

Forced vibration of a three-layer cylindrical shell with an auxetic core containing fluid under the influence of shock load using high-order shear deformation theories

Korosh Khorshidi ^{a*}, Saboor Savvafi ^a, Sadegh Zobeid ^a

^a Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Arak University, Arak, 38156-88349, Iran

Original Article

Use your device to scan and read the article online



Citation: Khorshidi K, Savvafi S, Hamzeh F, Zobeid S. Forced vibration of a three-layer cylindrical shell with an auxetic core containing fluid under the influence of shock load using high-order shear deformation theories. *Mechanics of Advanced and Smart Materials*. 2024;3(4):432-465.

 <https://10.61186/masm.3.4.432>

KEYWORDS

Force vibration,
Cylindrical shell,
Auxetic structure,
Inviscid fluid,
Shock load.

ABSTRACT

Due to the increasing use of new materials, such as auxetic structures, it is necessary to investigate mechanical phenomena, such as vibration, in structures made of these types of materials. This paper examines the forced vibrations of a three-layer cylindrical shell containing inviscid fluid under shock load. All three layers are made of aluminum, and the central layer is made of a re-entrant honeycomb cell structure. Using high-order shear deformation theories (HSDT) and Hamilton's principle, the governing equations of the system have been extracted and solved by the Galerkin weighted residual method. The outputs of the Abaqus finite element software are used to validate the results. The system is investigated with both simple and clamped support conditions. Finally, this study investigates the influence of the geometrical parameters of the shell and the auxetic structure, as well as the type, intensity, duration, and location of the load, and the effect of the fluid on the dynamic and time responses.

Extended Abstract

1. Introduction

In 1987, Lake [1] introduced a foam with negative Poisson's ratio (NPR). Four years later, Evans et al. [2] replaced the word "Auxetic" with the word (NPR). The distinguishing feature of auxetic materials is that they behave in tension or axial pressure unlike normal materials, and have different deformations. This difference is shown in Figure 1.

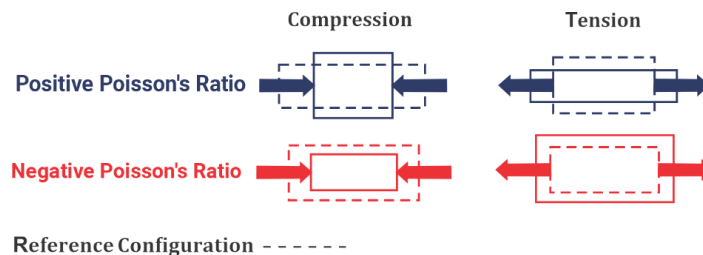


Figure 1 Comparison of the behavior of materials with negative and positive Poisson's ratio in the face of tension and axial pressure

* Corresponding author. Tel.: 08632625720

E-mail address: k-khorshidi@araku.ac.ir

DOI: <https://10.61186/masm.3.4.432>

Received: December 19, 2023; Received in revised form: January 14, 2024; Accepted: February 05, 2024.

© Author



Compared to composite materials, auxetic materials have better strength, indentation resistance, light weight, high ability to absorb energy [3] and fracture resistance [4, 5]. Due to the unique performance of these materials, their use in various fields is increasing. As the most important applications of these materials, we can mention things like making medical stents [6, 7], piezoelectric sensors and smart filters [8]. In recent years, due to the advancement of additive manufacturing technology, the possibility of manufacturing many materials with complex cellular architecture has been created, thereby making materials with an auxetic structure affordable.

Better properties compared to less weight have attracted the attention of many researchers and have increased the number of studies on auxetic materials. In 1997, Larsen et al [9] proposed the first re-entrant honeycomb structure with double-sided arrow structure. Chen et al. [10] investigated the energy absorption ability of sandwich sheets made with double-sided arrow structure. Lan et al. [11] proved the superiority of cylindrical re-entrant honeycomb sandwich structures over aluminum foam core using an experimental method. Quan et al. [12] investigated the vibration and nonlinear dynamic response for a three-layer nanoplate including thin gold layer, auxetic layer and piezoelectric layer and subjected to uniform pressure. Ma et al. [13] proposed the initial idea of materials with negative Poisson's ratio as flexible protection for explosion. Duke et al. [14] investigated the dynamic response in the vibration of double-curved thin sandwich shells with an auxetic core with re-entrant honeycomb structure and subjected to explosive loads. Zhang and Yang [15] experimentally investigated the vibration behavior of isolator bases made of re-entrant honeycomb auxetic structures. Jin et al. [16] investigated the response of metallic honeycomb sandwich structures with a cross arrangement to explosive loads based on numerical methods. In another study by Tran and Phuong [17], the vibration and dynamic behavior of a sandwich plate with a core of the re-entrant hexagonal structure was investigated and the response of the said plate was obtained under explosive loading. Imbalzano et al. [3] proposed innovative three-dimensional auxetic composite panels (ACPS). Novak et al. [18] investigated the blast response of sandwich composite panels with three-dimensional chiral auxetic cores through a valid numerical method and considering the maximum displacement of the panel and the energy absorption property. Gunawan et al. [19] investigated the free vibration of fluid-filled cylindrical shells on an elastic bed using a semi-analytical finite element method. Jam and Nikjoo [20] investigated the free vibration and critical buckling load of composite cylindrical shells containing fluid using the first-order shear deformation theory.

By reviewing the mentioned articles, it seems that the forced vibration of a sandwich cylinder with an auxetic core made of a re-entrant honeycomb structure and in the presence of a fluid has not been investigated so far. Therefore, in this paper, the forced vibrations of a three-layer cylindrical shell, containing a non-viscous fluid and under shock load, are investigated. Each three-layer is made of aluminum and the central layer is made of the re-entrant honeycomb structure (Figure 2). In this article, using high-order shear deformation theories and Hamilton's principle, the governing equations of the system are extracted and solved by the Galerkin weighted residual method. The validation criteria of the answers are the outputs of the Abaqus finite element software. The system is investigated with both simple and clamped support conditions. At the end, the influence of geometrical factors of the shell and auxetic structure, type, intensity, duration of application and location of load and fluid effect on dynamic response and time response are investigated.

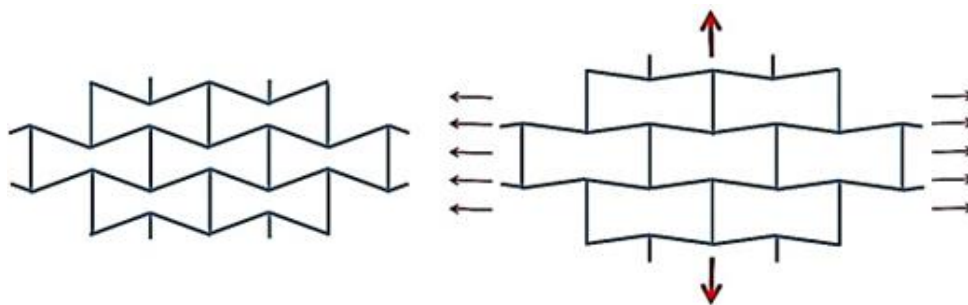


Figure 2. Re-entrant hexagonal structure under tension

2. Problem definition and mathematical modeling

A three-layer cylindrical shell with length L and radius R and total thickness h containing incompressible fluid at height H is considered as in Figure 3. A cylindrical coordinate system with x , θ , and z components is considered to describe the problem. This shell is stimulated uniformly in the radial direction under the compressive force q . In general, the displacement field for cylindrical shells is considered as equation 1 [21].

$$\begin{aligned}
 u_1(x, \theta, z, t) &= u_0(x, \theta, t) - f_1(z) \frac{\partial w(x, \theta, t)}{\partial x} + f_2(z) \phi_1(x, \theta, t) \\
 u_2(x, \theta, z, t) &= v_0(x, \theta, t) - \frac{f_1(z)}{R} \left(\frac{\partial w(x, \theta, t)}{\partial \theta} - v(x, \theta, t) \right) + f_2(z) \phi_2(x, \theta, t) \\
 u_3(x, \theta, z, t) &= w_0(x, \theta, t)
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

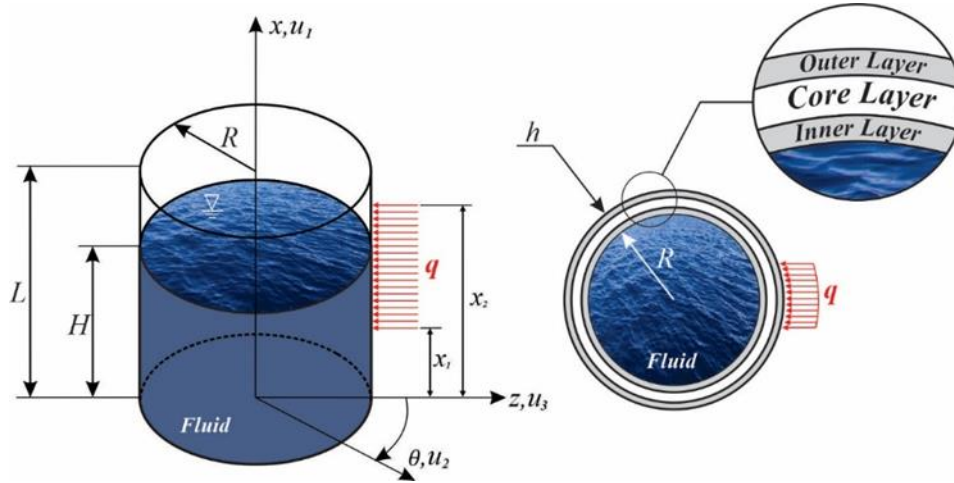


Figure 3. Three-layer cylindrical shell containing fluid in assumed cylindrical coordinates

In equation 1 $u_0(x, \theta, t), v_0(x, \theta, t), w_0(x, \theta, t)$ represent displacement respectively longitudinal, peripheral and transverse layers of the middle layer $u_1(x, \theta, z, t), u_2(x, \theta, z, t), u_3(x, \theta, z, t)$ displacements corresponding to every point of the cylindrical shell. Also, the functions $\phi_1(x, \theta, t)$ and $\phi_2(x, \theta, t)$ express the rotation of the middle plane around the x and θ axes, respectively. $f_1(z)$ and $f_2(z)$ is also considered for different theories as in Table 1 [21].

Table 1. Various theories for modeling structure.[21]

	Theory	$f_1(z)$	$f_2(z)$
ESDPT	exponential	$-z$	$ze^{-2(\frac{z}{h})^2}$
TSDPT	Trigonometric	$-z$	$\frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)$
HSDPT	Hyperbolic	$-z$	$h \sinh\left(\frac{z}{h}\right) - z \cosh\left(\frac{1}{2}\right)$
PSDPT	Parabolic	$-z$	$z\left(\frac{5}{4} - \frac{5}{3h^2}z^2\right)$

Assuming the linearity of the strain-displacement relations for the cylindrical shell, it will be in the form of equation 2 [22].

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{xx} &= \frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + f_1(z) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + f_2(z) \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \\
 \epsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + u_3 \right) = \frac{1}{R} \left(w_0 + \frac{\partial v_0}{\partial \theta} \right) + \frac{f_1(z)}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2} - \frac{\partial v_0}{\partial \theta} \right) + \frac{f_2(z)}{R} \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta} \\
 \gamma_{x\theta} &= \frac{1}{R} \frac{\partial u_1}{\partial \theta} + \frac{\partial u_2}{\partial x} = \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{f_1(z)}{R} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u_0}{\partial \theta} + f_1(z) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial \theta} + f_2(z) \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} \right) + f_2(z) \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \\
 \gamma_{xz} &= \frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial x} \left(1 + \frac{\partial f_1(z)}{\partial z} \right) + \frac{\partial f_2(z)}{\partial z} \phi_1 \\
 \gamma_{\theta z} &= \frac{1}{R} \frac{\partial u_3}{\partial \theta} + \frac{\partial u_2}{\partial z} - \frac{u_2}{R} = \left(1 + \frac{\partial f_1(z)}{\partial z} \right) \left(\frac{1}{R} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} - \frac{v_0}{R} \right) + \frac{\partial f_2(z)}{\partial z} \phi_2
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

The structure and coordinates of the unit cell for the assumed auxetic structure are shown in Figure 4. The elastic parameters of inner, outer and the auxetic layer are calculated using equation 5 and 6 [23]. In these relations, the changes in tensile and bending deformations of cells are taken into account.

$$\begin{aligned}
 E_1^{(2)} &= E_s \frac{(\eta_3 \sec \theta_1)^3 (\eta_1 + \sin \theta_1)}{[1 + \eta_3^2 (\tan^2 \theta_1 + \eta_1 \eta_2 \sec^2 \theta_1)]} & G_{31}^{(2)} &= G_s \frac{\eta_3 \sec \theta_1}{2\eta_2 (\eta_1 + \sin \theta_1) (\eta_1 + 2\eta_2)} \\
 E_2^{(2)} &= E_s \frac{\eta_3^3 \sec \theta_1}{(\eta_1 + \sin \theta_1) (\tan^2 \theta_1 + \eta_3^2)} & \nu_{12}^{(2)} &= \frac{\sec \theta_1 \tan \theta_1 (1 - \eta_3^2) (\eta_1 + \sin \theta_1)}{[1 + (\tan^2 \theta_1 + \eta_1 \eta_2 \sec^2 \theta_1) \eta_3^2]} \\
 G_{12}^{(2)} &= E_s \frac{\eta_3^3 \sec \theta_1 (\eta_1 + \sin \theta_1)}{\eta_1^2 (1 + 2\eta_1 \eta_3^2)} & \nu_{21}^{(2)} &= \frac{\sin \theta_1 (1 - \eta_3^2)}{(\tan^2 \theta_1 + \eta_3^2) (\eta_1 + \sin \theta_1)} \\
 G_{23}^{(2)} &= G_s \frac{\eta_3 \cos \theta_1}{\eta_1 + \sin \theta_1} & \rho^{(2)} &= \rho_s \frac{\eta_3 (\eta_1 + 2)}{2 \cos \theta_1 (\eta_1 + \sin \theta_1)}
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

In equation 5, $\eta_2 = \frac{t_2}{t_1}$, $\eta_3 = \frac{l_1}{l_2}$ and $\eta_1 = \frac{l_2}{l_1}$. Also, G_s and E_s are the elastic layer properties and ρ_s is the density of the base material of the auxetic core.

$$Q_{11}^{(1,3)} = Q_{22}^{(1,3)} = \frac{E}{1 - \nu^2} \quad Q_{12}^{(1,3)} = Q_{21}^{(1,3)} = \frac{\nu E}{1 - \nu^2} \quad Q_{44}^{(1,3)} = Q_{55}^{(1,3)} = Q_{66}^{(1,3)} = G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \tag{6}$$

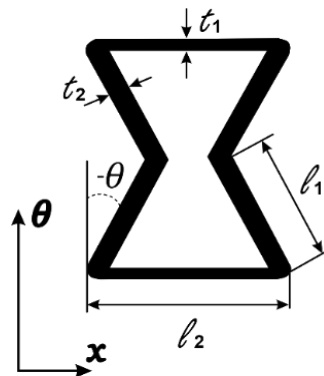


Figure 4. Single cell structure of re-entrance honeycomb [23]

Equation 6 relates the Young’s modulus, shear modulus and Poisson’s ratio of the inner and outer layers to E , G , ν respectively. Ssuperscript 1 and 3 associate with inner and outer layers. Ssuperscript 2 represents core layer. In this study, Hamilton’s principle was employed to derive the equations governing the motion, which is consistent with equation 7.

$$\int_0^t (\delta T_{shell} + \delta T_{fluid} - \delta U_{shell} - \delta w) dt = 0 \tag{7}$$

In equation 7, δT_{shell} represents changes in the kinetic energy of the shell, δT_{fluid} represents changes in the kinetic energy of the fluid, δU_{shell} represents changes in the potential energy of the shell, and δw represents the work of the external force. Changes in fluid kinetic energy are expressed as equation 8. Where $\phi^{(B)}$ and $\phi^{(S)}$ represent the displacement potential of bulging and sloshing modes, respectively.

$$\delta T_{fluid} = \frac{1}{2} \rho_f \omega^2 \int_0^H \int_0^{2\pi} (\phi^{(B)}|_{r=R} + \phi^{(S)}|_{r=R}) \delta w R d\theta dx \tag{8}$$

In the analysis of forced vibrations, transverse loads introduced into the system are dependent on time; Thus, loads are considered as a function of space and time Figure 5 and are expressed according to equation 9.

$$q_r(x, \theta, t) = Q_r(x, \theta) f(t) = \sum_{\bar{m}} \sum_{\bar{n}} \bar{p}_{\bar{m}\bar{n}} f(t) = \sum_{\bar{m}} \sum_{\bar{n}} p_{\bar{m}\bar{n}} \bar{w}_0(x, \theta) F(t) \tag{9}$$

That $f(t)$ accepts any of the values listed in Table 2. $p_{\bar{m}\bar{n}}$ is considered in the form of 10 relations according to the conditions of simple support and support.

$$q_r(x, \theta, t) = \begin{cases} \sum_{\bar{m}} \sum_{\bar{n}} p_{\bar{m}\bar{n}} \sin(\alpha_{\bar{m}}x) \cos(\bar{n}\theta) F(t) & (S - S) \\ \sum_{\bar{m}} \sum_{\bar{n}} p_{\bar{m}\bar{n}} \sin^2(\alpha_{\bar{m}}x) \cos(\bar{n}\theta) F(t) & (C - C) \end{cases} \quad (10)$$

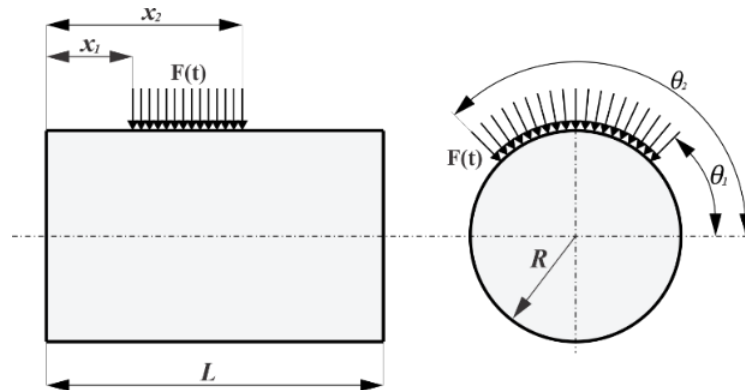


Figure 5 Cylindrical shell under transverse excitation force

Table 2 Different functions used in forced vibration

Function Type	Step Function	Triangle Function	Sin Function	Exponential Function
Function				
	$F(t) = \begin{cases} F_0 & t \leq t_1 \\ 0 & t > t_1 \end{cases} = \begin{cases} F_0(1 - \frac{t}{t_1}) & t \leq t_1 \\ 0 & t > t_1 \end{cases} = \begin{cases} F_0 \sin \frac{\pi t}{t_1} & t \leq t_1 \\ 0 & t > t_1 \end{cases} \quad F(t) = F_0 e^{-at}$			

From Figure 5, it can be shown that the load is applied uniformly and in the form of a rectangular surface with dimensions of $2l_1 \times 2l_2$ on the surface of the cylindrical shell, and the values of l_1 and l_2 are obtained from equation 11.

$$\begin{aligned} 2l_1 &= (x_2 - x_1) \\ 2l_2 &= R(\theta_2 - \theta_1) \end{aligned} \quad (11)$$

Also, x and θ are the coordinates of the load center. Now, if the sides of equation 10 are multiplied by $\sin(\alpha_{\bar{m}}x) \cos(\bar{n}\theta)$ for the case of simply support and by $\sin^2(\alpha_{\bar{m}}x) \cos(\bar{n}\theta)$ for clamp support and then integrate on the surface, the coefficients $p_{\bar{m}\bar{n}}$ will be obtain by equations 12 and 13.

$$\begin{cases} p_{\bar{m}\bar{n}} = \frac{1}{\pi L} \int_{x_1}^{x_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} q_0 \sin(\alpha_{\bar{m}}x) \cos(\bar{n}\theta) d\theta dx & n = 0 \\ p_{\bar{m}\bar{n}} = \frac{2}{\pi L} \int_{x_1}^{x_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} q_0 \sin(\alpha_{\bar{m}}x) \cos(\bar{n}\theta) d\theta dx & n > 0 \end{cases} \quad (s - s) \quad (12)$$

$$\begin{cases} p_{\bar{m}\bar{n}} = \frac{4}{3\pi L} \int_{x_1}^{x_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} q_0 \sin^2(\alpha_{\bar{m}}x) \cos(\bar{n}\theta) d\theta dx & n = 0 \\ p_{\bar{m}\bar{n}} = \frac{8}{3\pi L} \int_{x_1}^{x_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} q_0 \sin^2(\alpha_{\bar{m}}x) \cos(\bar{n}\theta) d\theta dx & n > 0 \end{cases} \quad (c - c) \quad (13)$$

Finally, the equations of motion are obtained according to equations 14 to 18 and solved by Galerkin method.

