



Aerodynamic modeling and calculating the flutter speed of a rectangular plate in supersonic air flow

Mostafa Nazmizadeh ^{a*}, Mohammad Mehdi Mohammadi ^a, Mehran Samadi Foroushani ^a

^a Department of Mechanical Engineering, Faculty of Mechanics, Malek Ashtar University of Technology, Isfahan, Iran

Original Article

Use your device to scan
and read the article online



Citation: Nazmizadeh M, Mohammadi M M, Samadi Foroushani M. Aerodynamic modeling and calculating the flutter speed of a rectangular plate in supersonic air flow. *Mechanics of Advanced and Smart Materials*. 2023;3(2):194-215.

 <https://10.52547/masm.3.2.194>

KEYWORDS

Flutter speed,
Ultrasonic flow,
Piston theory,
DQM numerical method,
CFCF boundary conditions.

ABSTRACT

The presented paper investigates the flutter phenomenon in a rectangular-shaped plate in supersonic air flow. First, the phenomenon of flutter and its identification method based on the analysis of eigenvalues are presented. Then, using the assumptions of Kirchhoff plate, the plate motion equation is derived and coupled with the first-order piston aerodynamic model. Next, the coupled structure-fluid equation is solved in matrix form using the differential quadrature method (DQM). Using the DQM numerical method in matrix form provides advantages such as high accuracy for solving the flutter problem. The obtained results show that the first phenomenon of flutter in an aluminum plate with a length and width of 1 meter and a thickness of 5 mm with clamped-free-clamped-free boundary conditions occurs in dimensionless dynamic pressure 617 (equivalent to Mach 3.395). The presented formulation can be used as a benchmark for solving and calculating the flutter speed of various objects in the supersonic air flow.

Extended Abstract

1. Introduction

The flutter phenomenon is caused by the interaction of aerodynamic forces, elastic forces and inertial forces and can cause the airplane wing to break. If this phenomenon is not studied and analyzed, it will cause instability and destruction of the structure in aerial structures which are considered light structures. Therefore, the flutter analysis of aerial structures is one of the necessities of their studies and this analysis is always investigated. According to the cause of its occurrence, the flutter phenomenon is divided into two categories: a) the flutter phenomenon due to the coupling of the natural frequency of the structure with the air flow frequency (such as the resonance phenomenon) and b) the flutter phenomenon due to the coupling of the structural frequencies (discussed in this article). will be The flutter phenomenon due to the coupling of structural frequencies occurs when two or more frequencies of the structure come close enough due to the application of aerodynamic forces, and this proximity causes the coupling of these two frequencies of the structure at a certain speed of the air flow so that in The result will cause instability in the structure. For example, in an airplane wing, the natural frequencies of bending and twisting modes can interact with each other and lead to flapping or flutter, or the lateral vibration mode of the bridge deck can be associated with its vertical vibration mode and cause instability in the form of flutter.

* Corresponding author. Tel.: 09127376322

E-mail address: nazemizadeh@aut.ac.ir

DOI: <https://10.52547/masm.3.2.194>

Received: August 12, 2023; Received in revised form: August 21, 2023; Accepted: September 13, 2023

© Author



2. Mathematical Formulation

In this part, first, the equations of motion of the sheet and the boundary conditions of the rectangular sheet are derived with Kirchhoff's assumptions, and then the aerodynamic model of the first-order coupled piston theory and the coupled structure-fluid equation are created. Then, this equation enters the frequency domain using the method of separation of variables, and after its non-dimensionalization, it is converted into the form of an eigenvalue problem. Finally, using the DQM numerical method, the eigenvalue problem is written in matrix form.

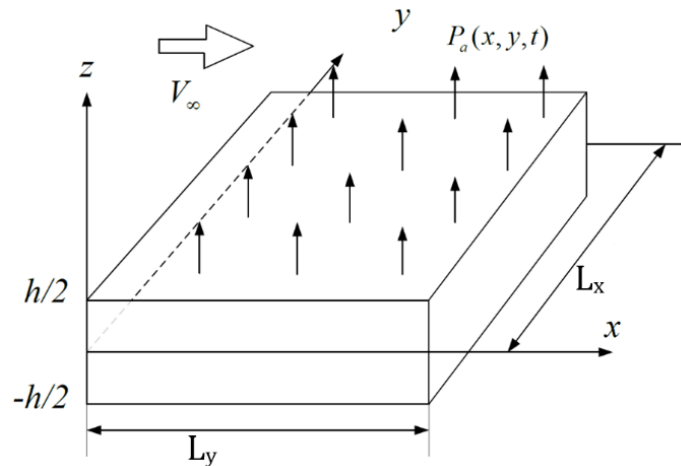


Figure1. View of rectangular sheet in supersonic air flow

The sheet motion equation is defined as follows based on Kirchhoff's assumptions:

