Large deformation isotropic elasticity—on the correlation of theory and experiment for incompressible rubberlike solids. Proceedings of the Royal Society of London A Mathematical and Physical Sciences, 1972; 326:565-584.
- [16] Gent A. A new constitutive relation for rubber. Rubber chemistry technology, 1996; 69:59-61.
- [17] Pan Y, Zhong Z. A viscoelastic constitutive modeling of rubber-like materials with the Payne effect. Applied Mathematical Modelling, 2017; 50:621-632.
- [18] López-Campos J, Segade A, Fernández J, Casarejos E, Vilán J. Behavior characterization of visco-hyperelastic models for rubber-like materials using genetic algorithms. Applied Mathematical Modelling, 2019; 66:241-255.
- [19] Chagnon G, Verron E, Gornet L, Marckmann G, Charrier P. On the relevance of continuum damage mechanics as applied to the Mullins effect in elastomers. Journal of the Mechanics Physics of Solids, 2004; 52:1627-1650.
- [20] Bechir, H., Chevalier, L., Chaouche, M., Boufala, K. Hyperelastic constitutive model for rubber-like materials based on the first Seth strain measures invariant. European Journal of Mechanics-A/Solids, 2006; 25:110-124.
- [21] Khajehsaeid H, Arghavani J, Naghdabadi R. A hyperelastic constitutive model for rubber-like materials. European Journal of Mechanics-A/Solids, 2013; 38:144-151.
- [22] Darijani H, Naghdabadi R, Kargarnovin M H. Constitutive modeling of rubberlike materials based on consistent strain energy density functions. Polymer Engineering Science, 2010; 50:1058-1066.
- [23] Mansouri M, Darijani H. Constitutive modeling of isotropic hyperelastic materials in an exponential framework using a self-contained approach. International Journal of Solids Structures, 2014; 51:4316-4326.
- [24] Darijani H, Naghdabadi R. Hyperelastic materials behavior modeling using consistent strain energy density functions. Acta mechanica, 2010; 213:235-254.
- [25] Anani Y, Rahimi G H. Stress analysis of thick pressure vessel composed of functionally graded incompressible hyperelastic materials. International Journal of Mechanical Sciences, 2015; 104:1-7.
- [26] Bilgili E. Controlling the stress–strain inhomogeneities in axially sheared and radially heated hollow rubber tubes via functional grading. Mechanics Research Communications, 2003; 30:257-266.
- [27] Anani Y, Rahimi G. Stress analysis of thick spherical pressure vessel composed of transversely isotropic functionally graded incompressible hyperelastic materials. Latin American Journal of Solids and Structures, 2016; 13:407-434.
- [28] Anani Y, Rahimi G H. Stress analysis of rotating cylindrical shell composed of functionally graded incompressible hyperelastic materials. International Journal of Mechanical Sciences, 2016; 108:122-128.
- [29] Anani Y, Rahimi G. Modeling of visco-hyperelastic behavior of transversely isotropic functionally graded rubbers. Polymer Engineering Science, 2016; 56:342-347.
- [30] Pascon J, Coda H. High-order tetrahedral finite elements applied to large deformation analysis of functionally graded rubber-like materials. Applied Mathematical Modelling, 2013; 37:8757-8775.
- [31] Moallemi A, Baghani M, Almasi A, Zakerzadeh M R, Baniassadi M. Large deformation and stability analysis of functionally graded pressure vessels: An analytical and numerical study. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 2018; 232:3300-3314.
- [32] Almasi A, Baghani M, Moallemi A, Baniassadi M, Faraji G. Investigation on thermal stresses in FGM hyperelastic thick-walled cylinders. Journal of Thermal Stresses, 2018; 41:204-221.

- [33] Humphrey J, Barazotto Jr R, Hunter W. Finite extension and torsion of papillary muscles: a theoretical framework. *Journal of Biomechanics*, 1992; 25:541-547.
- [34] Ogden R, Chadwick P. On the deformation of solid and tubular cylinders of incompressible isotropic elastic material. *Journal of the Mechanics Physics of Solids*, 1972; 20:77-90.
- [35] Kanner L M, Horgan C O. On extension and torsion of strain-stiffening rubber-like elastic circular cylinders. *Journal of Elasticity*, 2008; 93,39-47.
- [36] Fung Y. Elasticity of soft tissues in simple elongation. *American Journal of Physiology-Legacy Content*, 1967; 213:1532-1544.
- [37] Horgan C O, Murphy J G. Extension and torsion of incompressible non-linearly elastic solid circular cylinders. *Mathematics Mechanics of Solids*, 2011; 16,482-491.
- [38] Varga O H. *Stress-strain behavior of elastic materials; selected problems of large deformations*. New York: Interscience 1966.
- [39] Horgan C O, Murphy J G. Finite extension and torsion of fiber-reinforced non-linearly elastic circular cylinders. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2012; 47:97-104.
- [40] Khajehsaeed H, M Baghani M, Naghdabadi R. Finite strain numerical analysis of elastomeric bushings under multi-axial loadings: a compressible visco-hyperelastic approach, *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 2013; 9:385-399.