$$-\omega_{\bar{m}\bar{n}}^2 T_{\bar{m}\bar{n}}(t) \left(I_0 \bar{U}_{\bar{m}\bar{n}} + I_1 \frac{\partial \bar{W}_{\bar{m}\bar{n}}}{\partial x} + I_3 \bar{\Phi}_{1\bar{m}\bar{n}} \right) = \ddot{T}_{\bar{m}\bar{n}}(t) \left(I_0 \bar{U}_{\bar{m}\bar{n}} + I_1 \frac{\partial \bar{W}_{\bar{m}\bar{n}}}{\partial x} + I_3 \bar{\Phi}_{1\bar{m}\bar{n}} \right) \quad (14)$$

$$\begin{aligned}
-\omega_{\bar{m}\bar{n}}^2 T_{\bar{m}\bar{n}}(t) & \left(\left(I_0 - \frac{2I_1}{R} + \frac{I_2}{R^2} \right) \bar{V}_{\bar{m}\bar{n}} + \left(\frac{I_1}{R} - \frac{I_2}{R^2} \right) \frac{\partial \bar{W}_{\bar{m}\bar{n}}}{\partial \theta} + \left(I_3 - \frac{I_5}{R} \right) \bar{\phi}_{2\bar{m}\bar{n}} \right) \\
& = \ddot{T}_{\bar{m}\bar{n}}(t) \left(\left(I_0 - \frac{2I_1}{R} + \frac{I_2}{R^2} \right) \bar{V}_{\bar{m}\bar{n}} + \left(\frac{I_1}{R} - \frac{I_2}{R^2} \right) \frac{\partial \bar{W}_{\bar{m}\bar{n}}}{\partial \theta} + \left(I_3 - \frac{I_5}{R} \right) \bar{\phi}_{2\bar{m}\bar{n}} \right)
\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
-\omega_{\bar{m}\bar{n}}^2 T_{\bar{m}\bar{n}}(t) & \left(I_0 \bar{W}_{\bar{m}\bar{n}} - I_1 \frac{\partial \bar{U}_{\bar{m}\bar{n}}}{\partial x} - (I_2 + I_5) \frac{\partial^2 \bar{W}_{\bar{m}\bar{n}}}{\partial x^2} - I_5 \frac{\partial \bar{\phi}_{1\bar{m}\bar{n}}}{\partial x} - \left(\frac{I_1}{R} - \frac{I_2}{R^2} \right) \frac{\partial \bar{V}_{\bar{m}\bar{n}}}{\partial \theta} - \frac{I_2}{R^2} \frac{\partial^2 \bar{W}_{\bar{m}\bar{n}}}{\partial \theta^2} \right. \\
& \quad \left. - \frac{I_5}{R} \frac{\partial \bar{\phi}_{2\bar{m}\bar{n}}}{\partial \theta} \right) \\
& = \ddot{T}_{\bar{m}\bar{n}}(t) \left(I_0 \bar{W}_{\bar{m}\bar{n}} - I_1 \frac{\partial \bar{U}_{\bar{m}\bar{n}}}{\partial x} - (I_2 + I_5) \frac{\partial^2 \bar{W}_{\bar{m}\bar{n}}}{\partial x^2} - I_5 \frac{\partial \bar{\phi}_{1\bar{m}\bar{n}}}{\partial x} - \left(\frac{I_1}{R} - \frac{I_2}{R^2} \right) \frac{\partial \bar{V}_{\bar{m}\bar{n}}}{\partial \theta} \right. \\
& \quad \left. - \frac{I_2}{R^2} \frac{\partial^2 \bar{W}_{\bar{m}\bar{n}}}{\partial \theta^2} - \frac{I_5}{R} \frac{\partial \bar{\phi}_{2\bar{m}\bar{n}}}{\partial \theta} \right) - q_r
\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
-\omega_{\bar{m}\bar{n}}^2 T_{\bar{m}\bar{n}}(t) & \left(I_3 \bar{U}_{\bar{m}\bar{n}} + I_4 \bar{\phi}_{1\bar{m}\bar{n}} \right) = \ddot{T}_{\bar{m}\bar{n}}(t) \left(I_3 \bar{U}_{\bar{m}\bar{n}} + I_4 \bar{\phi}_{1\bar{m}\bar{n}} \right) \\
-\omega_{\bar{m}\bar{n}}^2 T_{\bar{m}\bar{n}}(t) & \left(\left(I_3 - \frac{I_5}{R} \right) \bar{V}_{\bar{m}\bar{n}} + \frac{I_5}{R} \frac{\partial \bar{W}_{\bar{m}\bar{n}}}{\partial \theta} + I_4 \bar{\phi}_{2\bar{m}\bar{n}} \right) = \ddot{T}_{\bar{m}\bar{n}}(t) \left(\left(I_3 - \frac{I_5}{R} \right) \bar{V}_{\bar{m}\bar{n}} + \frac{I_5}{R} \frac{\partial \bar{W}_{\bar{m}\bar{n}}}{\partial \theta} + I_4 \bar{\phi}_{2\bar{m}\bar{n}} \right)
\end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
-\omega_{\bar{m}\bar{n}}^2 T_{\bar{m}\bar{n}}(t) & \left(\left(I_3 - \frac{I_5}{R} \right) \bar{V}_{\bar{m}\bar{n}} + \frac{I_5}{R} \frac{\partial \bar{W}_{\bar{m}\bar{n}}}{\partial \theta} + I_4 \bar{\phi}_{2\bar{m}\bar{n}} \right) = \ddot{T}_{\bar{m}\bar{n}}(t) \left(\left(I_3 - \frac{I_5}{R} \right) \bar{V}_{\bar{m}\bar{n}} + \frac{I_5}{R} \frac{\partial \bar{W}_{\bar{m}\bar{n}}}{\partial \theta} + I_4 \bar{\phi}_{2\bar{m}\bar{n}} \right)
\end{aligned} \tag{18}$$

3. validation of the results of forced vibration of the cylindrical shell

In Figure 6, the time response of the three-layer cylindrical shell with an auxetic core (radial displacement) can be seen under the loading of sinusoidal, triangular, step and exponential functions. In these diagrams, the answers obtained based on mathematical modeling have been validated with the output of Abaqus software. In the mentioned diagrams, t_1 is the duration of load application and is equal to the natural period of the system at its first natural frequency.

4. Investigating the influence of different parameters on the dynamic response

The influence of the geometrical parameters of the cylindrical shell: Figure 7 shows the effect of L/R length to radius ratio on radial displacement. It can be seen that with the increase of this ratio, the transverse strength of the shell decreases and the displacement in the loading center increases. It can also be seen that the increase of this parameter leads to a delay in the time response of the structure. Figure 8 shows the effect of the total thickness of the shell on the time response of the system. It can be seen that with the increase of the total thickness, the stiffness of the system increases and naturally the amount of radial displacement decreases. On the other hand, increasing the h/R ratio reduces the response delay, or in other words, the time to reach the maximum displacement with a low slope decreases and the maximum displacement occurs earlier.

The influence of the geometrical parameters of the cylindrical shell core on the time response: Figure 9 shows the effect of the thickness of the central layer (auxetic core) on the time response (radial displacement) of the force application time with an exponential function. It can be seen that with the increase of the said thickness, due to the increase of porosity in the system and the subsequent decrease of the transverse strength of the shell, the maximum radial displacement also increases. Figure 10 shows the effect of the angle of the cell forming the auxetic layer on the radial displacement. This diagram is obtained based on the 90% contribution of the auxetic layer from the total thickness. It can be seen that increasing the size of the angle, regardless of its sign (Figure 4), due to the decrease in porosity, the central layer becomes denser and the stiffness of the system increases, and this causes a decrease in the size of the maximum displacement.

The effect of loading type and load intensity on the temporal response of the cylindrical shell: In Figure 11, the responses received under all four types of loading functions can be seen. According to the definition of impact, which is the surface under the graph of the loading function, it can be concluded that the largest radial displacement is related to the step function, which has the largest surface of the graph, and the smallest responses are related to the exponential function with the smallest surface under the graph. Figure 12 shows the effect of the size of the applied load F_0 on the radial displacement. The linear and direct relationship between the amount of applied load and the maximum radial displacement is well seen. In addition, in this graph, the lack of change in the delay of time responses is evident; that this event is due to no change in the natural frequencies of the system and only the amplitude of the vibration is changed.

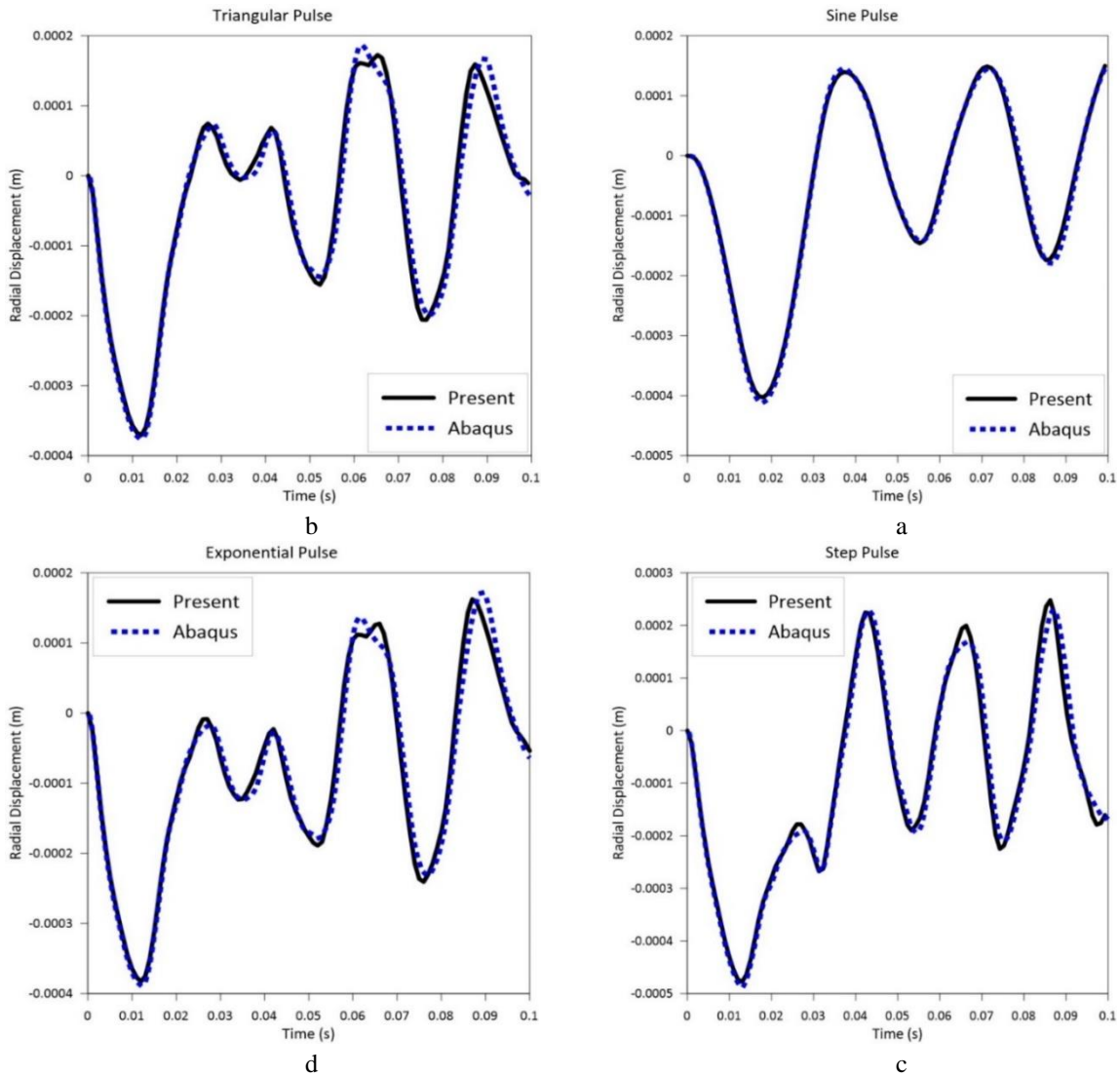


Figure 6 Validation of the time response of a three-layer cylindrical shell with an exotic core under type a) sinusoidal b) triangular c) step d) exponential loading with the results obtained from the finite element in Abaqus software, $F_0 = -1000 \text{ (Pa)}$ $t_1 = 0.03125 \text{ (s)}$, $2l_1 \times 2l_2 = 0.526 \times 2 \text{ (m}^2\text{)}$.

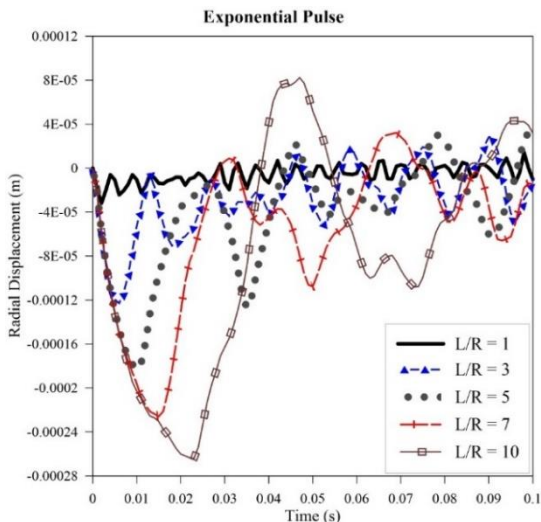


Figure 7 Time response (radial displacement) of the three-layer cylindrical shell with an exotic core in different length ratios under exponential type loading, $F_0 = -1000 \text{ (Pa)}$ $t_1 = 0.03125 \text{ (s)}$, $2l_1 \times 2l_2 = 0.526 \times 1 \text{ (m}^2\text{)}$

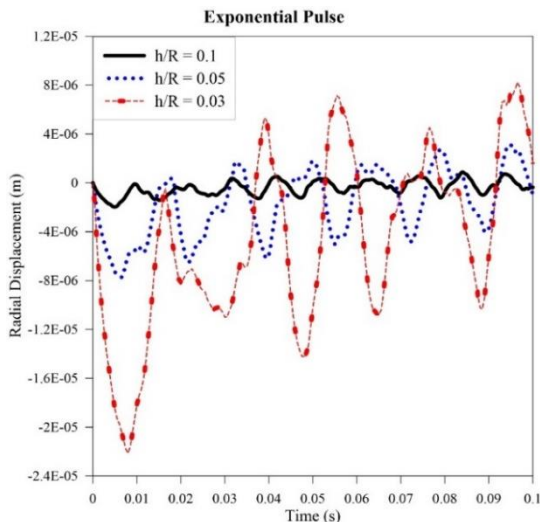


Figure 8 Time response (radial displacement) of the three-layer cylindrical shell with an exotic core in different thickness-to-radius ratios under exponential type loading, $F_0 = -1000 \text{ (Pa)}$ $t_1 = 0.03125 \text{ (s)}$, $2l_1 \times 2l_2 = 0.526 \times 1 \text{ (m}^2\text{)}$

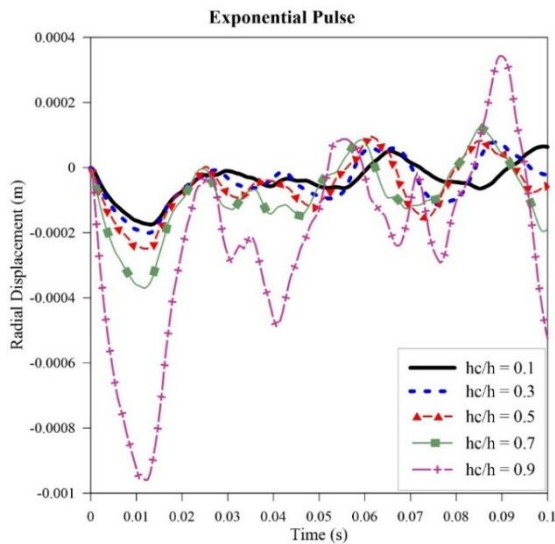


Figure 9. The effect of the thickness of the auxetic core on the time response (radial displacement) of the three-layer cylindrical shell under exponential type loading. $F_0 = -1000 (Pa)$
 $t_1 = 0.03125 (s)$, $2l_1 \times 2l_2 = 0.526 \times 1 (m^2)$

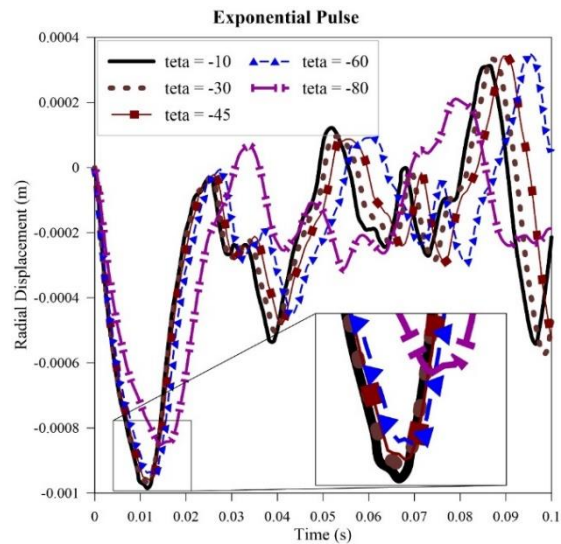


Figure 10. The effect of the angle of the unit cell inside the auxetic core on the time response (radial displacement) of the three-layer cylindrical shell under exponential loading. $F_0 = -1000 (Pa)$, $2l_1 \times 2l_2 = 0.526 \times 1 (m^2)$,
 $t_1 = 0.03125 (s)$

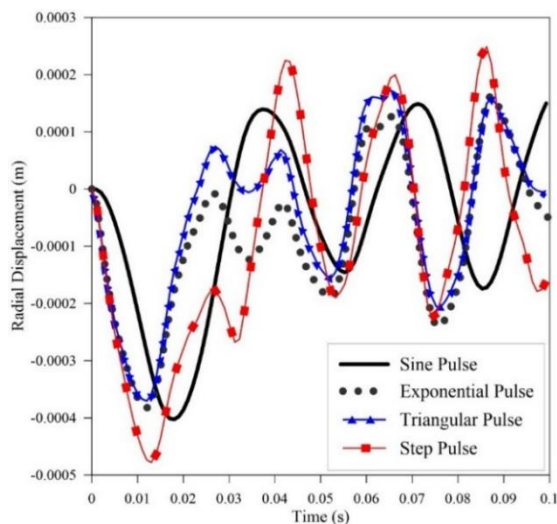


Figure 11. Time response (radial displacement) of three-layer cylindrical shell under different loading. $F_0 = -1000 (Pa)$,
 $t_1 = 0.03125 (s)$, $2l_1 \times 2l_2 = 0.526 \times 1 (m^2)$

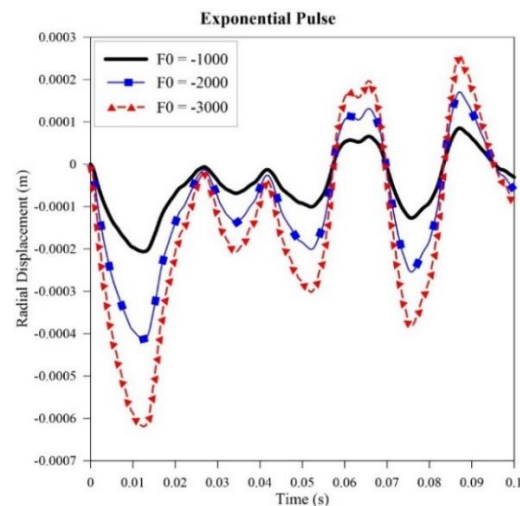


Figure 12. The effect of the applied load intensity on the time response (radial displacement) of the three-layer cylindrical shell under exponential type loading. $F_0 = -1000 (Pa)$,
 $t_1 = 0.03125 (s)$, $2l_1 \times 2l_2 = 0.526 \times 1 (m^2)$

The effect of the duration of load application and its coordinates on the temporal response of the cylindrical shell: What can be obtained from Figure 13 is that the shorter the loading duration is from the value of the natural period of the structure (NP), the less the maximum displacement and vice versa. According to the findings, it can be seen in Figure 14 that when the place of loading is close to the edges and supports, the displacement of the center of the load surface becomes less and happens in a shorter time, and this is due to the greater influence of constraints on the system. will be, although moving the loading location will not change the natural frequencies of the system. It can be seen that by changing the load center from $L/2$ to $L/6$, the maximum displacement is reduced by 51% and 61% faster.

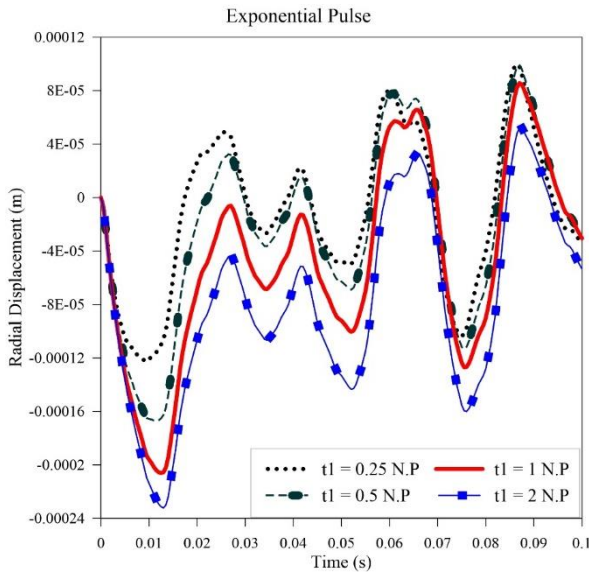


Figure 13. The effect of loading duration on the time response (radial displacement) of the three-layer cylindrical shell under exponential type loading. $F_0 = -1000$ (Pa), $2L_1 \times 2L_2 = 0.526 \times 1$ (m²)

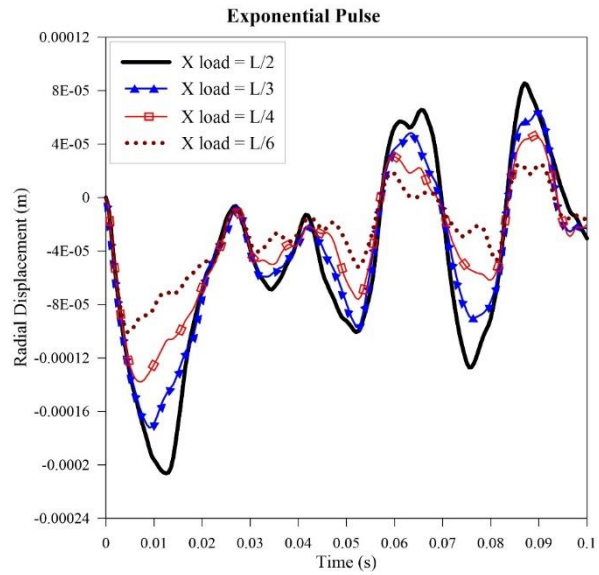


Figure 14. The effect of the loading location on the time response (radial displacement) of the three-layer cylindrical shell under exponential loading. $F_0 = -1000$ (Pa), $t_1 = 0.03125$ (s), $2L_1 \times 2L_2 = 0.526 \times 1$ (m²)

The effect of the fluid inside the shell on the time response of the cylindrical shell: Figure 15 shows the changes in the displacement of the center of the loading surface. According to it, if the shell gradually from water fluid with density 1000 (Kg/m³), it can be seen that as the depth of the fluid inside the cylindrical shell increases, the maximum displacement of the middle point of the shell surface decreases and also a delay in the time response is observed, and this is in agreement with what was expected; because the mass of the system increases with the height of the fluid and the stiffness of the system increases. Figure 16 shows the effect of fluid density on time response. It can be seen that the increase in fluid density will reduce the maximum displacement and its early occurrence.