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p(x, y, t) \tag{1}$$

Boundary conditions for x=0 or x=Lx in different support modes are defined as follows:

$$\text{Free} \rightarrow \begin{cases} M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \vartheta \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \\ V_x = Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \vartheta) \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x} \right) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

$$\text{Simple} \rightarrow \begin{cases} w = 0 \\ M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \vartheta \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

$$\text{Clamp} \rightarrow \begin{cases} w = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \end{cases} \tag{4}$$

In this study, the first order piston theory is used. In this study, it is assumed that the flow only passes through the sheet and on the other side of the sheet there is only static air pressure. With this assumption, the external pressure on the sheet is expressed as the difference between dynamic and static air pressure. This theory is valid for $M_\infty > \sqrt{2}$. This external pressure is formulated as follows:

$$p_a(x, y, t) = -\frac{\rho_a V_\infty^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \left\{ \frac{\partial w}{\partial x} + \left(\frac{M_\infty^2 - 2}{M_\infty^2 - 1} \right) \frac{1}{V_\infty} \frac{\partial w}{\partial t} \right\}, V_\infty = C_a M_\infty \tag{5}$$

In the following, the equation of the final movement of the sheet is expressed as follows, assuming the use of the first-order piston aerodynamic loading model under the title "coupled structure-fluid equation":

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\rho_a V_\infty^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \left\{ \frac{\partial w}{\partial x} + \left(\frac{M_\infty^2 - 2}{M_\infty^2 - 1} \right) \frac{1}{V_\infty} \frac{\partial w}{\partial t} \right\} = 0 \tag{6}$$

In the above equation, the parameters ρ , h , ρ_a , V_∞ and M_∞ respectively represent sheet density, sheet thickness, air flow density, air flow speed and air flow Mach number. In this regard, it is assumed that the air flow enters the

sheet in the direction of x . To solve this equation in the frequency domain, the method of separation of variables is used as follows. The variable of these equations is the same as the sheet spring variable. Isolation of this variable is done as follows:

$$w(x, y, t) = W(x, y)e^{i\omega t} \tag{7}$$

$$p(x, y, t) = P(x, y)e^{i\omega t} \tag{8}$$

The following relations are used to make the above equation dimensionless:

$$\left(\begin{matrix} \frac{x}{L_x} = L_x \\ \frac{y}{L_y} = L_y \\ \frac{L_x}{L_y} = \phi \end{matrix} \right) \rightarrow \left(\begin{matrix} d^r x = L_x r (d^r X) \\ d^r y = L_y r (d^r Y) \end{matrix} \right) \tag{9}$$

Using the above relationships, the coupled structure-fluid equation becomes dimensionless as follows (notice that the imaginary term in the first-order piston equation is omitted):

$$\rightarrow \left(\frac{\partial^4 W}{\partial X^4} + 2\phi^2 \frac{\partial^4 W}{\partial X^2 \partial Y^2} + \phi^4 \frac{\partial^4 W}{\partial Y^4} \right) - \left(\frac{L_x^4}{D} \right) \left[- \frac{\rho_a C_a^2 M_\infty^2}{L_x \sqrt{M_\infty^2 - 1}} \frac{\partial W}{\partial X} \right] = \left(\frac{L_x^4 \rho h \omega^2}{D} \right) W \tag{10}$$

$$\rightarrow \left(\frac{\partial^4 W}{\partial X^4} + 2\phi^2 \frac{\partial^4 W}{\partial X^2 \partial Y^2} + \phi^4 \frac{\partial^4 W}{\partial Y^4} \right) + P_u \frac{\partial W}{\partial X} = \lambda^4 W \tag{11}$$

In the relation above, λ and P_u are the dimensionless frequency of the sheet and the dimensionless dynamic pressure of the air, respectively, which are defined as follows:

$$P_u = \left(\frac{L_x^3}{D} \right) \frac{\rho_a C_a^2 M_\infty^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \tag{12}$$

$$\lambda = \left(\left(\frac{L_x^4}{D} \right) (\rho h \omega^2) \right)^{\frac{1}{4}} \tag{13}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \left(\frac{\lambda}{L_x} \right)^2 \tag{14}$$