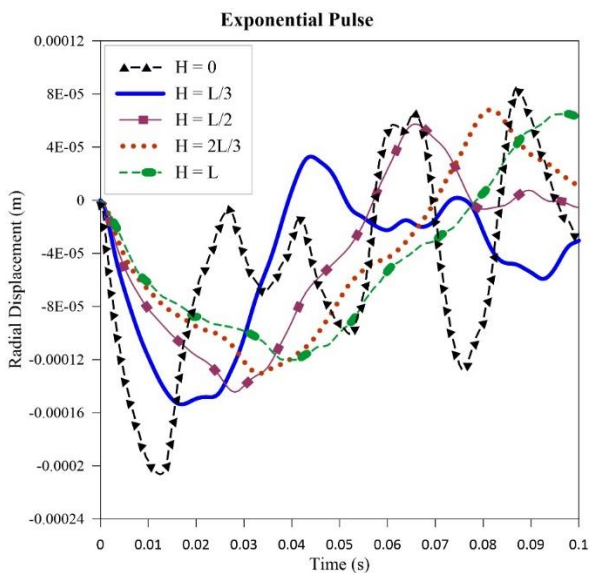


Figure 15. The effect of the fluid depth inside the shell on the time response (radial displacement) of the three-layer cylindrical shell under exponential type loading. $F_0 = -1000$ (Pa), $t_1 = 0.03125$ (s), $2L_1 \times 2L_2 = 0.526 \times 1$ (m²)

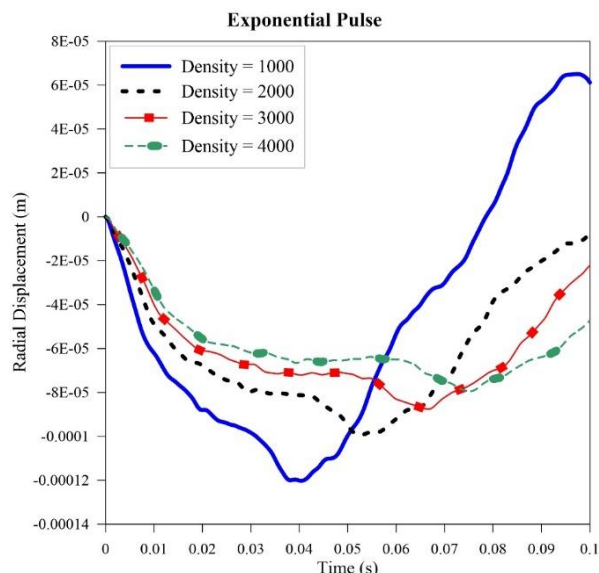


Figure 16. The effect of the fluid density inside the shell on the time response (radial displacement) of the three-layer cylindrical shell under exponential type loading. $F_0 = -1000$ (Pa), $t_1 = 0.03125$ (s), $2L_1 \times 2L_2 = 0.526 \times 1$ (m²)

5. Conclusion

In this research, the forced vibration of a three-layer cylindrical shell with an auxetic core containing a fluid has been investigated. The effect of different adjustable parameters for the cylindrical shell and its auxetic core was investigated and the following results were obtained:

- 1) By increasing the overall thickness of the shell, the radial displacement decreases and its occurrence time is faster.
- 2) By increasing the share of the exostic core from the overall thickness of the shell, it increases the flexibility of the system and increases the maximum displacement.
- 3) By increasing the size of the cell angle, it causes more compaction of the austic structure, and the maximum displacement will decrease and its occurrence time will be slower.
- 4) The use of different functions in loading has an effect on the maximum displacement and its occurrence time.
- 5) A linear relationship between the amount of force applied to the shell and the maximum displacement was seen.
- 6) As the loading duration increases compared to the natural period of the system (NP), the maximum displacement increases and vice versa.
- 7) By bringing the center of the loading surface closer to the supports, maximum displacement is reduced and occurs faster.
- 8) Due to the increase in the mass of the system, the presence of fluid reduces the maximum displacement and lengthens its occurrence time. In the case of denser fluid, this phenomenon will be more obvious.



ارتعاش اجباری پوسته‌ای استوانه‌ای سه‌لایه با هسته آگرتیک حاوی سیال تحت تأثیر بار ضربه‌ای با استفاده از نظریه‌های تغییر شکل برشی مرتبه بالا

کوروش خورشیدی^{الف*}، صبور صوافی^ب، صادق زبید^ج

^{الف} دانشیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه اراک، اراک، ایران، k-khorshidi@araku.ac.ir

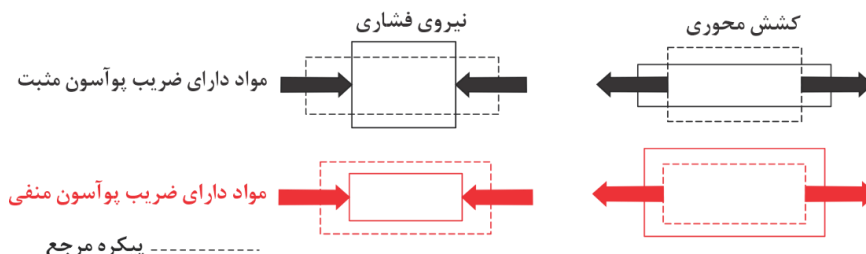
^ب دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه، مهندسی مکانیک، دانشگاه اراک، اراک، ایران، saboov.savvafi.eng@gmail.com

^ج کارشناسی ارشد، گروه، مهندسی مکانیک، دانشگاه اراک، اراک، ایران، sadegh.zobeid96@gmail.com

چکیده	واژگان کلیدی
به دلیل استفاده روزافزون از انواع مواد نوین از جمله ساختارهای آگرتیک، بررسی پدیده‌های مکانیکی نظیر پدیده‌ی ارتعاش در سازه‌های ساخته شده از این نوع مواد، ضروری به نظر می‌رسد. مقاله حاضر، ارتعاشات اجباری پوسته استوانه‌ای سه‌لایه، حاوی سیال غیرلزج و تحت بار ضربه‌ای را بررسی می‌کند. هر سه‌لایه از جنس آلومینیوم و لایه مرکزی ساخته شده از ساختار آگرتیک لانه‌زنبوری درون رو لحاظ شده است. در این مقاله، با استفاده از نظریه‌های تغییر شکل برشی مرتبه بالا و اصل همپلتون معادلات حاکم بر سیستم استخراج شده و از روش باقیمانده وزنی گالریکین حل شده‌اند. معیار اعتبارسنجی پاسخ‌ها، خروجی‌های نرم‌افزار المان محدود آباکوس است. سیستم با هر دو شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده و تکیه‌گاه گیردار بررسی می‌شود. در انتها، تأثیر عامل‌های هندسی تشکیل‌دهنده پوسته و ساختار آگرتیک، نوع، شدت، مدت‌زمان اعمال و محل قرارگرفتن بار و اثر سیال بر پاسخ دینامیکی و پاسخ زمانی، به صورت نمودار ارائه شده و مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌گیرد.	ارتعاش اجباری، پوسته استوانه‌ای، ساختار آگرتیک، سیال غیرلزج، بار ضربه‌ای.
	تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۰۹/۲۸
	تاریخ بازنگری: ۱۴۰۲/۱۰/۲۴
	تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۱۱/۱۶

۱- مقدمه

در سال ۱۹۸۷ لیک [۱]، یک فوم با ضریب پواسون منفی^۱ (NPR) معرفی کرد. چهار سال بعد، ایوانتس و همکاران [۲] کلمه‌ی "آگرتیک"^۲ را جایگزین لفظ (NPR) ساختند. وجه تمایز مواد آگرتیک این است که در کشش یا فشار محوری، برخلاف مواد معمولی رفتار می‌کنند و تغییر شکل متفاوتی دارند؛ که این تفاوت در شکل ۱ نشان داده شده است.



شکل ۱ مقایسه رفتار مواد دارای ضریب پواسون منفی و مثبت در مواجهه با کشش و فشار محوری

^۱ Negative poisson ratio

^۲ Auxetic

رفتار مکانیکی و خواص دیده شده در این مواد متأثر از ساختار سلولی به کار رفته در آنها است. مواد آگزتیک در مقایسه با مواد کامپوزیتی از استحکام بالا، مقاومت در برابر فرورفتگی، سبکی وزن، توانایی بالا در جذب انرژی [۳] و مقاومت در برابر شکست [۴، ۵] بهتری برخوردار هستند. به دلیل عملکرد منحصر به فرد این مواد، کاربرد آنها در زمینه های مختلف رو به افزایش است. به عنوان مهمترین کاربردهای این مواد می توان به مواردی مانند ساخت استنت^۳ های پزشکی [۶، ۷]، سنسورهای پیزوالکتریک و فیلترهای هوشمند [۸] اشاره نمود. در سال های اخیر به دلیل پیشرفت تکنولوژی ساخت افزودنی^۴، امکان ساخت بسیاری از مواد با معماری سلولی پیچیده ایجاد و به موجب آن ساخت مواد با ساختار آگزتیک مقرون به صرفه شد. بر همین اساس، توجه محققین برای مطالعه بر روی ساختارهای متنوع با ویژگی های مطلوب، افزایش یافت. البته این مطالعات محدود به سالهای اخیر نمی باشد و دارای پیشینه ی نسبتاً طولانی است. به عنوان مثال در سال ۱۹۹۷ لارسن و همکاران [۹] اولین ساختار لانه زنبوری درون رو با ساختار پیکانی دوطرفه^۵ را پیشنهاد داد. چن و همکاران [۱۰] توانایی جذب انرژی در ورق های ساندویچی ساخته شده با ساختار پیکانی دوطرفه را مورد بررسی قرار دادند. آنها با استفاده از یک مدل عددی دریافتند که ضریب پواسون منفی ساختار آگزتیک با تراکم هسته آگزتیک نسبت مستقیم دارد. شگری راد و همکاران [۱۱] از روش های عددی و آنالیز المان محدود استفاده نموده و ساختارهای کایرال^۶، ستاره ای و لانه زنبوری درون رو سه بعدی را به عنوان رایج ترین ساختارها مورد بررسی قرار دادند. تنوع در خواص و ویژگی ها در کنار ساخت مقرون به صرفه، باعث رشد دامنه ی کاربرد مواد آگزتیک گردید و به سبب آن شمار مطالعات برای بررسی پدیده های مکانیکی از جمله ارتعاشات در سازه های متشکل از این مواد افزایش یافت. در این بخش به مرور مطالعات انجام شده برای بررسی پدیده ارتعاش در ساختارهای آگزتیک می پردازیم. لان و همکاران [۱۲] برتری ساختارهای ساندویچی لانه زنبوری درون رو استوانه ای را نسبت به هسته ی فوم آلومینیومی، با استفاده از یک روش تجربی اثبات نمودند. در تمامی آزمایش های آنها جریان مواد، به وضوح به سمت ناحیه انفجار بود؛ بنابراین سفت شدن سازه در محل انفجار به عنوان یکی از مهم ترین مزایای شناخته شده برای سازه های آگزتیک در مهندسی ضربه و حفاظت از انفجار معرفی شد. کوان و همکاران [۱۳] ارتعاش و پاسخ دینامیکی غیرخطی را برای یک نانو صفحه سه لایه شامل لایه نازک طلا، لایه آگزتیک و لایه پیزوالکتریک و در معرض فشار یکنواخت را بررسی نمودند. طبق نتایج آنها، ضخامت هر لایه سهم قابل ملاحظه ای در رفتار ارتعاشی ورق دارد. ما و همکاران [۱۴] ایده اولیه مواد با ضریب پواسون منفی را به عنوان محافظ انعطاف پذیر برای انفجار پیشنهاد دادند. دلیل این پیشنهاد، توانایی این مواد در جذب انرژی ناشی از انفجار بود. دوک و همکاران [۱۵] پاسخ دینامیکی در ارتعاش پوسته های ساندویچی نازک دو انحنایی با هسته آگزتیک و در معرض بارهای انفجاری را مورد بررسی قرار دادند. در مطالعه آنها ساختار لانه زنبوری درون رو مدنظر قرار گرفت. مهم ترین یافته آنها پاسخ دینامیکی و فرکانس های طبیعی این نوع پوسته ها در برابر بارهای انفجاری بود. در پژوهش دیگری دوک و همکاران [۱۶] پاسخ های دینامیکی غیر خطی و ارتعاش استوانه ی ساندویچی سه لایه با هسته آگزتیک با ساختار لانه زنبوری درون رو را روی بستر الاستیک مطالعه نمودند. طبق نتایج آنها، هنگامی که پوسته استوانه ای در لایه میانی خود شامل چندین لایه آگزتیک باشد، اثر کاهش ضربه ناشی از بارگذاری بیشتر خواهد بود و این ساختار برای مقابله با بارهای انفجاری مناسب تر است. ژانگ و یانگ [۱۷] رفتار ارتعاشی پایه های جداساز^۷ ساخته شده از ساختارهای آگزتیک لانه زنبوری درون رو را به صورت تجربی مورد بررسی قرار دادند. آنها بیان داشتند که با کاهش چگالی نسبی ساختارهای لانه زنبوری، ضریب پواسون منفی افزایش پیدا می کند و پایه ها عملکرد بهتری پیدا می کنند. همچنین پایه های آگزتیک در مقایسه با پایه های معمولی، لرزش ها را به شدت کاهش داده و وزن کمتری دارند. جین و همکاران [۱۸] پاسخ سازه های ساندویچی فلزی لانه زنبوری با چینش متقاطع را به بارهای انفجاری بر مبنای روش های عددی مورد بررسی قرار دادند. نتایج آنها نشان می داد که در شرایط جدید، انحراف عرضی ورق و جذب انرژی به طور قابل ملاحظه ای افزایش پیدا می کند. طی یک تحقیق دیگر توسط نگوین و فام [۱۹] رفتار ارتعاشی و دینامیکی یک صفحه ساندویچی با هسته ای از نوع ساختار شش ضلعی درون رو بررسی گردید و پاسخ صفحه مذکور در معرض بارگذاری انفجاری به دست آمد. همچنین

³ Stent

⁴ Additive manufacturing

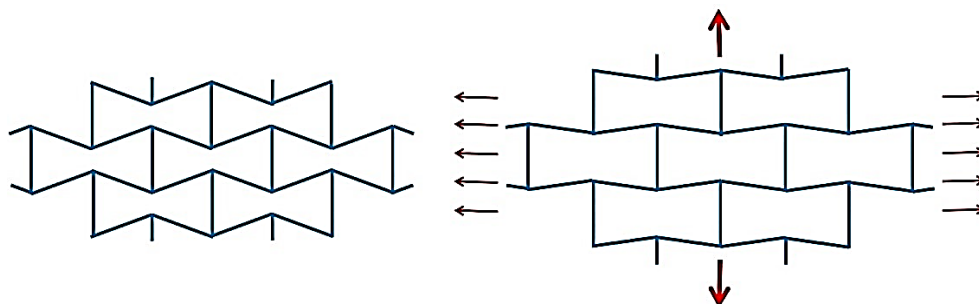
⁵ Double Arrow Head

⁶ Chiral

⁷ Isolation Base

مشخص شد که تغییرات فرکانس طبیعی سیستم متأثر از تغییر زاویه سلول واحد، از هیچ قاعده خاصی پیروی نمی‌کند؛ که این حاکی از پیچیدگی رفتار این نوع ساختارها است. ایملزانو و همکاران [۲۳] پانل‌های کامپوزیت آگزتیک سه بعدی نوآورانه (ACPS) را پیشنهاد کردند. این مطالعه نشان داد که پنل‌های هیبریدی پیشنهاد شده در مقایسه با پنل‌های معمولی در جابه‌جایی و انحراف، کاهش ۳۰ درصدی و در قابلیت جذب انرژی، افزایش ۵۰ درصدی دارند. نوک و همکاران [۲۰] پاسخ انفجار پانل‌های کامپوزیت ساندویچی با هسته‌های آگزتیک کایرال سه‌بعدی را از طریق یک روش عددی معتبر و با در نظر گرفتن حداکثر جابه‌جایی پانل و خاصیت جذب انرژی بررسی کردند. شبیه‌سازی‌ها نشان می‌داد که در اکثر موارد، تأثیر دامنه سلول واحد کایرال بر حداکثر انحراف و خاصیت جذب انرژی در مقایسه با طول سلول ناچیز است. به جهت تکمیل مطالعات، مقالات منتشر شده با موضوع بررسی ارتعاش استوانه‌ها در حضور سیال مورد بررسی قرار گرفت. آمویلی [۲۱] در سال ۱۹۹۶ ارتعاشات پوسته‌های استوانه‌ای افقی حاوی سیال غیرلزج، غیر قابل تراکم و به‌صورت نیمه پر را مورد ارزیابی قرار داد. او با فرض شرایط مرزی ساده در دو انتهای استوانه و با استفاده از تئوری کلاسیک ورق‌ها معادلات حاکم بر سیستم را استخراج و با روش گلرکین حل نمود. تورانی و لاکیس [۲۲] در سال ۲۰۰۱ مطالعه‌ای را بر روی پوسته‌های استوانه‌ای ناهمسانگرد انجام دادند. آن‌ها ارتعاشات پوسته استوانه‌ای در تماس با مایع غیرلزج و غیرقابل تراکم را با در نظر گرفتن اثرات برشی عرضی و گشتاور اینرسی بررسی کردند. در این مطالعه برای بررسی رفتار سیال و به‌دست‌آوردن پتانسیل و فشار وارد شده بر جداره سیال از معادلات برنولی^۸ استفاده شد. در این پژوهش، معادلات حاکم با اعمال روش حل دقیق تحلیل شده و توابع جابه‌جایی به‌دست‌آمده است. گوناوان و همکاران [۲۳] با استفاده از یک روش نیمه تحلیلی المان محدود، ارتعاش آزاد پوسته‌های استوانه‌ای پر شده از سیال را بر روی یک بستر الاستیک بررسی کردند. به‌منظور مدل‌سازی شرایط سیال درونی و محاسبه فشار وارد بر سطح پوسته از روش کوپل دینامیکی تماس سازه با سیال استفاده شد. تغییرات رفتار دینامیکی و ارتعاش سیستم به‌وسیله تغییر در پارامترهای هندسی پوسته و سیال و بستر الاستیک مورد بررسی قرار گرفت. جم و نیکجو [۲۴] با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول ارتعاش آزاد و بار بحرانی کماتش پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی حاوی سیال را بررسی کردند. آن‌ها معادلات حاکم بر مسئله را با روش ریلی ریتز حل نموده و فرکانس‌های طبیعی و بارهای بحرانی کماتش به دست آوردند و نهایتاً تأثیرات نیروهای محوری و فشار خارجی اعمال شده بر پاسخ‌های پوسته را بررسی نمودند.

با بررسی مقالات مذکور به نظر می‌رسد ارتعاش اجباری استوانه‌ی ساندویچی با هسته‌ی آگزتیک ساخته شده از ساختار لانه‌زنبوری درون رو و در حضور سیال، تاکنون مورد بررسی قرار نگرفته است. از این‌رو در مقاله‌ی حاضر، ارتعاشات اجباری پوسته استوانه‌ای سه‌لایه، حاوی سیال غیرلزج و تحت بار ضربه‌ای بررسی می‌شود. هر سه‌لایه از جنس آلومینیوم و لایه مرکزی ساخته شده از ساختار آگزتیک لانه‌زنبوری درون رو (شکل ۲) لحاظ شده است. در این مقاله، با استفاده از نظریه‌های تغییر شکل برشی مرتبه بالا و اصل همپلتون معادلات حاکم بر سیستم استخراج شده و از روش باقیمانده وزنی گالرکین^۹ حل می‌شوند. معیار اعتبارسنجی پاسخ‌ها، خروجی‌های نرم‌افزار المان محدود آباکوس است. سیستم با هر دو شرایط تکیه‌گاه ساده و گیردار بررسی می‌شود. در انتها، تأثیر عامل‌های هندسی پوسته و ساختار آگزتیک، نوع، شدت، مدت‌زمان اعمال و محل قرارگرفتن بار و اثر سیال بر پاسخ دینامیکی و پاسخ زمانی، مورد بررسی قرار می‌گیرد.



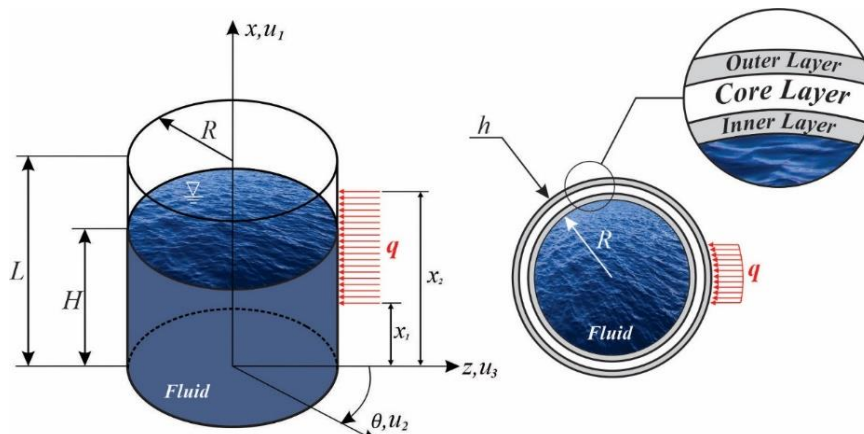
شکل ۲ ساختار شش ضلعی درون رو تحت کشش

^۸ Bernoulli equation

^۹ galerkin weighted residual method

۲- تعریف مسئله

پوسته استوانه‌ای سه لایه به طول L و شعاع R و ضخامت کل h حاوی سیال تراکم ناپذیر به ارتفاع H مانند شکل ۳ در نظر گرفته شده است. دستگاه مختصات استوانه‌ای با مولفه‌های x, θ, z برای توصیف مسئله در نظر گرفته شده است. این پوسته تحت نیروی فشاری q در جهت شعاع و به صورت یکنواخت تحریک می‌شود.



شکل ۳ پوسته استوانه‌ای سه لایه حاوی سیال در مختصات استوانه‌ای مفروض

۳- مدل سازی ریاضی

۳-۱- نظریه تغییر شکل برشی اصلاح شده

در نظریه‌های تغییر شکل برشی اصلاح شده، اینرسی‌های دورانی σ_{xz} و توزیع تنش‌های برشی $\sigma_{\theta z}$ ، غیر صفر فرض می‌شوند؛ همچنین در سطوح آزاد (رویه‌ها) تنش‌های برشی مذکور صفر به دست می‌آیند و این تئوری‌ها به ضریب تصحیح برشی نیاز ندارند. در حالت کلی میدان جابه‌جایی برای پوسته‌های استوانه‌ای به صورت رابطه ۱ در نظر گرفته می‌شود [۲۵].

$$\begin{aligned} u_1(x, \theta, z, t) &= u_0(x, \theta, t) - f_1(z) \frac{\partial w(x, \theta, t)}{\partial x} + f_2(z) \varphi_1(x, \theta, t) \\ u_2(x, \theta, z, t) &= v_0(x, \theta, t) - \frac{f_1(z)}{R} \left(\frac{\partial w(x, \theta, t)}{\partial \theta} - v(x, \theta, t) \right) + f_2(z) \varphi_2(x, \theta, t) \\ u_3(x, \theta, z, t) &= w_0(x, \theta, t) \end{aligned} \quad (1)$$

در رابطه ۱، $u_0(x, \theta, t)$ ، $v_0(x, \theta, t)$ ، $w_0(x, \theta, t)$ به ترتیب بیانگر جابه‌جایی‌های طولی، محیطی و عرضی لایه میانی؛ $u_1(x, \theta, z, t)$ ، $u_2(x, \theta, z, t)$ ، $u_3(x, \theta, z, t)$ جابه‌جایی‌های متناظر برای هر نقطه از پوسته استوانه‌ای است. همچنین توابع $\varphi_1(x, \theta, t)$ و $\varphi_2(x, \theta, t)$ به ترتیب بیانگر چرخش صفحه میانی حول محورهای x و θ هستند. $f_1(z)$ و $f_2(z)$ نیز برای تئوری‌های مختلف همانند جدول ۱ در نظر گرفته می‌شوند [۲۵].

جدول ۱ تئوری‌های مختلف برای مدلسازی سازه‌ها [۲۵]

	نظریه‌ها	$f_1(z)$	$f_2(z)$
ESDPT	exponential	$-z$	$z e^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}$
TSDPT	Trigonometric	$-z$	$\frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)$
HSDPT	Hyperbolic	$-z$	$h \sinh\left(\frac{z}{h}\right) - z \cosh\left(\frac{1}{2}\right)$
PSDPT	Parabolic	$-z$	$z \left(\frac{5}{4} - \frac{5}{3h^2} z^2 \right)$

با فرض خطی بودن روابط کرنش - جابه‌جایی برای پوسته استوانه‌ای به صورت رابطه‌ی ۲ خواهد بود [۲۶].

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + f_1(z) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + f_2(z) \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + u_3 \right) = \frac{1}{R} \left(w_0 + \frac{\partial v_0}{\partial \theta} \right) + \frac{f_1(z)}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2} - \frac{\partial v_0}{\partial \theta} \right) + \frac{f_2(z)}{R} \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta} \\ \gamma_{x\theta} &= \frac{1}{R} \frac{\partial u_1}{\partial \theta} + \frac{\partial u_2}{\partial x} = \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{f_1(z)}{R} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u_0}{\partial \theta} + f_1(z) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial \theta} + f_2(z) \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} \right) + f_2(z) \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \quad (2) \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial x} \left(1 + \frac{\partial f_1(z)}{\partial z} \right) + \frac{\partial f_2(z)}{\partial z} \phi_1 \\ \gamma_{\theta z} &= \frac{1}{R} \frac{\partial u_3}{\partial \theta} + \frac{\partial u_2}{\partial z} - \frac{u_2}{R} = \left(1 + \frac{\partial f_1(z)}{\partial z} \right) \left(\frac{1}{R} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} - \frac{v_0}{R} \right) + \frac{\partial f_2(z)}{\partial z} \phi_2\end{aligned}$$

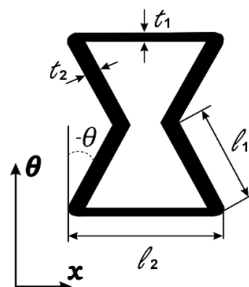
همان‌گونه که اشاره شد می‌توان روی سطوح آزاد پوسته، کرنش برشی عرضی را صفر در نظر گرفت. پوسته استوانه‌ای متشکل از سه‌لایه است که لایه وسط (هسته) دارای ساختار آگزتیک و لایه‌های فوقانی و تحتانی به‌صورت ایزوتروپیک لحاظ شده‌اند؛ بنابراین روابط تنش-کرنش به‌صورت رابطه‌ی ۳ هستند [۲۷]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{x\theta} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} Q_{11}^{(k)} & Q_{12}^{(k)} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{21}^{(k)} & Q_{22}^{(k)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{44}^{(k)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55}^{(k)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66}^{(k)} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \gamma_{\theta z} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{x\theta} \end{Bmatrix}, k = 1, 2, 3 \quad (3)$$

که در آن:

$$\begin{aligned}Q_{11}^{(k)} &= \frac{E_1^{(k)}}{1 - \nu_{12}^{(k)} \nu_{21}^{(k)}} \\ Q_{12}^{(k)} &= \frac{E_2^{(k)} \nu_{12}^{(k)}}{1 - \nu_{12}^{(k)} \nu_{21}^{(k)}} \\ Q_{22}^{(k)} &= \frac{E_2^{(k)}}{1 - \nu_{12}^{(k)} \nu_{21}^{(k)}} \\ Q_{44}^{(k)} &= G_{23}^{(k)}, Q_{55}^{(k)} = G_{13}^{(k)}, Q_{66}^{(k)} = G_{12}^{(k)}\end{aligned} \quad (4)$$

در رابطه‌ی ۴، $E_1^{(k)}$ ، $E_2^{(k)}$ ، $G_{13}^{(k)}$ ، $G_{12}^{(k)}$ ، $G_{23}^{(k)}$ ، $\nu_{12}^{(k)}$ و $\nu_{21}^{(k)}$ بیانگر مدول یانگ، مدول برشی و ضریب پواسون رویه‌ها و هسته می‌باشند. در رابطه ۳، عبارت $k = 1, 3$ بیانگر لایه فوقانی و تحتانی می‌باشد که از مواد ایزوتروپیک تشکیل شده‌اند. همچنین در این پژوهش $k = 2$ بیانگر هسته آگزتیک است. ساختار و مختصات سلول واحد برای ساختار آگزتیک مفروض، در شکل ۴ نشان داده شده است. پارامترهای الاستیک لایه آگزتیک با استفاده از رابطه ۵ محاسبه می‌شوند [۲۷]. در این روابط تغییر شکل‌های کششی و خمشی سلول‌ها لحاظ می‌شود.



شکل ۴ ساختار تک سلول لانه زنبوری درون رو [۲۷]

$$\begin{aligned}
 E_1^{(2)} &= E_s \frac{(\eta_3 \sec \theta_1)^3 (\eta_1 + \sin \theta_1)}{[1 + \eta_3^2 (\tan^2 \theta_1 + \eta_1 \eta_2 \sec^2 \theta_1)]} \\
 E_2^{(2)} &= E_s \frac{\eta_3^3 \sec \theta_1}{(\eta_1 + \sin \theta_1) (\tan^2 \theta_1 + \eta_3^2)} \\
 G_{12}^{(2)} &= E_s \frac{\eta_3^3 \sec \theta_1 (\eta_1 + \sin \theta_1)}{\eta_1^2 (1 + 2\eta_1 \eta_2^3)} \\
 G_{23}^{(2)} &= G_s \frac{\eta_3 \cos \theta_1}{\eta_1 + \sin \theta_1} \\
 G_{31}^{(2)} &= G_s \frac{\eta_3 \sec \theta_1}{2\eta_2 (\eta_1 + \sin \theta_1) (\eta_1 + 2\eta_2)} \\
 v_{12}^{(2)} &= \frac{\sec \theta_1 \tan \theta_1 (1 - \eta_3^2) (\eta_1 + \sin \theta_1)}{[1 + (\tan^2 \theta_1 + \eta_1 \eta_2 \sec^2 \theta_1) \eta_3^2]} \\
 v_{21}^{(2)} &= \frac{\sin \theta_1 (1 - \eta_3^2)}{(\tan^2 \theta_1 + \eta_3^2) (\eta_1 + \sin \theta_1)} \\
 \rho^{(2)} &= \rho_s \frac{\eta_3 (\eta_1 + 2)}{2 \cos \theta_1 (\eta_1 + \sin \theta_1)}
 \end{aligned} \tag{5}$$

در روابط ۵، $\eta_1 = \frac{t_2}{t_1}$ ، $\eta_2 = \frac{t_2}{t_1}$ ، $\eta_3 = \frac{t_1}{t_1}$ ، E_s و G_s خواص الاستیک و ρ_s چگالی ماده سازنده هسته آگزتیک هستند. همچنین برای لایه‌های ایزوتروپیک $k = 1, 3$ به صورت رابطه‌ی ۶ بدست می‌آید.

$$\begin{aligned}
 Q_{11}^{(1,3)} &= Q_{22}^{(1,3)} = \frac{E}{1 - \nu^2} \\
 Q_{12}^{(1,3)} &= Q_{21}^{(1,3)} = \frac{\nu E}{1 - \nu^2} \\
 Q_{44}^{(1,3)} &= Q_{55}^{(1,3)} = Q_{66}^{(1,3)} = G = \frac{E}{2(1 + \nu)}
 \end{aligned} \tag{6}$$

در رابطه‌ی ۶، G و ν به ترتیب بیانگر مدول یانگ، مدول برشی و ضریب پواسون لایه‌های فوقانی و تحتانی هستند. در ادامه برای به دست آوردن معادلات حاکم بر حرکت پوسته استوانه‌ای از اصل همیلتون استفاده می‌شود و مطابق رابطه ۷ داریم [۲۸].

$$\int_0^t \delta(T - U - W) dt = 0 \tag{7}$$

۳-۲- انرژی پتانسیل پوسته استوانه‌ای:

انرژی پتانسیل پوسته استوانه‌ای سه‌لایه از رابطه ۸ به دست می‌آید [۲۸]:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \int_{V^{(k)}} (\{\sigma_{xx}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{x\theta}, \sigma_{xz}, \sigma_{\theta z}\}^{(k)} \cdot \{\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{\theta\theta}, \gamma_{x\theta}, \gamma_{xz}, \gamma_{\theta z}\}) dV^{(k)} \tag{8}$$

و تغییرات آن به صورت رابطه‌ی ۹ است [۲۸].

$$\delta U = \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{\theta\theta} \delta \varepsilon_{\theta\theta} + \sigma_{x\theta} \delta \gamma_{x\theta} + \sigma_{xz} \delta \gamma_{xz} + \sigma_{\theta z} \delta \gamma_{\theta z}) dz dA \tag{9}$$

با جاگذاری معادلات رابطه ۲ در رابطه ۹، سپس انتگرال گیری جزء به جزء، به دست می‌آوریم:

$$\delta U = \int_A \left(-\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} \delta u_0 + \frac{\partial^2 S_{xx}}{\partial x^2} \delta w_0 - \frac{\partial P_{xx}}{\partial x} \delta \phi_1 - \frac{1}{R} \frac{\partial N_{\theta\theta}}{\partial \theta} \delta v_0 + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 S_{\theta\theta}}{\partial \theta^2} \delta w_0 + \frac{1}{R^2} \frac{\partial S_{\theta\theta}}{\partial \theta} \delta v_0 \right. \\ \left. - \frac{1}{R} \frac{\partial P_{\theta\theta}}{\partial \theta} \delta \phi_2 + \frac{N_{\theta\theta}}{R} \delta w_0 - \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} \delta v_0 + \frac{2}{R} \frac{\partial^2 S_{x\theta}}{\partial x \partial \theta} \delta w_0 + \frac{1}{R} \frac{\partial S_{x\theta}}{\partial x} \delta v_0 - \frac{\partial P_{x\theta}}{\partial x} \delta \phi_2 \right. \\ \left. - \frac{1}{R} \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial \theta} \delta u_0 - \frac{1}{R} \frac{\partial P_{x\theta}}{\partial \theta} \delta \phi_1 - \frac{\partial T_{xz}}{\partial x} \delta w_0 + Q_{xz} \delta \phi_1 - \frac{1}{R} \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial \theta} \delta w_0 - \frac{T_{\theta z}}{R} \delta v_0 \right. \\ \left. + Q_{\theta z} \delta \phi_2 \right) dA \quad (10)$$

که در رابطه‌ی ۱۰ نیروها و ممان‌های وارده به صورت روابط ۱۱ تعریف می‌شوند.

$$\{N_{xx}, N_{\theta\theta}, N_{x\theta}\} = \sum_{k=1}^3 \int_{z_{k-1}}^{z_k} \{\sigma_{xx}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{x\theta}\}^{(k)} dz \\ \{S_{xx}, S_{\theta\theta}, S_{x\theta}\} = \sum_{k=1}^3 \int_{z_{k-1}}^{z_k} \{\sigma_{xx}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{x\theta}\}^{(k)} f_1(z) dz \\ \{P_{xx}, P_{\theta\theta}, P_{x\theta}\} = \sum_{k=1}^3 \int_{z_{k-1}}^{z_k} \{\sigma_{xx}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{x\theta}\}^{(k)} f_2(z) dz \quad (11) \\ \{Q_{xz}, Q_{\theta z}\} = \sum_{k=1}^3 \int_{z_{k-1}}^{z_k} \{\sigma_{xz}, \sigma_{\theta z}\}^{(k)} \frac{\partial f_2(z)}{\partial z} dz \\ \{T_{xz}, T_{\theta z}\} = \sum_{k=1}^3 \int_{z_{k-1}}^{z_k} \{\sigma_{xz}, \sigma_{\theta z}\}^{(k)} \left(\frac{\partial f_1(z)}{\partial z} + 1 \right) dz$$

۳-۳- انرژی جنبشی پوسته استوانه‌ای:

انرژی جنبشی پوسته استوانه‌ای با رابطه‌ی ۱۲ تعریف می‌شود [۲۸].

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \rho^{(k)} \int_{V^{(k)}} (\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2 + \dot{u}_3^2) dV^{(k)} \quad (12)$$

همچنین تغییرات آن مطابق با رابطه‌ی ۱۳ است [۲۸].

$$\delta T = \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \rho \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} \delta \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial u_2}{\partial t} \delta \frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial u_3}{\partial t} \delta \frac{\partial u_3}{\partial t} \right) dz dA \quad (13)$$

اگر میدان جابه‌جایی رابطه‌ی ۱ را در رابطه‌ی ۱۳ قرار دهیم؛ با انتگرال‌گیری جزء به جزء به دست می‌آوریم:

$$\delta T = \int_A \left(-I_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \delta u_0 + I_1 \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial t^2} \delta w_0 - I_3 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \delta \phi_1 - I_1 \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial t^2} \delta u_0 + (I_2 + I_5) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial t^2} \delta w_0 \right. \\ \left. - I_3 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2} \delta u_0 + I_5 \frac{\partial^3 \phi_1}{\partial x \partial t^2} \delta w_0 - I_4 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2} \delta \phi_1 - I_0 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} \delta v_0 + \frac{I_1}{R} \frac{\partial^3 v_0}{\partial \theta \partial t^2} \delta w_0 \right. \\ \left. + \frac{I_1}{R} \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} \delta v_0 - I_3 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} \delta \phi_2 - \frac{I_1}{R} \frac{\partial^3 w_0}{\partial \theta \partial t^2} \delta v_0 + \frac{I_2}{R^2} \frac{\partial^4 w_0}{\partial \theta^2 \partial t^2} \delta w_0 + \frac{I_2}{R^2} \frac{\partial^3 w_0}{\partial \theta \partial t^2} \delta v_0 \right. \\ \left. - \frac{I_5}{R} \frac{\partial^3 w_0}{\partial \theta \partial t^2} \delta \phi_2 + \frac{I_1}{R} \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} \delta v_0 - \frac{I_2}{R^2} \frac{\partial^3 v_0}{\partial \theta \partial t^2} \delta w_0 - \frac{I_2}{R^2} \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} \delta v_0 + \frac{I_5}{R} \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} \delta \phi_2 \right. \\ \left. - I_3 \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial t^2} \delta v_0 + \frac{I_5}{R} \frac{\partial^3 \phi_2}{\partial \theta \partial t^2} \delta w_0 + \frac{I_5}{R} \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial t^2} \delta v_0 - I_4 \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial t^2} \delta \phi_2 - I_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \delta w_0 \right) dA \quad (14)$$

در رابطه‌ی ۱۴، ممان‌های جرمی مطابق رابطه‌ی ۱۵ بیان می‌شوند.

$$\{I_0, I_1, I_2, I_3, I_4, I_5\} = \sum_{k=1}^3 \int_{z_{k-1}}^{z_k} \rho^{(k)} \{1, f_1, f_1^2, f_2, f_2^2, f_1 f_2\} dz \quad (15)$$

۳-۴- کار نیروی خارجی:

کار انجام شده توسط بار گسترده $q_r(x, \theta, t)$ مطابق با رابطه ۱۶ تعریف می شود و تغییرات انرژی پتانسیل بار مذکور به صورت رابطه ۱۷ بیان می شود [۲۹].

$$W = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} q_r(x, \theta, t) w_0(x, \theta, t) R d\theta dx \quad (16)$$

$$\delta W = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} q_r(x, \theta, t) \delta w_0(x, \theta, t) R d\theta dx \quad (17)$$

با جاگذاری معادلات ۱۰، ۱۴ و ۱۷ در رابطه ۷، معادلات حاکم بر ارتعاش آزاد پوسته استوانه‌ای به دست می‌آیند. معادلات ۱۸ الی ۲۲ معادلات حاکم بر سیستم بدون در نظر گرفتن سیال هستند.

$$\delta u_0: \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial \theta} = I_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial t^2} + I_3 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2} \quad (18)$$

$$\delta v_0: \frac{1}{R} \frac{\partial N_{\theta\theta}}{\partial \theta} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial S_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} - \frac{1}{R} \frac{\partial S_{x\theta}}{\partial x} + \frac{T_{\theta z}}{R} = \left(I_0 - \frac{2I_1}{R} + \frac{I_2}{R^2} \right) \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + \left(\frac{I_1}{R} - \frac{I_2}{R^2} \right) \frac{\partial^3 w_0}{\partial \theta \partial t^2} + \left(I_3 - \frac{I_5}{R} \right) \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial t^2} \quad (19)$$

$$\delta w_0: \frac{\partial T_{xz}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 S_{xx}}{\partial x^2} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 S_{\theta\theta}}{\partial \theta^2} - \frac{N_{\theta\theta}}{R} - \frac{2}{R} \frac{\partial^2 S_{x\theta}}{\partial x \partial \theta} + q_r(x, \theta, t) = I_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} - I_1 \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial t^2} - (I_2 + I_5) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial t^2} - I_5 \frac{\partial^3 \phi_1}{\partial x \partial t^2} - \left(\frac{I_1}{R} - \frac{I_2}{R^2} \right) \frac{\partial^3 v_0}{\partial \theta \partial t^2} - \frac{I_2}{R^2} \frac{\partial^4 w_0}{\partial \theta^2 \partial t^2} - \frac{I_5}{R} \frac{\partial^3 \phi_2}{\partial \theta \partial t^2} \quad (20)$$

$$\delta \phi_1: \frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial P_{x\theta}}{\partial \theta} - Q_{xz} = I_3 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_4 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2} \quad (21)$$

$$\delta \phi_2: \frac{\partial P_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial P_{\theta\theta}}{\partial \theta} - Q_{\theta z} = \left(I_3 - \frac{I_5}{R} \right) \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + \frac{I_5}{R} \frac{\partial^3 w_0}{\partial \theta \partial t^2} + I_4 \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial t^2} \quad (22)$$

روابط ۱۸ الی ۲۲ بر حسب مولفه‌های نیرویی نوشته شده اند؛ برای تبدیل این معادلات بر حسب مولفه‌های جابه‌جایی لازم است مولفه‌های نیرو و گشتاور رابطه‌ی ۱۱ را با استفاده از معادلات ساختاری ۴ و ۵، بر حسب مولفه‌های جابه‌جایی بنویسیم. مطابق روابط ۲۳ الی ۳۵ بدست می‌آوریم:

$$N_{xx} = \frac{A_1}{R} \left(\frac{\partial v_0}{\partial \theta} + w_0 \right) + \frac{A_2}{R} \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta} + \frac{A_3}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2} - \frac{\partial v_0}{\partial \theta} \right) + B_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} + B_2 \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + B_3 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \quad (23)$$

$$N_{\theta\theta} = \frac{F_1}{R} \left(\frac{\partial v_0}{\partial \theta} + w_0 \right) + \frac{F_2}{R} \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta} + \frac{F_3}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2} - \frac{\partial v_0}{\partial \theta} \right) + A_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} + A_2 \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + A_3 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \quad (24)$$

$$N_{x\theta} = C_1 \frac{\partial v_0}{\partial x} + C_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x} + \frac{C_3}{R} \left(2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + \frac{C_1}{R} \frac{\partial u_0}{\partial \theta} + \frac{C_2}{R} \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} \quad (25)$$

$$S_{xx} = \frac{A_3}{R} \left(\frac{\partial v_0}{\partial \theta} + w_0 \right) + \frac{A_4}{R} \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta} + \frac{A_5}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2} - \frac{\partial v_0}{\partial \theta} \right) + B_3 \frac{\partial u_0}{\partial x} + B_4 \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + B_5 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \quad (26)$$

$$S_{\theta\theta} = \frac{F_3}{R} \left(\frac{\partial v_0}{\partial \theta} + w_0 \right) + \frac{F_4}{R} \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta} + \frac{F_5}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2} - \frac{\partial v_0}{\partial \theta} \right) + A_3 \frac{\partial u_0}{\partial x} + A_4 \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + A_5 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \quad (27)$$

$$S_{x\theta} = C_3 \frac{\partial v_0}{\partial x} + C_4 \frac{\partial \phi_2}{\partial x} + \frac{C_5}{R} \left(2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + \frac{C_3}{R} \frac{\partial u_0}{\partial \theta} + \frac{C_4}{R} \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} \quad (28)$$

$$P_{xx} = \frac{A_2}{R} \left(\frac{\partial v_0}{\partial \theta} + w_0 \right) + \frac{A_6}{R} \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta} + \frac{A_4}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2} - \frac{\partial v_0}{\partial \theta} \right) + B_2 \frac{\partial u_0}{\partial x} + B_6 \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + B_4 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \quad (29)$$

$$P_{\theta\theta} = \frac{F_2}{R} \left(\frac{\partial v_0}{\partial \theta} + w_0 \right) + \frac{F_6}{R} \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta} + \frac{F_4}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2} - \frac{\partial v_0}{\partial \theta} \right) + A_2 \frac{\partial u_0}{\partial x} + A_6 \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + A_4 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \quad (30)$$

$$P_{x\theta} = C_2 \frac{\partial v_0}{\partial x} + C_6 \frac{\partial \phi_2}{\partial x} + \frac{C_4}{R} \left(2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + \frac{C_2}{R} \frac{\partial u_0}{\partial \theta} + \frac{C_6}{R} \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} \quad (31)$$

$$Q_{xz} = E_6 \phi_1 + (E_3 + E_4) \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (32)$$

$$Q_{\theta z} = \frac{(D_3 + D_4)}{R} \left(\frac{\partial w_0}{\partial \theta} - v_0 \right) + D_6 \phi_2 \quad (33)$$

$$T_{xz} = (E_3 + E_4) \phi_1 + (E_1 + 2E_2 + E_5) \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (34)$$

$$T_{\theta z} = (D_3 + D_4) \phi_2 + \frac{(D_1 + 2D_2 + D_5)}{R} \left(\frac{\partial w_0}{\partial \theta} - v_0 \right) \quad (35)$$

در روابط ۲۳ الی ۳۵ ضرایب $F_i, E_i, D_i, C_i, B_i, A_i$ که $(1 \leq i \leq 6)$ به صورت روابط ۳۶ الی ۴۱ تعریف می‌شوند.

$$\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\} = \sum_{k=1}^3 \int_{z_{k-1}}^{z_k} Q_{12}^{(k)} \{1, f_2, f_1, f_1 f_2, f_1^2, f_2^2\} dz \quad (36)$$

$$\{B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6\} = \sum_{k=1}^3 \int_{z_{k-1}}^{z_k} Q_{11}^{(k)} \{1, f_2, f_1, f_1 f_2, f_1^2, f_2^2\} dz \quad (37)$$

$$\{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6\} = \sum_{k=1}^3 \int_{z_{k-1}}^{z_k} Q_{66}^{(k)} \{1, f_2, f_1, f_1 f_2, f_1^2, f_2^2\} dz \quad (38)$$

$$\{D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6\} = \sum_{k=1}^3 \int_{z_{k-1}}^{z_k} Q_{44}^{(k)} \left\{ 1, \frac{\partial f_1}{\partial z}, \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} \frac{\partial f_2}{\partial z}, \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} \right)^2, \left(\frac{\partial f_2}{\partial z} \right)^2 \right\} dz \quad (39)$$

$$\{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\} = \sum_{k=1}^3 \int_{z_{k-1}}^{z_k} Q_{55}^{(k)} \left\{ 1, \frac{\partial f_1}{\partial z}, \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} \frac{\partial f_2}{\partial z}, \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} \right)^2, \left(\frac{\partial f_2}{\partial z} \right)^2 \right\} dz \quad (40)$$

$$\{F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6\} = \sum_{k=1}^3 \int_{z_{k-1}}^{z_k} Q_{22}^{(k)} \{1, f_2, f_1, f_1 f_2, f_1^2, f_2^2\} dz \quad (41)$$

با جاگذاری روابط مرتبط با نیروها و ممان‌ها یا به عبارتی روابط ۲۳ الی ۳۵، در معادلات حاکم بر حسب نیرو (روابط ۱۸ الی ۲۲)، می‌توان معادلات حاکم را بر حسب مولفه‌های جابه‌جایی به دست آورد که این معادلات مطابق با روابط ۴۲ الی ۴۶ به دست می‌آیند.

$$\begin{aligned} \delta u_0 &= \frac{A_1}{R} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) + \frac{A_2}{R} \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x \partial \theta} + \frac{A_3}{R^2} \left(\frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial \theta^2} - \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial \theta} \right) + B_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + B_2 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} + B_3 \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} \\ &+ \frac{1}{R} \left(C_1 \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial \theta} + C_2 \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x \partial \theta} + \frac{C_3}{R} \left(2 \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial \theta^2} - \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial \theta} \right) + \frac{C_1}{R} \frac{\partial^2 u_0}{\partial \theta^2} + \frac{C_2}{R} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \theta^2} \right) \\ &= I_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial t^2} + I_3 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \delta v_0: & \frac{1}{R} \left(\frac{F_1}{R} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial \theta^2} + \frac{\partial w_0}{\partial \theta} \right) + \frac{F_2}{R} \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial \theta^2} + \frac{F_3}{R^2} \left(\frac{\partial^3 w_0}{\partial \theta^3} - \frac{\partial^2 v_0}{\partial \theta^2} \right) + A_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial \theta} + A_2 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x \partial \theta} + A_3 \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial \theta} \right) \\ & - \frac{1}{R^2} \left(\frac{F_3}{R} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial \theta^2} + \frac{\partial w_0}{\partial \theta} \right) + \frac{F_4}{R} \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial \theta^2} + \frac{F_5}{R^2} \left(\frac{\partial^3 w_0}{\partial \theta^3} - \frac{\partial^2 v_0}{\partial \theta^2} \right) + A_3 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial \theta} + A_4 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x \partial \theta} \right. \\ & \left. + A_5 \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial \theta} \right) + C_1 \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + C_2 \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2} + \frac{C_3}{R} \left(2 \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial \theta} - \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right) + \frac{C_1}{R} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial \theta} + \frac{C_2}{R} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x \partial \theta} \\ & - \frac{1}{R} \left(C_3 \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + C_4 \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2} + \frac{C_5}{R} \left(2 \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial \theta} - \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right) + \frac{C_3}{R} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial \theta} + \frac{C_4}{R} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x \partial \theta} \right) \\ & + \frac{1}{R} \left((D_3 + D_4) \phi_2 + \frac{(D_1 + 2D_2 + D_5)}{R} \left(\frac{\partial w_0}{\partial \theta} - v_0 \right) \right) \end{aligned} \quad (۴۳)$$

$$\begin{aligned} \delta w_0 = & (E_3 + E_4) \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + (E_1 + 2E_2 + E_5) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{1}{R} \left((D_3 + D_4) \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta} + \frac{(D_1 + 2D_2 + D_5)}{R} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2} - \frac{\partial v_0}{\partial \theta} \right) \right) \\ & - \frac{A_3}{R} \left(\frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial \theta} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) - \frac{A_4}{R} \frac{\partial^3 \phi_2}{\partial x^2 \partial \theta} - \frac{A_5}{R^2} \left(\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial \theta^2} - \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial \theta} \right) - B_3 \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} - B_4 \frac{\partial^3 \phi_1}{\partial x^3} \\ & - B_5 \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} \\ & - \frac{1}{R^2} \left(\frac{F_3}{R} \left(\frac{\partial^3 v_0}{\partial \theta^3} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2} \right) + \frac{F_4}{R} \frac{\partial^3 \phi_2}{\partial \theta^3} + \frac{F_5}{R^2} \left(\frac{\partial^4 w_0}{\partial \theta^4} - \frac{\partial^3 v_0}{\partial \theta^3} \right) + A_3 \frac{\partial u_0}{\partial x} + A_4 \frac{\partial^3 \phi_1}{\partial x \partial \theta^2} \right. \\ & \left. + A_5 \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial \theta^2} \right) \end{aligned} \quad (۴۴)$$

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{R} \left(\frac{F_1}{R} \left(\frac{\partial v_0}{\partial \theta} + w_0 \right) + \frac{F_2}{R} \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta} + \frac{F_3}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2} - \frac{\partial v_0}{\partial \theta} \right) + A_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} + A_2 \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + A_3 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) \\ & - \frac{2}{R} \left(C_3 \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial \theta} + C_4 \frac{\partial^3 \phi_2}{\partial x^2 \partial \theta} + \frac{C_5}{R} \left(2 \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial \theta^2} - \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial \theta} \right) + \frac{C_3}{R} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial \theta^2} + \frac{C_4}{R} \frac{\partial^3 \phi_1}{\partial x \partial \theta^2} \right) \\ & + q_r(x, \theta, t) \\ & = I_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} - I_1 \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial t^2} - (I_2 + I_5) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial t^2} - I_5 \frac{\partial^3 \phi_1}{\partial x \partial t^2} - \left(\frac{I_1}{R} - \frac{I_2}{R^2} \right) \frac{\partial^3 v_0}{\partial \theta \partial t^2} - \frac{I_2}{R^2} \frac{\partial^4 w_0}{\partial \theta^2 \partial t^2} \\ & - \frac{I_5}{R} \frac{\partial^3 \phi_2}{\partial \theta \partial t^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta \phi_1: & \frac{A_2}{R} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) + \frac{A_6}{R} \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x \partial \theta} + \frac{A_4}{R^2} \left(\frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial \theta^2} - \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial \theta} \right) + B_2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + B_6 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} + B_4 \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} \\ & + \frac{1}{R} \left(C_2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial \theta} + C_6 \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x \partial \theta} + \frac{C_4}{R} \left(2 \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial \theta^2} - \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial \theta} \right) + \frac{C_2}{R} \frac{\partial^2 u_0}{\partial \theta^2} + \frac{C_6}{R} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \theta^2} \right) - E_6 \phi_1 \\ & - (E_3 + E_4) \frac{\partial w_0}{\partial x} = I_3 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_4 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (۴۵)$$

$$\begin{aligned} \delta \phi_2: & C_2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + C_6 \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2} + \frac{C_4}{R} \left(2 \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial \theta} - \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right) + \frac{C_2}{R} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial \theta} + \frac{C_6}{R} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x \partial \theta} \\ & + \frac{1}{R} \left(\frac{F_2}{R} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial \theta^2} + \frac{\partial w_0}{\partial \theta} \right) + \frac{F_6}{R} \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial \theta^2} + \frac{F_4}{R^2} \left(\frac{\partial^3 w_0}{\partial \theta^3} - \frac{\partial^2 v_0}{\partial \theta^2} \right) + A_2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial \theta} + A_6 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x \partial \theta} \right) \\ & + A_4 \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial \theta} - \frac{(D_3 + D_4)}{R} \left(\frac{\partial w_0}{\partial \theta} - v_0 \right) - D_6 \phi_2 = \left(I_3 - \frac{I_5}{R} \right) \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + \frac{I_5}{R} \frac{\partial^3 w_0}{\partial \theta \partial t^2} + I_4 \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (۴۶)$$

۳-۵- معادلات حاکم بر رفتار سیال

در این بخش معادلات حاکم بر رفتار نوسانی سیال درون پوسته استوانه‌ای با فرض سیال غیر چرخشی، غیر قابل تراکم و غیرلزج با چگالی ρ_f به دست می‌آید. در مسائل مرتبط با سازه و سیال، شکل موج‌ها به دو دسته ی مودهای اسلاشینگ^{۱۰} و مودهای مرتبط بالجینگ^{۱۱} تقسیم بندی می شوند. در مودهای بالجینگ، کف به صورت صلب و پوسته به صورت انعطاف پذیر فرض می‌شوند. به عبارتی فرکانس‌های طبیعی بالجینگ ناشی از ارتعاش دیواره مخزن هستند. در خصوص مودهای مرتبط با

¹⁰ sloshing

¹¹ Bulging

اسلاشینگ، کف و پوسته هر دو به صورت صلب فرض می‌شوند و فرکانس‌های اسلاشینگ بیانگر نوسان سیال هستند. پتانسیل سرعت سیال با $\bar{\phi}(x, \theta, r, t)$ نشان داده می‌شود و این پتانسیل سرعت باید در معادله لاپلاس ۴۷ بگنجد [۳۰].

$$\frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial x^2} = 0 \quad (47)$$

در این مطالعه پتانسیل سرعت سیال به صورت هماهنگ و با رابطه‌ی ۴۸ در نظر گرفته شده است.

$$\bar{\phi}(x, \theta, r, t) = i\omega \phi(x, \theta, r) e^{i\omega t} \quad (48)$$

در معادله ۴۸، $i^2 = -1$ و $\phi(x, \theta, r)$ پتانسیل جابه‌جایی سیال هستند. با استفاده از اصل جمع آثار می‌توان پتانسیل جابه‌جایی سیال را به صورت حاصل جمع پتانسیل جابه‌جایی مرتبط با بالچینگ و پتانسیل جابه‌جایی مرتبط با اسلاشینگ نوشت که به صورت رابطه‌ی ۴۹ نوشته می‌شود.

$$\phi = \phi^{(B)} + \phi^{(s)} \quad (49)$$

در رابطه ۴۹، $\phi^{(B)}$ و $\phi^{(s)}$ به ترتیب بیانگر پتانسیل جابه‌جایی بالچینگ و اسلاشینگ هستند. برای بدست آوردن پتانسیل سیال شرایط مرزی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\text{at } x = 0 \quad \frac{\partial \phi^{(B)}}{\partial x} = 0 \quad (50) \quad \frac{\partial \phi^{(s)}}{\partial x} = 0 \quad (53)$$

$$\text{at } x = H \quad \phi^{(B)} = 0 \quad (51) \quad \omega^2 \phi = g \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (54)$$

$$\text{at } r = R \quad \frac{\partial \phi^{(B)}}{\partial r} = w(x, \theta, t) \quad (52) \quad \frac{\partial \phi^{(s)}}{\partial r} = 0 \quad (55)$$

که در رابطه‌ی ۵۴، g شتاب گرانش زمین است. شرایط مرزی با فرض صفر بودن سرعت عمودی در کف مخزن برای هر دو پتانسیل بالچینگ و اسلاشینگ نوشته شده است. برای پتانسیل بالچینگ سرعت شعاعی سیال در مجاورت دیواره پوسته برابر با سرعت پوسته و فشار دینامیکی در سطح آزاد سیال برابر صفر فرض شده است. برای پتانسیل اسلاشینگ، سرعت سیال در مجاورت پوسته به دلیل صلب فرض نمودن پوسته، برابر صفر و در سطح آزاد سیال به صورت رابطه ۵۴ در نظر گرفته شده است. با استفاده از اصل جمع آثار، پتانسیل‌ها را در رابطه ۵۴ جاگذاری نموده و رابطه‌ی ۵۶ نوشته می‌شود.

$$\omega^2 \phi^{(B)} = g \frac{\partial}{\partial x} (\phi^{(B)} + \phi^{(s)}) \quad \text{at } (x = H) \quad (56)$$

برای بدست آوردن پاسخ پتانسیل سیال از روش جداسازی متغیرها استفاده می‌شود؛ لذا رابطه‌ی ۵۷ نوشته می‌شود:

$$\phi^{(B)} = R_1(r) \Theta(\theta) X(x) \quad (57)$$

پس از حل معادله‌ی ۵۷ [۳۱، ۳۰]، نهایتاً پاسخ پتانسیل مرتبط با بالچینگ به صورت رابطه‌ی ۵۸ است.

$$\phi^{(B)} = \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N \tilde{A}_{mn} \cos\left(\frac{(2m-1)\pi}{2H} x\right) \cos(n\theta) I_n\left(\frac{(2m-1)\pi}{2H} r\right) \quad (58)$$

در رابطه ۵۸، \tilde{A}_{mn} ضرایب مجهول هستند که با توجه به شرط مرزی باقیمانده مرتبط با دیواره انعطاف‌پذیر یعنی رابطه ۵۲ به دست می‌آیند.

$$\sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N \tilde{A}_{mn} \frac{(2m-1)\pi}{2H} \cos\left(\frac{(2m-1)\pi x}{2H}\right) \cos(n\theta) I'_n\left(\frac{(2m-1)\pi R}{2H}\right) = w(x, \theta) \quad (59)$$

در نتیجه، با توجه به بسط سری فوریه و رابطه ۵۹ ضرایب \tilde{A}_{mn} به صورت رابطه‌ی ۶۰ نوشته می‌شوند [۳۱].

$$\tilde{A}_{mn} = \frac{\text{coeff}}{2\pi R H} \int_0^H \int_0^{2\pi} \cos\left(\frac{(2m-1)\pi}{2H} x\right) \cos(n\theta) R d\theta dx}{\frac{(2m-1)\pi}{2H} I'_n\left(\frac{(2m-1)\pi}{2H} R\right)} \quad (60)$$

$$coeff = \begin{cases} 1 & \text{if } m = n = 0 \\ 2 & \text{if } m \text{ or } n = 0 \\ 4 & \text{if } m \text{ and } n \neq 0 \end{cases}$$

با استفاده از یک روش مشابه و باتوجه به شرایط مرزی مرتبط با اسلاشینگ، تابع پتانسیل اسلاشینگ طبق رابطه ۶۱ نوشته می شود.

$$\phi^{(s)} = \sum_{k=1}^K \sum_{n=0}^N \bar{B}_{nk} \cosh\left(\frac{\varepsilon_{nk}}{R} x\right) \cos(n\theta) J_n\left(\frac{\varepsilon_{nk}}{R} r\right) \quad (61)$$

رابطه ی ۶۱ با توجه به شرایط مرزی اسلوشینگ، به رابطه ی ۶۲ تبدیل می شود.

$$\frac{dJ_n\left(\frac{\varepsilon_{nk}}{R} r\right)}{dr} = 0 \quad \text{at } (r = R) \quad (62)$$

با توجه به اینکه سیال مورد نظر یک سیال غیر قابل تراکم فرض شده است، انرژی جنبشی آن به صورت رابطه ۶۳ در نظر گرفته می شود [۳۰].

$$T_f = \frac{1}{2} \rho_f \omega^2 \iint_S \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} dS \quad (63)$$

که ρ_f چگالی سیال، n نرمال سطح مرتبط و S سطح مرتبط با انتگرال گیری هستند و تغییرات انرژی جنبشی سیال به صورت رابطه ی ۶۴ بیان می شود.

$$\delta T_f = \frac{1}{2} \rho_f \omega^2 \int_0^H \int_0^{2\pi} (\phi^{(B)}|_{r=R} + \phi^{(s)}|_{r=R}) \delta w R d\theta dx \quad (64)$$

با در نظر گرفتن پوسته استوانه ای حاوی سیال، می توان اصل همپلتون را برای سیستم مورد نظر به صورت رابطه ۶۹ بازنویسی نمود.

$$\int_0^t (\delta T_{shell} + \delta T_{fluid} - \delta U_{shell} - \delta W) dt = 0 \quad (69)$$

با توجه به اینکه تغییرات انرژی جنبشی سیال متناسب با δw است، حضور سیال تنها در معادله δw اثر می گذارد و سایر معادلات به دست آمده تغییری نخواهند داشت؛ بنابراین معادله ی ۴۴ به معادله ی ۷۰ تغییر پیدا می کند.

$$\begin{aligned} \delta w_0 = & (E_3 + E_4) \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + (E_1 + 2E_2 + E_5) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{1}{R} \left((D_3 + D_4) \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta} + \frac{(D_1 + 2D_2 + D_5)}{R} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2} - \frac{\partial v_0}{\partial \theta} \right) \right) \\ & - \frac{A_3}{R} \left(\frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial \theta} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) - \frac{A_4}{R} \frac{\partial^3 \phi_2}{\partial x^2 \partial \theta} - \frac{A_5}{R^2} \left(\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial \theta^2} - \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial \theta} \right) - B_3 \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} - B_4 \frac{\partial^3 \phi_1}{\partial x^3} \\ & - B_5 \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} \\ & - \frac{1}{R^2} \left(\frac{F_3}{R} \left(\frac{\partial^3 v_0}{\partial \theta^3} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2} \right) + \frac{F_4}{R} \frac{\partial^3 \phi_2}{\partial \theta^3} + \frac{F_5}{R^2} \left(\frac{\partial^4 w_0}{\partial \theta^4} - \frac{\partial^3 v_0}{\partial \theta^3} \right) + A_3 \frac{\partial u_0}{\partial x} + A_4 \frac{\partial^3 \phi_1}{\partial x \partial \theta^2} \right. \\ & \left. + A_5 \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial \theta^2} \right) \\ & - \frac{1}{R} \left(\frac{F_1}{R} \left(\frac{\partial v_0}{\partial \theta} + w_0 \right) + \frac{F_2}{R} \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta} + \frac{F_3}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2} - \frac{\partial v_0}{\partial \theta} \right) + A_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} + A_2 \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + A_3 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) \\ & - \frac{2}{R} \left(C_3 \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial \theta} + C_4 \frac{\partial^3 \phi_2}{\partial x^2 \partial \theta} + \frac{C_5}{R} \left(2 \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial \theta^2} - \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial \theta} \right) + \frac{C_3}{R} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial \theta^2} + \frac{C_4}{R} \frac{\partial^3 \phi_1}{\partial x \partial \theta^2} \right) \\ & + q_r(x, \theta, t) \\ = & I_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} - I_1 \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial t^2} - (I_2 + I_5) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial t^2} - I_5 \frac{\partial^3 \phi_1}{\partial x \partial t^2} - \left(\frac{I_1}{R} - \frac{I_2}{R^2} \right) \frac{\partial^3 v_0}{\partial \theta \partial t^2} - \frac{I_2}{R^2} \frac{\partial^4 w_0}{\partial \theta^2 \partial t^2} \\ & - \frac{I_5}{R} \frac{\partial^3 \phi_2}{\partial \theta \partial t^2} - \frac{1}{2} \rho_f \omega^2 (\phi^{(B)}|_{r=R} + \phi^{(s)}|_{r=R}) \end{aligned} \quad (70)$$

۴- حل معادلات حرکت

در این مطالعه از روش عددی گلرکین برای حل معادلات استفاده شده است. برای توصیف پاسخ پوسته استوانه‌ای نسبت به نیروی اعمال شده رابطه‌ی ۷۱ در نظر گرفته شده است [۳۲].

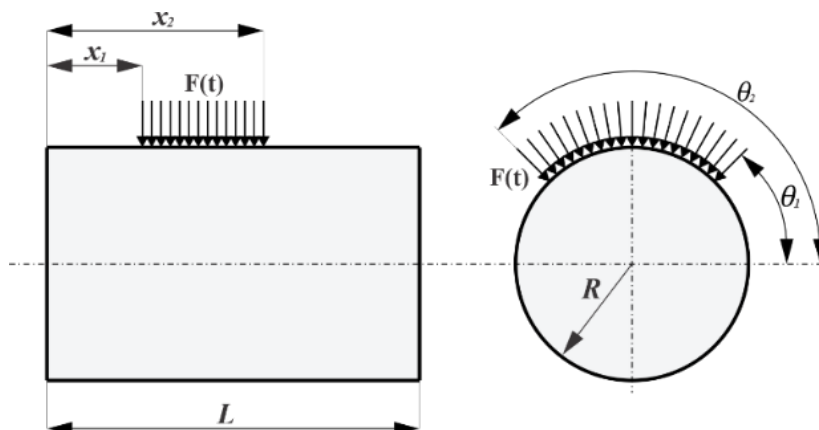
$$\begin{aligned}
 u_0(x, \theta, t) &= \sum_{\bar{m}=1}^{\bar{M}} \sum_{\bar{n}=1}^{\bar{N}} u_{\bar{m}\bar{n}} \bar{u}_0(x, \theta) T_{\bar{m}\bar{n}}(t) \\
 v_0(x, \theta, t) &= \sum_{\bar{m}=1}^{\bar{M}} \sum_{\bar{n}=1}^{\bar{N}} v_{\bar{m}\bar{n}} \bar{v}_0(x, \theta) T_{\bar{m}\bar{n}}(t) \\
 w_0(x, \theta, t) &= \sum_{\bar{m}=1}^{\bar{M}} \sum_{\bar{n}=1}^{\bar{N}} w_{\bar{m}\bar{n}} \bar{w}_0(x, \theta) T_{\bar{m}\bar{n}}(t) \\
 \phi_1(x, \theta, t) &= \sum_{\bar{m}=1}^{\bar{M}} \sum_{\bar{n}=1}^{\bar{N}} \phi_{1\bar{m}\bar{n}} \bar{\phi}_1(x, \theta) T_{\bar{m}\bar{n}}(t) \\
 \phi_2(x, \theta, t) &= \sum_{\bar{m}=1}^{\bar{M}} \sum_{\bar{n}=1}^{\bar{N}} \phi_{2\bar{m}\bar{n}} \bar{\phi}_2(x, \theta) T_{\bar{m}\bar{n}}(t)
 \end{aligned} \tag{۷۱}$$

در رابطه ۷۱، $u_{\bar{m}\bar{n}}$ ، $v_{\bar{m}\bar{n}}$ ، $w_{\bar{m}\bar{n}}$ ، $\phi_{1\bar{m}\bar{n}}$ و $\phi_{2\bar{m}\bar{n}}$ ضرایب مجهولی می‌باشند که پس از کمینه سازی خطاها به دست می‌آیند. $\bar{u}_0(x, \theta)$ ، $\bar{v}_0(x, \theta)$ ، $\bar{w}_0(x, \theta)$ ، $\bar{\phi}_1(x, \theta)$ و $\bar{\phi}_2(x, \theta)$ نیز موسوم به توابع سعی می‌باشند که این توابع باید شروط مرزی ضروری را ارضا نمایند که در روش گلرکین همان توابع وزن نیز به شمار می‌روند. با توجه به این که پوسته‌ی استوانه‌ای در دو حالت پوسته استوانه‌ای با دو سر ساده و پوسته‌ی استوانه‌ای با دو سرگردار مورد بررسی واقع می‌شود توابع سعی به صورت روابط ۷۲ و ۷۳ اختیار خواهند شد.

$$\begin{aligned}
 \bar{u}_0(x, \theta) &= \cos(\alpha_{\bar{m}}x) \cos(\bar{n}\theta) \\
 \bar{v}_0(x, \theta) &= \sin(\alpha_{\bar{m}}x) \sin(\bar{n}\theta) \\
 (S - S) \rightarrow \bar{w}_0(x, \theta) &= \sin(\alpha_{\bar{m}}x) \cos(\bar{n}\theta) \\
 \bar{\phi}_1(x, \theta) &= \cos(\alpha_{\bar{m}}x) \cos(\bar{n}\theta) \\
 \bar{\phi}_2(x, \theta) &= \sin(\alpha_{\bar{m}}x) \sin(\bar{n}\theta) \\
 \bar{u}_0(x, \theta) &= \sin(2\alpha_{\bar{m}}x) \cos(\bar{n}\theta) \\
 \bar{v}_0(x, \theta) &= \sin^2(\alpha_{\bar{m}}x) \sin(\bar{n}\theta) \\
 (C - C) \rightarrow \bar{w}_0(x, \theta) &= \sin^2(\alpha_{\bar{m}}x) \cos(\bar{n}\theta) \\
 \bar{\phi}_1(x, \theta) &= \sin(2\alpha_{\bar{m}}x) \cos(\bar{n}\theta) \\
 \bar{\phi}_2(x, \theta) &= \sin^2(\alpha_{\bar{m}}x) \sin(\bar{n}\theta)
 \end{aligned} \tag{۷۲}$$

در روابط فوق \bar{m} و \bar{n} به ترتیب بیانگر تعداد نیم موج‌های طولی و محیطی و $\alpha_{\bar{m}}$ برابر $\frac{\bar{m}\pi}{L}$ است. در تحلیل ارتعاشات اجباری بارهای عرضی وارد شده به سیستم، وابسته به زمان هستند؛ بنابراین، بارها به صورت تابعی از مکان و زمان در نظر گرفته شده (شکل ۵) و مطابق رابطه‌ی ۷۴ بیان می‌شوند.

$$q_r(x, \theta, t) = Q_r(x, \theta)f(t) = \sum_{\bar{m}} \sum_{\bar{n}} \bar{p}_{\bar{m}\bar{n}} f(t) = \sum_{\bar{m}} \sum_{\bar{n}} p_{\bar{m}\bar{n}} \bar{w}_0(x, \theta)F(t) \tag{۷۴}$$



شکل ۵ پوسته‌ای استوانه‌ای تحت نیروی تحریک عرضی

که $F(t)$ هر یک از مقادیر آمده در جدول ۲ را می‌پذیرد.

جدول ۲ توابع مختلف به کار رفته در ارتعاش اجباری

Function Type	Step Function	Triangle Function	Sin Function	Exponential Function
Function				
	$F(t) = \begin{cases} F_0 & t \leq t_1 \\ 0 & t > t_1 \end{cases}$	$F(t) = \begin{cases} F_0(1 - \frac{t}{t_1}) & t \leq t_1 \\ 0 & t > t_1 \end{cases}$	$F(t) = \begin{cases} F_0 \sin \frac{\pi t}{t_1} & t \leq t_1 \\ 0 & t > t_1 \end{cases}$	$F(t) = F_0 e^{-at}$

در رابطه‌ی ۷۴ $p_{\tilde{m}\tilde{n}}$ با توجه به شرایط تکیه گاهی ساده و گیردار به صورت روابط ۷۵ در نظر گرفته می‌شود.

$$q_r(x, \theta, t) = \begin{cases} \sum_{\tilde{m}} \sum_{\tilde{n}} p_{\tilde{m}\tilde{n}} \sin(\alpha_{\tilde{m}}x) \cos(\tilde{n}\theta) F(t) & (S - S) \\ \sum_{\tilde{m}} \sum_{\tilde{n}} p_{\tilde{m}\tilde{n}} \sin^2(\alpha_{\tilde{m}}x) \cos(\tilde{n}\theta) F(t) & (C - C) \end{cases} \quad (75)$$

از شکل ۵ می‌توان نشان داد که بار به صورت یکنواخت و به صورت یک سطح مستطیلی با ابعاد $2l_1 \times 2l_2$ بر سطح پوسته‌ی استوانه‌ای وارد می‌شود که مقادیر l_1 و l_2 از رابطه ۷۶ به دست می‌آیند.

$$\begin{aligned} 2l_1 &= (x_2 - x_1) \\ 2l_2 &= R(\theta_2 - \theta_1) \end{aligned} \quad (76)$$

همچنین x و θ نیز مختصات مرکز اعمال بار هستند. حال اگر طرفین رابطه ۷۵ را برای حالت شرایط مرزی ساده، در $\sin(\alpha_{\tilde{m}}x) \cos(\tilde{n}\theta)$ و برای حالت گیردار، در $\sin^2(\alpha_{\tilde{m}}x) \cos(\tilde{n}\theta)$ ضرب نموده و روی سطح عملی بار، انتگرال بگیریم، ضرایب $p_{\tilde{m}\tilde{n}}$ به صورت رابطه ۷۷ و ۷۸ به دست می‌آیند.

$$(s - s) \quad \begin{cases} p_{\tilde{m}\tilde{n}} = \frac{1}{\pi L} \int_{x_1}^{x_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} q_0 \sin(\alpha_{\tilde{m}}x) \cos(\tilde{n}\theta) d\theta dx & n = 0 \\ p_{\tilde{m}\tilde{n}} = \frac{2}{\pi L} \int_{x_1}^{x_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} q_0 \sin(\alpha_{\tilde{m}}x) \cos(\tilde{n}\theta) d\theta dx & n > 0 \end{cases} \quad (77)$$

$$(c - c) \quad \begin{cases} p_{\tilde{m}\tilde{n}} = \frac{4}{3\pi L} \int_{x_1}^{x_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} q_0 \sin^2(\alpha_{\tilde{m}}x) \cos(\tilde{n}\theta) d\theta dx & n = 0 \\ p_{\tilde{m}\tilde{n}} = \frac{8}{3\pi L} \int_{x_1}^{x_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} q_0 \sin^2(\alpha_{\tilde{m}}x) \cos(\tilde{n}\theta) d\theta dx & n > 0 \end{cases} \quad (78)$$

با جاگذاری پاسخ‌های ۴۷ در معادلات حرکت سیستم و با توجه به فرکانس طبیعی سیستم در ارتعاش آزاد و بار اعمال شده،

روابط ۷۹ الی ۸۳ به دست می‌آیند.

$$-\omega_{\bar{m}\bar{n}}^2 T_{\bar{m}\bar{n}}(t) \left(I_0 \bar{U}_{\bar{m}\bar{n}} + I_1 \frac{\partial \bar{W}_{\bar{m}\bar{n}}}{\partial x} + I_3 \bar{\Phi}_{1\bar{m}\bar{n}} \right) = \ddot{T}_{\bar{m}\bar{n}}(t) \left(I_0 \bar{U}_{\bar{m}\bar{n}} + I_1 \frac{\partial \bar{W}_{\bar{m}\bar{n}}}{\partial x} + I_3 \bar{\Phi}_{1\bar{m}\bar{n}} \right) \quad (۷۹)$$

$$-\omega_{\bar{m}\bar{n}}^2 T_{\bar{m}\bar{n}}(t) \left(\left(I_0 - \frac{2I_1}{R} + \frac{I_2}{R^2} \right) \bar{V}_{\bar{m}\bar{n}} + \left(\frac{I_1}{R} - \frac{I_2}{R^2} \right) \frac{\partial \bar{W}_{\bar{m}\bar{n}}}{\partial \theta} + \left(I_3 - \frac{I_5}{R} \right) \bar{\Phi}_{2\bar{m}\bar{n}} \right) = \ddot{T}_{\bar{m}\bar{n}}(t) \left(\left(I_0 - \frac{2I_1}{R} + \frac{I_2}{R^2} \right) \bar{V}_{\bar{m}\bar{n}} + \left(\frac{I_1}{R} - \frac{I_2}{R^2} \right) \frac{\partial \bar{W}_{\bar{m}\bar{n}}}{\partial \theta} + \left(I_3 - \frac{I_5}{R} \right) \bar{\Phi}_{2\bar{m}\bar{n}} \right) \quad (۸۰)$$

$$-\omega_{\bar{m}\bar{n}}^2 T_{\bar{m}\bar{n}}(t) \left(I_0 \bar{W}_{\bar{m}\bar{n}} - I_1 \frac{\partial \bar{U}_{\bar{m}\bar{n}}}{\partial x} - (I_2 + I_5) \frac{\partial^2 \bar{W}_{\bar{m}\bar{n}}}{\partial x^2} - I_5 \frac{\partial \bar{\Phi}_{1\bar{m}\bar{n}}}{\partial x} - \left(\frac{I_1}{R} - \frac{I_2}{R^2} \right) \frac{\partial \bar{V}_{\bar{m}\bar{n}}}{\partial \theta} - \frac{I_2}{R^2} \frac{\partial^2 \bar{W}_{\bar{m}\bar{n}}}{\partial \theta^2} - \frac{I_5}{R} \frac{\partial \bar{\Phi}_{2\bar{m}\bar{n}}}{\partial \theta} \right) = \ddot{T}_{\bar{m}\bar{n}}(t) \left(I_0 \bar{W}_{\bar{m}\bar{n}} - I_1 \frac{\partial \bar{U}_{\bar{m}\bar{n}}}{\partial x} - (I_2 + I_5) \frac{\partial^2 \bar{W}_{\bar{m}\bar{n}}}{\partial x^2} - I_5 \frac{\partial \bar{\Phi}_{1\bar{m}\bar{n}}}{\partial x} - \left(\frac{I_1}{R} - \frac{I_2}{R^2} \right) \frac{\partial \bar{V}_{\bar{m}\bar{n}}}{\partial \theta} - \frac{I_2}{R^2} \frac{\partial^2 \bar{W}_{\bar{m}\bar{n}}}{\partial \theta^2} - \frac{I_5}{R} \frac{\partial \bar{\Phi}_{2\bar{m}\bar{n}}}{\partial \theta} \right) - q_r \quad (۸۱)$$

$$-\omega_{\bar{m}\bar{n}}^2 T_{\bar{m}\bar{n}}(t) (I_3 \bar{U}_{\bar{m}\bar{n}} + I_4 \bar{\Phi}_{1\bar{m}\bar{n}}) = \ddot{T}_{\bar{m}\bar{n}}(t) (I_3 \bar{U}_{\bar{m}\bar{n}} + I_4 \bar{\Phi}_{1\bar{m}\bar{n}}) \quad (۸۲)$$

$$-\omega_{\bar{m}\bar{n}}^2 T_{\bar{m}\bar{n}}(t) \left(\left(I_3 - \frac{I_5}{R} \right) \bar{V}_{\bar{m}\bar{n}} + \frac{I_5}{R} \frac{\partial \bar{W}_{\bar{m}\bar{n}}}{\partial \theta} + I_4 \bar{\Phi}_{2\bar{m}\bar{n}} \right) = \ddot{T}_{\bar{m}\bar{n}}(t) \left(\left(I_3 - \frac{I_5}{R} \right) \bar{V}_{\bar{m}\bar{n}} + \frac{I_5}{R} \frac{\partial \bar{W}_{\bar{m}\bar{n}}}{\partial \theta} + I_4 \bar{\Phi}_{2\bar{m}\bar{n}} \right) \quad (۸۳)$$

پس از ساده‌سازی طرفین معادلات، معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم به شکل رابطه‌ی ۸۴ به دست می‌آید.

$$\ddot{T}_{\bar{m}\bar{n}}(t) + \omega_{\bar{m}\bar{n}}^2 T_{\bar{m}\bar{n}}(t) = \frac{Q_{\bar{m}\bar{n}}(t)}{J_{\bar{m}\bar{n}}} \quad (۸۴)$$

در رابطه‌ی ۸۴، مقادیر $J_{\bar{m}\bar{n}}$ و $Q_{\bar{m}\bar{n}}(t)$ مطابق با روابط ۸۵ و ۸۶ هستند.

$$Q_{\bar{m}\bar{n}}(t) = \int_0^L \int_{-\pi}^{\pi} q_r \bar{W}_{\bar{m}\bar{n}} d\theta dx = \int_0^L \int_{-\pi}^{\pi} Q_r(x, \theta) F(t) \bar{W}_{\bar{m}\bar{n}} d\theta dx \quad (۸۵)$$

$$J_{\bar{m}\bar{n}} = \int_0^L \int_{-\pi}^{\pi} \left(I_0 (\bar{U}_{\bar{m}\bar{n}}^2 + \bar{V}_{\bar{m}\bar{n}}^2 + \bar{W}_{\bar{m}\bar{n}}^2) + I_1 \left(\frac{\partial \bar{W}_{\bar{m}\bar{n}}}{\partial x} \bar{U}_{\bar{m}\bar{n}} - \frac{2}{R} \bar{V}_{\bar{m}\bar{n}}^2 + \frac{\partial \bar{W}_{\bar{m}\bar{n}}}{R \partial \theta} \bar{V}_{\bar{m}\bar{n}} - \frac{\partial \bar{U}_{\bar{m}\bar{n}}}{\partial x} \bar{W}_{\bar{m}\bar{n}} - \frac{\partial \bar{V}_{\bar{m}\bar{n}}}{R \partial \theta} \bar{W}_{\bar{m}\bar{n}} \right) + I_2 \left(\frac{\bar{V}_{\bar{m}\bar{n}}^2}{R^2} - \frac{\partial \bar{W}_{\bar{m}\bar{n}}}{R^2 \partial \theta} \bar{V}_{\bar{m}\bar{n}} - \frac{\partial^2 \bar{W}_{\bar{m}\bar{n}}}{\partial x^2} \bar{W}_{\bar{m}\bar{n}} + \frac{\partial \bar{V}_{\bar{m}\bar{n}}}{R^2 \partial \theta} \bar{W}_{\bar{m}\bar{n}} - \frac{\partial^2 \bar{W}_{\bar{m}\bar{n}}}{\partial \theta^2} \bar{W}_{\bar{m}\bar{n}} \right) + I_3 (\bar{\Phi}_{1\bar{m}\bar{n}} \bar{U}_{\bar{m}\bar{n}} + \bar{\Phi}_{2\bar{m}\bar{n}} \bar{V}_{\bar{m}\bar{n}} + \bar{U}_{\bar{m}\bar{n}} \bar{\Phi}_{1\bar{m}\bar{n}} + \bar{V}_{\bar{m}\bar{n}} \bar{\Phi}_{2\bar{m}\bar{n}}) + I_4 (\bar{\Phi}_{1\bar{m}\bar{n}}^2 + \bar{\Phi}_{2\bar{m}\bar{n}}^2) + I_5 \left(-\frac{1}{R} \bar{\Phi}_{2\bar{m}\bar{n}} \bar{V}_{\bar{m}\bar{n}} - \frac{\partial^2 \bar{W}_{\bar{m}\bar{n}}}{\partial x^2} \bar{W}_{\bar{m}\bar{n}} - \frac{\partial \bar{\Phi}_{1\bar{m}\bar{n}}}{\partial x} \bar{W}_{\bar{m}\bar{n}} - \frac{\partial \bar{\Phi}_{2\bar{m}\bar{n}}}{R \partial \theta} \bar{W}_{\bar{m}\bar{n}} - \frac{1}{R} \bar{V}_{\bar{m}\bar{n}} \bar{\Phi}_{2\bar{m}\bar{n}} - \frac{\partial \bar{W}_{\bar{m}\bar{n}}}{R \partial \theta} \bar{\Phi}_{2\bar{m}\bar{n}} \right) \right) d\theta dx \quad (۸۶)$$

در روابط فوق $J_{\bar{m}\bar{n}}$ جرم نرمال شده و $Q_{\bar{m}\bar{n}}(t)$ نیروهای تعمیم یافته هستند. برای تعیین تابع زمانی $T_{\bar{m}\bar{n}}(t)$ از طرفین رابطه ۸۴ تبدیل لاپلاس گرفته و رابطه‌ی ۸۷ را می‌نویسیم.

$$s^2 T_{\bar{m}\bar{n}}(s) + \omega_{\bar{m}\bar{n}}^2 T_{\bar{m}\bar{n}}(s) = \frac{Q_{\bar{m}\bar{n}}(s)}{J_{\bar{m}\bar{n}}} \quad (۸۷)$$

با مرتب‌کردن رابطه‌ی ۸۷، رابطه‌ی ۸۸ به دست می‌آید.

$$T_{\bar{m}\bar{n}}(s) = \frac{1}{J_{\bar{m}\bar{n}}} \frac{Q_{\bar{m}\bar{n}}(s)}{s^2 + \omega_{\bar{m}\bar{n}}^2} \quad (۸۸)$$

اگر از رابطه‌ی ۸۸ تبدیل لاپلاس معکوس بگیریم تابع زمانی $T_{\bar{m}\bar{n}}(t)$ مطابق با رابطه‌ی ۸۹ بدست می‌آید.

$$T_{\bar{m}\bar{n}}(t) = \frac{1}{J_{\bar{m}\bar{n}}\omega_{\bar{m}\bar{n}}} \int_0^t Q_{\bar{m}\bar{n}}(t) \sin \omega_{\bar{m}\bar{n}}(t - \tau) d\tau \quad (۸۹)$$

با قراردادن رابطه ۸۹ در رابطه‌ی ۷۱ پاسخ سیستم به صورت روابط ۹۰ الی ۹۴ نوشته می شوند.

$$u_0(x, \theta) = \sum_{\bar{m}=1}^{\bar{M}} \sum_{\bar{n}=1}^{\bar{N}} \frac{u_{\bar{m}\bar{n}}}{J_{\bar{m}\bar{n}}\omega_{\bar{m}\bar{n}}} \bar{u}_0(x, \theta) \int_0^t Q_{\bar{m}\bar{n}}(t) \sin \omega_{\bar{m}\bar{n}}(t - \tau) d\tau \quad (۹۰)$$

$$v_0(x, \theta) = \sum_{\bar{m}=1}^{\bar{M}} \sum_{\bar{n}=1}^{\bar{N}} \frac{v_{\bar{m}\bar{n}}}{J_{\bar{m}\bar{n}}\omega_{\bar{m}\bar{n}}} \bar{v}_0(x, \theta) \int_0^t Q_{\bar{m}\bar{n}}(t) \sin \omega_{\bar{m}\bar{n}}(t - \tau) d\tau \quad (۹۱)$$

$$w_0(x, \theta) = \sum_{\bar{m}=1}^{\bar{M}} \sum_{\bar{n}=1}^{\bar{N}} \frac{w_{\bar{m}\bar{n}}}{J_{\bar{m}\bar{n}}\omega_{\bar{m}\bar{n}}} \bar{w}_0(x, \theta) \int_0^t Q_{\bar{m}\bar{n}}(t) \sin \omega_{\bar{m}\bar{n}}(t - \tau) d\tau \quad (۹۲)$$

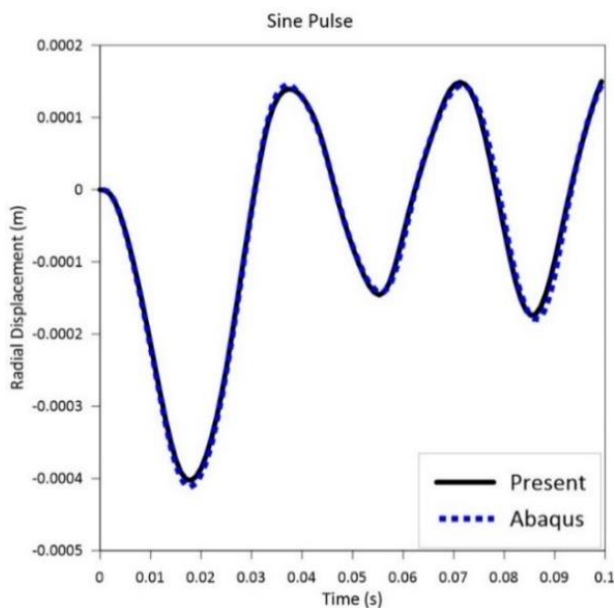
$$\phi_1(x, \theta) = \sum_{\bar{m}=1}^{\bar{M}} \sum_{\bar{n}=1}^{\bar{N}} \frac{\phi_{1\bar{m}\bar{n}}}{J_{\bar{m}\bar{n}}\omega_{\bar{m}\bar{n}}} \bar{\phi}_1(x, \theta) \int_0^t Q_{\bar{m}\bar{n}}(t) \sin \omega_{\bar{m}\bar{n}}(t - \tau) d\tau \quad (۹۳)$$

$$\phi_2(x, \theta) = \sum_{\bar{m}=1}^{\bar{M}} \sum_{\bar{n}=1}^{\bar{N}} \frac{\phi_{2\bar{m}\bar{n}}}{J_{\bar{m}\bar{n}}\omega_{\bar{m}\bar{n}}} \bar{\phi}_2(x, \theta) \int_0^t Q_{\bar{m}\bar{n}}(t) \sin \omega_{\bar{m}\bar{n}}(t - \tau) d\tau \quad (۹۴)$$

پیش‌تر ذکر شد که $\bar{u}_0(x, \theta)$ ، $\bar{v}_0(x, \theta)$ ، $\bar{w}_0(x, \theta)$ و $\bar{\phi}_1(x, \theta)$ و $\bar{\phi}_2(x, \theta)$ موسوم به توابع سعی هستند که با توجه به شرایط مرزی طبق روابط ۷۲ و ۷۳ تعریف می شوند. همچنین $\omega_{\bar{m}\bar{n}}$ فرکانس طبیعی سیستم است.

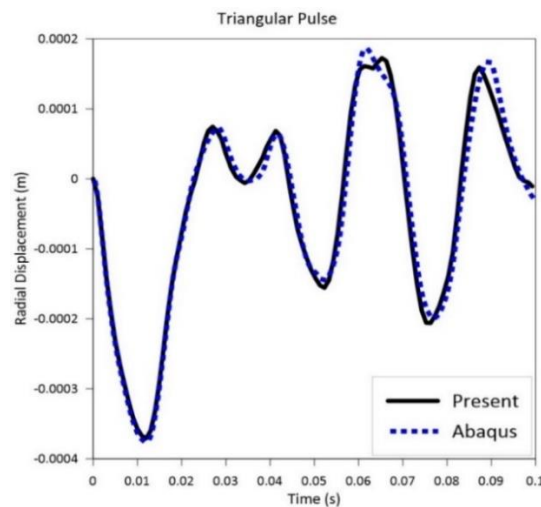
۵- اعتبارسنجی نتایج ارتعاش اجباری پوسته استوانه‌ای

در این مقاله تمامی نمودارها به‌ازای $N=M=15$ به‌دست‌آمده است. در شکل ۶، پاسخ زمانی پوسته استوانه‌ای سه‌لایه با هسته آگزتیک (جابه‌جایی شعاعی) تحت بارگذاری توابع به ترتیب سینوسی، مثلثی، پله‌ای و نمایی قابل مشاهده است. در این نمودارها جواب‌های به‌دست‌آمده بر اساس مدل‌سازی ریاضی با خروجی نرم‌افزار آباکوس اعتبارسنجی شده‌اند. در نمودارهای مذکور، t_1 مدت‌زمان اعمال بار است و برابر با دوره تناوب طبیعی سیستم در فرکانس طبیعی اول آن در نظر گرفته شده است. قابل ذکر است که پاسخ‌های به‌دست‌آمده مربوط به مختصات مرکز بارگذاری و در $x = \frac{L}{2}, \theta = 0$ است. مشاهده می‌شود که پاسخ زمانی (جابه‌جایی شعاعی) به دست آمده از شبیه‌سازی در نرم‌افزار آباکوس با نتایج تئوری‌های استفاده شده تطابق بسیار خوبی دارند.

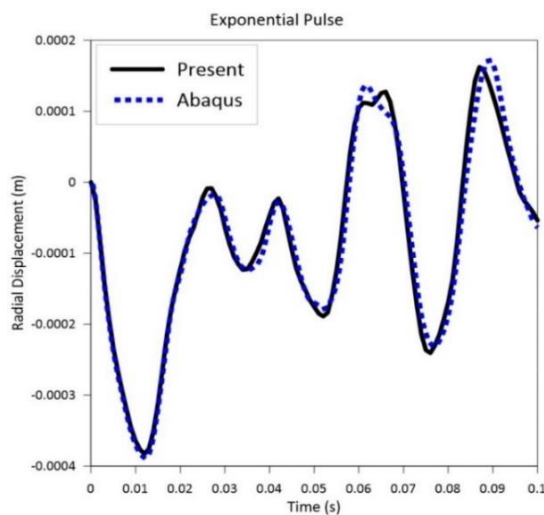


الف

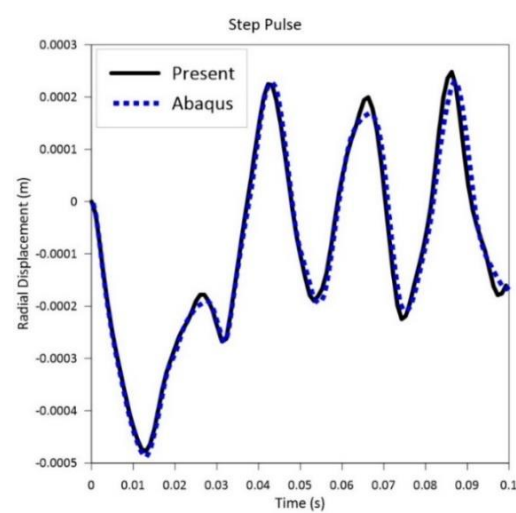
شکل ۶ اعتبارسنجی پاسخ زمانی پوسته استوانه‌ای سه‌لایه با هسته‌ی آگز تیک تحت بارگذاری نوع الف) سینوسی



ب



د



ج

شکل ۶ اعتبارسنجی پاسخ زمانی پوسته استوانه‌ای سه‌لایه با هسته‌ی آگز تیک تحت بارگذاری نوع ب) مثلثی ج) پله د) نمایی با نتایج

حاصل از المان محدود در نرم‌افزار آباکوس، $F_0 = -1000$ (Pa)، $t_1 = 0.03125$ (s)، $2l_1 \times 2l_2 = 0.526 \times 2$ (m²)

مشخصات مادی و هندسی مربوط به پوسته استوانه‌ای سه‌لایه، طبق جدول ۳ در نظر گرفته شده است. همچنین به دلیل اینکه در شبیه‌سازی بار انفجاری از بارگذاری نوع نمایی استفاده می‌شود؛ نتایج برای بارگذاری نوع نمایی استخراج و با خروجی نرم افزار مقایسه شده است.

جدول ۳ خواص مادی و هندسی پوسته‌ی سه‌لایه با هسته آگز تیک استفاده شده در تحلیل دینامیکی نرم‌افزار آباکوس

$E_1^{(2)}$ (Pa)	$E_2^{(2)}$ (Pa)	$G_{12}^{(2)}$ (Pa)	$G_{13}^{(2)}$ (Pa)	$G_{23}^{(2)}$ (Pa)	$\nu_{12}^{(2)}$	$\nu_{21}^{(2)}$	$\rho^{(2)}$ (Kg/m ³)
۶۸۰۴۶۵	۲۰۳۶۹۷	$۸/۸۶۷۸۴ \times 10^7$	$۵/۱۰۱۰۵ \times 10^7$	$۲/۰۴۰۴۲ \times 10^8$	-۱/۸۲۶۳۲	-۰/۵۴۶۷۰۸	۸۱/۸۵
η_1	η_2	η_3	h_c/h	h/R	L/R	ν	E
۲	۱	۰/۰۱۳۸۵۷۱	۰/۰۰۳۳۳۳۳	۰/۰۱	۶	۰/۳	۷۰×10^9

۶- بررسی تأثیر عامل‌های مختلف پوسته استوانه‌ای بر پاسخ دینامیکی

۶-۱- تأثیر عامل‌های هندسی پوسته‌ی استوانه‌ای

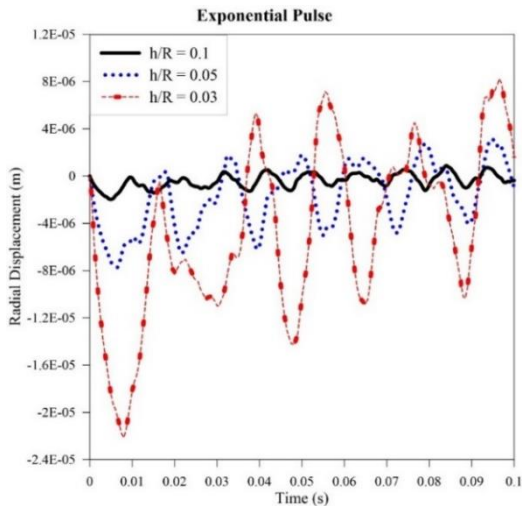
در شکل ۷ تأثیر نسبت طول به شعاع L/R بر جابه‌جایی شعاعی نشان داده شده است. به دلیل کاهش استحکام عرضی پوسته در هنگام افزایش این نسبت، جابه‌جایی در مرکز بارگذاری افزایش می‌یابد. همچنین مشاهده می‌شود که با افزایش این پارامتر

به دلیل کاهش پایداری سیستم، تاخیر در پاسخ زمانی مشاهده می گردد. در جدول ۴ زمان لازم برای اتفاق افتادن جابه‌جایی شعاعی حداکثر آورده شده است. با مقایسه ی داده های جدول ۴ مشاهده می شود که چنانچه نسبت $\frac{L}{R}$ نصف گردد، حداکثر جابه‌جایی شعاعی به میزان ۳۰ درصد کاهش می یابد.

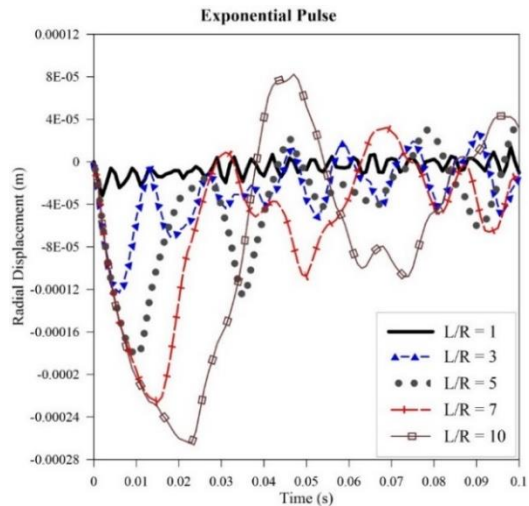
جدول ۴ مدت‌زمان به حداکثر رسیدن مقدار جابه‌جایی شعاعی پوسته استوانه‌ای مرتبط با شکل

L/R	۱	۳	۵	۷	۱۰
t	۰/۰۰۲	۰/۰۰۶	۰/۰۱	۰/۰۱۵	۰/۰۲۳
W_{max}	$۳/۱۸۶۵ \times 10^{-۵}$	۰/۰۰۰۱۲۲۱	۰/۰۰۰۱۸۳۲	۰/۰۰۰۲۲۵۷	۰/۰۰۰۲۶۴۰

شکل ۸ بیانگر تاثیر مقدار ضخامت کل پوسته بر پاسخ زمانی سیستم است. با افزایش ضخامت کل، سفتی سیستم افزایش یافته و طبیعتاً مقدار جابه‌جایی شعاعی کمتر می گردد. در جدول ۵ مدت‌زمان لازم برای وقوع حداکثر جابه‌جایی شعاعی در مرکز بارگذاری، آورده شده است. دیده می شود که با دوبرابر شدن نسبت ضخامت به شعاع $\frac{h}{R}$ از مقدار ۰/۰۵ به ۰/۱ جابه‌جایی مرکز بارگذاری به میزان ۷۳ درصد کاهش می یابد. از طرف دیگر، افزایش نسبت $\frac{h}{R}$ باعث کاهش تاخیر در پاسخ می شود و یا به عبارت دیگر، زمان رسیدن به حداکثر جابه‌جایی با شیب کم را کاهش می دهد و حداکثر جابه‌جایی زودتر اتفاق می افتد.



شکل ۸ پاسخ زمانی (جابه‌جایی شعاعی) پوسته استوانه‌ای سه‌لایه با هسته‌ی آگزتیک در نسبت‌های ضخامت به شعاع متفاوت تحت بارگذاری نوع نمایی، $F_0 = -1000 (Pa)$ ، $t_1 = 0.03125 (s)$ ، $2l_1 \times 2l_2 = 0.526 \times 1 (m^2)$



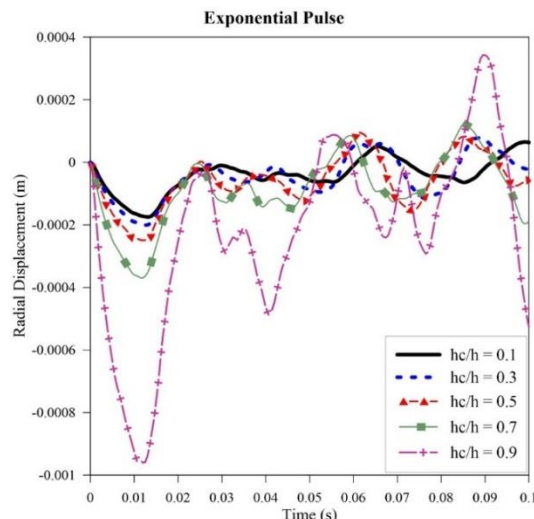
شکل ۷ پاسخ زمانی (جابه‌جایی شعاعی) پوسته استوانه‌ای سه‌لایه با هسته‌ی آگزتیک در نسبت‌های طولی متفاوت تحت بارگذاری نوع نمایی، $F_0 = -1000 (Pa)$ ، $t_1 = 0.03125 (s)$ ، $2l_1 \times 2l_2 = 0.526 \times 1 (m^2)$

جدول ۵ مدت‌زمان به حداکثر رسیدن مقدار جابه‌جایی شعاعی پوسته استوانه‌ای مرتبط با شکل

h/R	۰/۰۳	۰/۰۵	۰/۱
t	۰/۰۰۸	۰/۰۰۶۵	۰/۰۰۵
W_{max}	$۲/۲۱۲۷۴ \times 10^{-۵}$	$۷/۶۹۵۹ \times 10^{-۶}$	$۲/۰۲۱۴ \times 10^{-۶}$

۶-۲- تأثیر عامل‌های هندسی هسته پوسته‌ی استوانه‌ای بر پاسخ زمانی

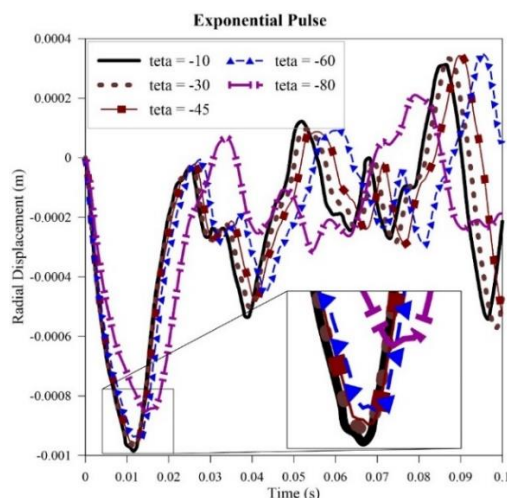
شکل ۹ تأثیر ضخامت لایه‌ی مرکزی (هسته آگزتیک) بر پاسخ زمانی (جابه‌جایی شعاعی) زمان اعمال نیرو با تابع نمایی را نشان می‌دهد. قابل مشاهده است که با افزایش ضخامت مذکور، به دلیل افزایش تخلخل در سیستم و به دنبال آن کاهش استحکام عرضی پوسته، حداکثر جابه‌جایی شعاعی نیز بیشتر می‌شود. از طرف دیگر، خاصیت ضریب پواسون منفی باعث تشدید افزایش جابه‌جایی شعاعی خواهد بود.



شکل ۹ تأثیر ضخامت هسته آگزتیک بر پاسخ زمانی (جابه‌جایی شعاعی) پوسته استوانه‌ای سه‌لایه تحت بارگذاری نوع نمایی،

$$2l_1 \times 2l_2 = 0.526 \times 1 (m^2), t_1 = 0.03125 (s), F_0 = -1000 (Pa)$$

در شکل ۱۰ تأثیر زاویه سلول تشکیل‌دهنده لایه آگزتیک بر جابه‌جایی شعاعی دیده می‌شود. این نمودار بر اساس سهم ۹۰ درصدی لایه آگزتیک از ضخامت کل به‌دست‌آمده است. مشاهده می‌شود که به افزایش اندازه زاویه، بدون در نظر گرفتن علامت آن (شکل ۴)، به دلیل کاهش تخلخل و کاهش خاصیت آگزتیک، لایه مرکزی متراکم‌تر شده و سفتی سیستم افزایش می‌یابد و این موضوع سبب کاهش اندازه حداکثر جابه‌جایی می‌شود. به طوری که زمانی که زاویه سلول از -60° به -80° درجه تغییر می‌کند، جابه‌جایی شعاعی ۱۱ درصد کاهش و زمان رسیدن به آن ۱۶ درصد تأخیر خواهد داشت.

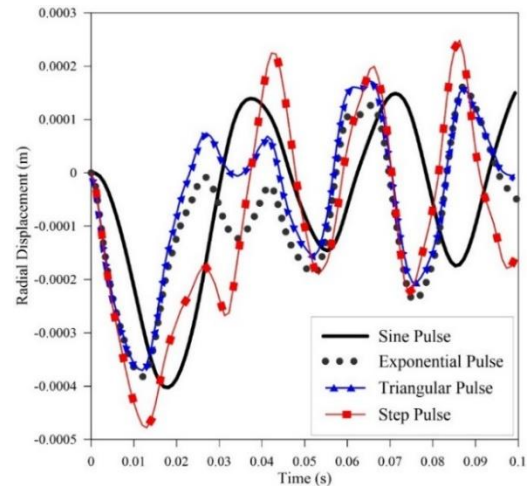
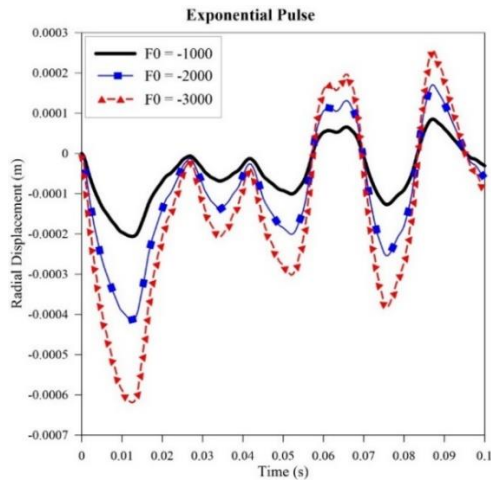


شکل ۱۰ تأثیر زاویه سلول واحد درون رو هسته آگزتیک بر پاسخ زمانی (جابه‌جایی شعاعی) پوسته استوانه‌ای سه‌لایه تحت بارگذاری نوع

$$2l_1 \times 2l_2 = 0.526 \times 1 (m^2), t_1 = 0.03125 (s), F_0 = -1000 (Pa)$$

۳-۶- تأثیر نوع بارگذاری و شدت بار بر پاسخ زمانی پوسته استوانه‌ای

قبلاً ذکر شد که چهار نوع تابع پله‌ای، مثلثی، نمایی و سینوسی در بارگذاری پوسته سه‌لایه استوانه‌ای با هسته آگزتیک در نظر گرفته شده است. در شکل ۱۱ پاسخ‌های دریافتی تحت هر چهار نوع تابع بارگذاری قابل مشاهده هستند. با توجه به تعریف ضربه که سطح زیر نمودار تابع بارگذاری است، می‌توان نتیجه گرفت که بیشترین جابه‌جایی شعاعی مربوط به تابع پله است که بزرگ‌ترین سطح نمودار را دارد و کوچک‌ترین پاسخ‌ها مربوط به تابع نمایی با کوچک‌ترین سطح زیر نمودار است.

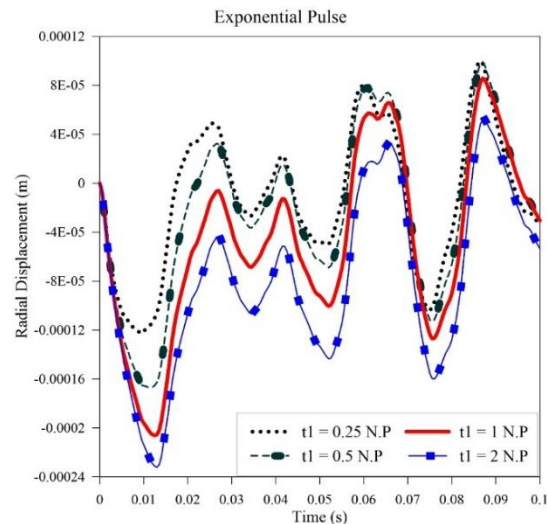
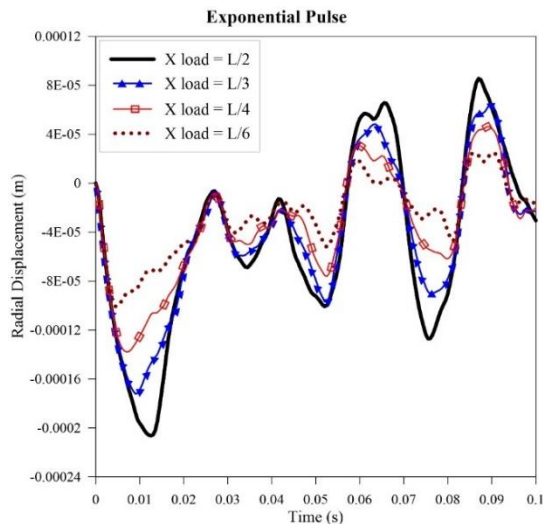


شکل ۱۱ پاسخ زمانی (جابه‌جایی شعاعی) پوسته استوانه‌ای سه‌لایه تحت بارگذاری متفاوت، $F_0 = -1000 \text{ (Pa)}$ ، $t_1 = 0.03125 \text{ (s)}$ ، $2l_1 \times 2l_2 = 0.526 \times 1 \text{ (m}^2\text{)}$
 شکل ۱۲ تأثیر شدت بار وارده بر پاسخ زمانی (جابه‌جایی شعاعی) پوسته استوانه‌ای سه‌لایه تحت بارگذاری نوع نمایی، $F_0 = -1000 \text{ (Pa)}$ ، $t_1 = 0.03125 \text{ (s)}$ ، $2l_1 \times 2l_2 = 0.526 \times 1 \text{ (m}^2\text{)}$

در شکل ۱۲ تأثیر اندازه بار وارد شده (F_0) بر جابه‌جایی شعاعی نشان داده شده است. رابطه‌ی خطی و مستقیم بین مقدار بار وارد شده و حداکثر جابه‌جایی شعاعی به‌خوبی دیده می‌شود؛ به این معنی که با دو برابر نمودن شدت بار وارد بر پوسته حداکثر جابه‌جایی نیز دو برابر می‌شود. مطلب بعدی در خصوص این نمودار، عدم تغییر در تأخیر پاسخ‌های زمانی است؛ که این رویداد به دلیل عدم تغییر در فرکانس‌های طبیعی سیستم است و تنها دامنه ارتعاش دستخوش تغییر می‌گردد.

۶-۴- تأثیر مدت‌زمان اعمال بار و مختصات آن بر پاسخ زمانی پوسته استوانه‌ای

آنچه که از شکل ۱۳ دریافت می‌شود این است که هرچه مدت‌زمان بارگذاری از مقدار دوره تناوب طبیعی سازه (NP) کمتر باشد، حداکثر جابه‌جایی نیز کمتر می‌شود و بر عکس. علت آن است که نسبت فرکانسی (فرکانس تحریک به فرکانس طبیعی) افزایش می‌یابد، لذا از ناحیه تشدید دور می‌گردد؛ که این امر موجب کاهش دامنه حداکثر جابه‌جایی می‌شود.



شکل ۱۴ تأثیر محل اعمال بارگذاری بر پاسخ زمانی (جابه‌جایی شعاعی) پوسته استوانه‌ای سه‌لایه تحت بارگذاری نوع نمایی، $F_0 = -1000 \text{ (Pa)}$ ، $t_1 = 0.03125 \text{ (s)}$ ، $2l_1 \times 2l_2 = 0.526 \times 1 \text{ (m}^2\text{)}$

شکل ۱۳ تأثیر مدت‌زمان اعمال بارگذاری بر پاسخ زمانی (جابه‌جایی شعاعی) پوسته استوانه‌ای سه‌لایه تحت بارگذاری نوع نمایی، $F_0 = -1000 \text{ (Pa)}$ ، $t_1 = 0.03125 \text{ (s)}$ ، $2l_1 \times 2l_2 = 0.526 \times 1 \text{ (m}^2\text{)}$

مطابق با یافته‌های شکل ۱۴ دیده می‌شود که زمانی که مکان بارگذاری به لبه‌ها و تکیه‌گاه‌ها نزدیک می‌شود، جابه‌جایی مرکز سطح بار کمتر می‌شود و در زمان کوتاه‌تر اتفاق می‌افتد و این به علت تأثیر بیشتر قیدها بر سیستم خواهد بود هرچند که

جابه‌جایی محل بارگذاری در فرکانس‌های طبیعی سیستم تغییری ایجاد نخواهد کرد. دیده می‌شود که با تغییر مرکز بارگذاری از $\frac{L}{2}$ به $\frac{L}{6}$ حداکثر جابه‌جایی ۵۱ درصد کاهش و ۶۱ درصد سریع‌تر اتفاق می‌افتد.

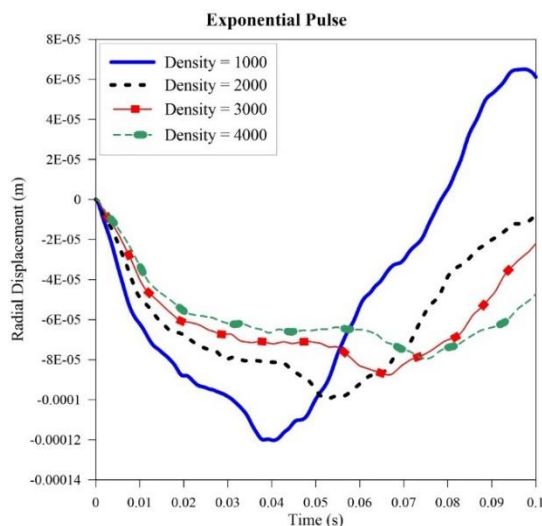
۶-۵- اثر سیال درون پوسته بر پاسخ زمانی پوسته‌ی استوانه‌ای

شکل ۱۵ تغییرات جابه‌جایی مرکز سطح بارگذاری را نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که اگر پوسته را به تدریج از سیال آب با چگالی $(\frac{Kg}{m^3})$ ۱۰۰۰ پر کنیم، هرچه عمق سیال درون پوسته استوانه‌ای افزایش پیدا کند؛ مقدار حداکثر جابه‌جایی نقطه میانی سطح پوسته کمتر شده و همچنین تأخیر در پاسخ زمانی مشاهده می‌شود و این با آنچه انتظار می‌رفت هماهنگی دارد؛ زیرا جرم سیستم با افزایش ارتفاع سیال افزایش یافته و سفتی سیستم بیشتر می‌شود. جدول ۶ مقدار حداکثر جابه‌جایی شعاعی و زمان وقوع آن‌ها در ارتفاع‌های مختلف سیال نشان داده شده است.

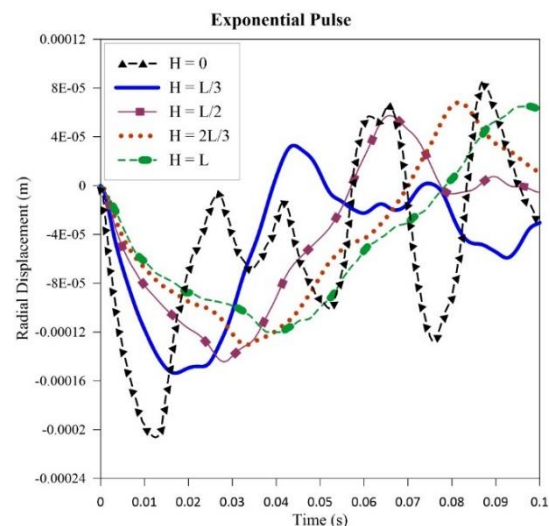
جدول ۶ مقادیر حداکثر جابه‌جایی نقطه میانی پوسته استوانه‌ای حاوی سیال مرتبط با شکل

H	0	$L/3$	$L/2$	$2L/3$	L
t	۰/۰۱۲۴	۰/۰۱۷۰	۰/۰۲۷۹	۰/۰۳۳۱	۰/۰۴۰۶
W_{max}	۰/۰۰۰۲۰۷	۰/۰۰۰۱۵۴	۰/۰۰۰۱۴۵	۰/۰۰۰۱۳۱	۰/۰۰۰۱۲۰

در شکل ۱۶ تأثیر چگالی سیال بر پاسخ زمانی مشاهده می‌شود. مشاهده می‌شود که افزایش چگالی سیال موجب چگال‌تر شدن سیستم و در نتیجه کاهش جابه‌جایی حداکثر و وقوع زود هنگام آن خواهد شد. به گونه‌ای که اگر چگالی سیال مفروض، دوبرابر چگالی آب در نظر گرفته شود، حداکثر جابه‌جایی کاهش ۱۷/۵ درصدی و تأخیر زمانی افزایش ۲۰ درصدی خواهد داشت.



شکل ۱۶ تأثیر چگالی سیال درون پوسته بر پاسخ زمانی (جابه‌جایی شعاعی) پوسته استوانه‌ای سه‌لایه تحت بارگذاری نوع نمایی، $2l_1 \times t_1 = 0.03125 (s), F_0 = -1000 (Pa)$
 $2l_2 = 0.526 \times 1 (m^2)$



شکل ۱۵ تأثیر عمق سیال درون پوسته بر پاسخ زمانی (جابه‌جایی شعاعی) پوسته استوانه‌ای سه‌لایه تحت بارگذاری نوع نمایی، $2l_1 \times t_1 = 0.03125 (s), F_0 = -1000 (Pa)$
 $2l_2 = 0.526 \times 1 (m^2)$

۷- نتیجه‌گیری

در این پژوهش ارتعاش اجباری پوسته استوانه‌ای سه‌لایه با هسته آگزتیک حاوی سیال مورد بررسی واقع شده است. معادلات حاکم در این مقاله با استفاده از نظریه‌های برشی اصلاح‌شده مرتبه بالا و با به‌کارگیری اصل همپلتون استخراج شده‌اند. معادلات به‌دست‌آمده با اعمال روش حل باقیمانده وزنی گلرکین حل شده و تحلیل پوسته استوانه‌ای سه‌لایه تحت بارهای ضربه‌ای متداول سینوسی، نمایی، پله‌ای و مثلثی مورد اعتبارسنجی قرار گرفته است. نتایج به‌دست‌آمده از مدل‌سازی ریاضی انطباق خوبی با خروجی‌های نرم‌افزار آباکوس دارد. تأثیر عامل‌های قابل تنظیم برای پوسته استوانه‌ای و هسته آگزتیک آن، بررسی شده و نتایج زیر حاصل شد:

(۱) با افزایش ضخامت کلی پوسته جابه‌جایی شعاعی کاهش و زمان وقوع آن سریع‌تر است.

۲) افزایش سهم هسته اگزتیک از ضخامت کلی پوسته، موجب بالاتر رفتن انعطاف پذیری سیستم شده و جابه‌جایی حداکثر افزایش پیدا می‌کند.

۳) افزایش اندازه‌ی زاویه سلول موجب تراکم بیشتر ساختار اگزتیک شده و جابه‌جایی حداکثر کاهش و زمان وقوع آن دیرتر خواهد بود.

۴) استفاده از توابع مختلف در بارگذاری بر جابه‌جایی حداکثر و زمان وقوع آن تأثیر دارد. به طوری که هرچه سطح زیر نمودار تابع بارگذاری (نیرو - زمان) بیشتر باشد، جابه‌جایی بیشینه بیشتر و زمان وقوع آن سریع‌تر خواهد بود.

۵) رابطه‌ی خطی بین میزان نیروی وارد شده بر پوسته و حداکثر جابه‌جایی دیده شد. ضمن اینکه افزایش نیرو تأثیری در زمان وقوع جابه‌جایی حداکثر تأثیری ندارد.

۶) با افزایش مدت‌زمان بارگذاری نسبت به دوره تناوب طبیعی سیستم (NP) حداکثر جابه‌جایی افزایش می‌یابد و بالعکس آن نیز صادق خواهد بود.

۷) با نزدیک کردن مرکز سطح بارگذاری به تکیه‌گاه‌ها، جابه‌جایی حداکثر کاهش یافته و سریع‌تر به وقوع می‌پیوندد.

۸) وجود سیال به علت افزایش جرم سیستم حداکثر جابه‌جایی را کاهش و زمان وقوع آن را طولانی‌تر می‌کند. در خصوص سیال چگال‌تر، این پدیده بارزتر خواهد بود.

Authorship Contribution Statement

Dr. Korosh Khorshidi



Biography: Korosh Khorshidi, an Assistant Professor of Mechanical Engineering at Arak University, was born in Sari, Mazandaran province, Iran, in 1977. He received his B.Sc. degree in Mechanical Engineering with a focus on solid design from Mazandaran University in 1998. He then pursued his M.Sc. and Ph.D. degrees in Mechanical Engineering from Iran University of Science and Technology in 2000 and 2006, respectively. His research interests include vibration, sound control, and nonlinear dynamics. He has published several papers in reputable journals and conferences, including the Journal of Sound and Vibration, International Journal of Mechanical Sciences, and Ocean Engineering. He has also contributed to the field of mechanical engineering by designing, manufacturing, and applying small-scale magnetic soft robots.

Contribution Statement: Conceptualization, Resources, Data Curation, Supervision, Project administration, Writing - Review & Editing

Saboor Savvafi



Biography: Saboor Savvafi is a M.Sc. student at Arak University. She was born in Arak in 1985. In 2009, she received her B.Sc. degree in Mechanical Engineering with a focus on production and manufacturing from Iran University of Science and Technology. From 2009 to 2022, she taught mathematics and physics. She also has been working as a mechanical engineer at R&D department of KHD.Co from 2008. She has been pursuing her M.Sc. degree in Arak University with a focus on nonlinear vibration and hyperelastic materials since 2022.

Contribution Statement: Visualization, Writing - Review & Editing.

Sadegh Zobeid



Biography: Sadegh Zobeid was born in Ahvaz, Iran, in 1994. He received the B.Sc. degree from in Marine Engineering from "Khorramshahr University of Marine Science and Tecnology" in 2018 and his M.Sc. degree in Mechanical Engineering from "Arak University" in 2022, respectively, with a focus on the Shipbulding Engineering and Applied Designing. He Presented his thesis in the field of buckling and vibration analysis of sandwich cylinder with Auxetic core containing fluid due to shocking load in 2022.

Contribution Statement: Conceptualization, Methodology, Validation, formal analysis, investigation, Software, Visualization, Writing - Original Draft

۸- مراجع

[1] Lakes R. Foam structures with a negative Poisson's ratio. Science. 1987;235:1038-40.

- [2] Evans KE, Nkansah M, Hutchinson I, Rogers S. Molecular network design. *Nature*. 1991;353:124.
- [3] Imbalzano G, Tran P, Ngo TD, Lee PV. A numerical study of auxetic composite panels under blast loadings. *Composite Structures*. 2016;135:339-52.
- [4] Donoghue J, Alderson K, Evans K. The fracture toughness of composite laminates with a negative Poisson's ratio. *physica status solidi (b)*. 2009;246:2011-7.
- [5] Lim T-C, Rajendra Acharya U. Longitudinal modulus of semi-auxetic unidirectional fiber composites. *Journal of reinforced plastics and composites*. 2010;29:1441-5.
- [6] Bhullar S, Ko J, Ahmed F, Jun M. Design and fabrication of stent with negative Poisson's ratio. *International Journal of Mechanical and Mechatronics Engineering*. 2014;8:448-54.
- [7] Gatt R, Mizzi L, Azzopardi JI, Azzopardi KM, Attard D, Casha A, et al. Hierarchical auxetic mechanical metamaterials. *Scientific reports*. 2015;5:8395.
- [8] Alderson A. A triumph of lateral thought. *Chemistry & Industry*. 1999;17:384-91.
- [9] Larsen UD, Signund O, Bouwsta S. Design and fabrication of compliant micromechanisms and structures with negative Poisson's ratio. *Journal of microelectromechanical systems*. 1997;6:99-106.
- [10] Chen G, Cheng Y, Zhang P, Liu J, Chen C, Cai S. Design and modelling of auxetic double arrowhead honeycomb core sandwich panels for performance improvement under air blast loading. *Journal of Sandwich Structures & Materials*. 2021;23:3574-605.
- [11] Rad MS, Hatami H, Ahmad Z, Yasuri AK. Analytical solution and finite element approach to the dense re-entrant unit cells of auxetic structures. *Acta Mechanica*. 2019;230:2171-85.
- [12] Lan X, Feng S, Huang Q, Zhou T. A comparative study of blast resistance of cylindrical sandwich panels with aluminum foam and auxetic honeycomb cores. *Aerospace Science and Technology*. 2019;87:37-47.
- [13] Quan TQ, Anh VM, Mahesh V, Duc ND. Vibration and nonlinear dynamic response of imperfect sandwich piezoelectric auxetic plate. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2022;29:127-37.
- [14] Ma Z-D, Bian H, Sun C, Hulbert GM, Bishnoi K, Rostam-Abadi F. Functionally-graded NPR (Negative Poisson's Ratio) material for a blast-protective deflector. *Proceedings of the 2010 NDIA Ground Vehicle Systems Engineering and Technology Symposium Modeling & Simulation, Testing and Validation Mini-Symposium, Dearborn, MI, USA2010*. p. 17-9.
- [15] Duc ND, Seung-Eock K, Cong PH, Anh NT, Khoa ND. Dynamic response and vibration of composite double curved shallow shells with negative Poisson's ratio in auxetic honeycombs core layer on elastic foundations subjected to blast and damping loads. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2017;133:504-12.
- [16] Duc ND, Seung-Eock K, Tuan ND, Tran P, Khoa ND. New approach to study nonlinear dynamic response and vibration of sandwich composite cylindrical panels with auxetic honeycomb core layer. *Aerospace Science and Technology*. 2017;70:396-404.
- [17] Zhang X-W, Yang D-Q. Numerical and experimental studies of a light-weight auxetic cellular vibration isolation base. *Shock and Vibration*. 2016;2016.
- [18] Jin X, Wang Z, Ning J, Xiao G, Liu E, Shu X. Dynamic response of sandwich structures with graded auxetic honeycomb cores under blast loading. *Composites Part B: Engineering*. 2016;106:206-17.
- [19] Tran P. Nonlinear dynamic response and vibration of sandwich composite cylindrical panels with auxetic honeycomb core layer using Reddy's FSDT subjected to mechanical, blast and damping loads. *European Journal of Mechanics-A/Solids*. 2017;20:692-717.
- [20] Novak N, Starčević L, Vesenjanić M, Ren Z. Blast response study of the sandwich composite panels with 3D chiral auxetic core. *Composite Structures*. 2019;210:167-78.
- [21] Amabili M. Free vibration of partially filled, horizontal cylindrical shells. *Journal of Sound and Vibration*. 1996;191:757-80.

- [22] Toorani M, Lakis A. Shear deformation in dynamic analysis of anisotropic laminated open cylindrical shells filled with or subjected to a flowing fluid. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2001;190:4929-66.
- [23] Tj HG, Mikami T, Kanie S, Sato M. Free vibrations of fluid-filled cylindrical shells on elastic foundations. *Thin-walled structures*. 2005;43:1746-62.
- [24] Jam J, Nikjoo M. Buckling and free vibrations of cylindrical stiffened composite shells with internal liquid. *Res J Appl Sci Eng Technol*. 2013;6:3495-505.
- [25] Khorshidi K, Karimi M. Analytical modeling for vibrating piezoelectric nanoplates in interaction with inviscid fluid using various modified plate theories. *Ocean Engineering*. 2019;181:267-80.
- [26] Sheng G, Wang X. Thermomechanical vibration analysis of a functionally graded shell with flowing fluid. *European Journal of Mechanics-A/Solids*. 2008;27:1075-87.
- [27] Zhu X, Zhang J, Zhang W, Chen J. Vibration frequencies and energies of an auxetic honeycomb sandwich plate. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2019;26:1951-7.
- [28] Fu T, Hu X, Yang C. Impact response analysis of stiffened sandwich functionally graded porous materials doubly-curved shell with re-entrant honeycomb auxetic core. *Applied Mathematical Modelling*. 2023;124:553-75.
- [29] Hajmohammad MH, Nouri AH, Zarei MS, Kolahchi R. A new numerical approach and visco-refined zigzag theory for blast analysis of auxetic honeycomb plates integrated by multiphase nanocomposite facesheets in hygrothermal environment. *Engineering with Computers*. 2019;35:1141-57.
- [30] Kim Y-W, Lee Y-S, Ko S-H. Coupled vibration of partially fluid-filled cylindrical shells with ring stiffeners. *Journal of Sound and Vibration*. 2004;276:869-97.
- [31] Khorshidi K. Effect of hydrostatic pressure and depth of fluid on the vibrating rectangular plates partially in contact with a fluid. *Applied Mechanics and Materials*. 2012;110:927-35.
- [32] Kayran A. Free vibration analysis of laminated composite shells of revolution including transverse shear deformation: University of Delaware, 1990.