DQM numerical method is used to solve this equation. Using the following relations, the coefficient matrices needed to solve the system equation can be obtained.

$$x_i = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \cos \left(\frac{i-1}{n-1} \pi \right) \right\} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \tag{15}$$

$$y_i = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \cos \left(\frac{i-1}{m-1} \pi \right) \right\} \quad i = 1, 2, 3, \dots, m \tag{16}$$

$$A_{ij}^x = \begin{cases} \frac{\prod_{k=1, k \neq i, j}^n (x_i - x_k)}{\prod_{k=1, k \neq j}^n (x_j - x_k)} & i \neq j \\ \sum_{k=1, k \neq i}^n \frac{1}{(x_i - x_k)} & i = j \end{cases} \rightarrow [A^x]_{n \times n} = \begin{bmatrix} A_{1,1}^x & \dots & A_{1,n}^x \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n,1}^x & \dots & A_{n,n}^x \end{bmatrix}_{n \times n} \tag{17}$$

$$A_{ij}^y = \begin{cases} \frac{\prod_{k=1, k \neq i, j}^m (y_i - y_k)}{\prod_{k=1, k \neq j}^m (y_j - y_k)} & i \neq j \\ \sum_{k=1, k \neq i}^m \frac{1}{(y_i - y_k)} & i = j \end{cases} \rightarrow [A^y]_{m \times m} = \begin{bmatrix} A_{1,1}^y & \dots & A_{1,m}^y \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m,1}^y & \dots & A_{m,m}^y \end{bmatrix}_{m \times m} \tag{18}$$

$$\begin{cases} w_{ij} = w(x_i, y_j) \\ i = 1, 2, \dots, n \\ j = 1, 2, \dots, m \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{d^r w}{dx^r} = [A^x]_{n \times n}^{(r)} [w]_{n \times m} \\ \frac{d^s w}{dy^s} = [w]_{n \times m} ([A^y]_{m \times m}^{(s)})^T \\ \frac{d^{r+s} w}{dx^r dy^s} = [A^x]_{n \times n}^{(r)} [w]_{n \times m} ([A^y]_{m \times m}^{(s)})^T \end{cases} \quad (19)$$

Using this solution method, the coupled structure-fluid equation is written in the following form:

$$[A^x]_{n \times n}^4 [W]_{n \times m} + 2\phi^2 [A^x]_{n \times n}^2 [W]_{n \times m} [A^y]_{m \times m}^2 + \phi^4 [W]_{n \times m} [A^y]_{m \times m}^2 + P_u [A^x]_{n \times n} [W]_{n \times m} = \lambda^4 [W]_{n \times m} \quad (20)$$

$$\{u\}_{nm \times 1} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{m-1} \\ u_m \end{Bmatrix}_{nm \times 1} = \begin{Bmatrix} w_{1,1} \\ w_{2,1} \\ \vdots \\ w_{n,1} \\ \vdots \\ w_{1,m} \\ w_{2,m} \\ \vdots \\ w_{n,m} \end{Bmatrix}_{nm \times 1} \quad (21)$$

The rule for converting matrix-like to vector-like in an equation, using Kroniker multiplication, is done as follows:

$$([I]_{m \times m} \otimes [D^x]_{n \times n})_{nm \times nm} \{u\}_{nm \times 1} + 2\phi^2 ([B^y]_{m \times m} \otimes [B^x]_{n \times n})_{nm \times nm} \{u\}_{nm \times 1} + \phi^4 ([D^y]_{m \times m} \otimes [I]_{n \times n})_{nm \times nm} \{u\}_{nm \times 1} + P_u ([I]_{m \times m} \otimes [A^x]_{n \times n})_{nm \times nm} \{u\}_{nm \times 1} = \lambda^4 ([I]_{m \times m} \otimes [I]_{n \times n})_{nm \times nm} \{u\}_{nm \times 1} \quad (22)$$

The boundary conditions of the problem are converted into a boundary condition matrix like the mentioned method, and for the final solution of the problem, this boundary condition matrix must be integrated with equation 22.

3. Results and discussion

In this part, the flutter speed in an aluminum sheet with a Young's modulus of 70 GPa, a density of 2700 kg/m³ and a Poisson's ratio of 0.35 with a length and width of 1 m and a thickness of 5 mm in CFCF boundary conditions and the atmospheric conditions of the open sea surface with an air flow density of 1.225 kg /m³ and the speed of sound is 343 m/s.

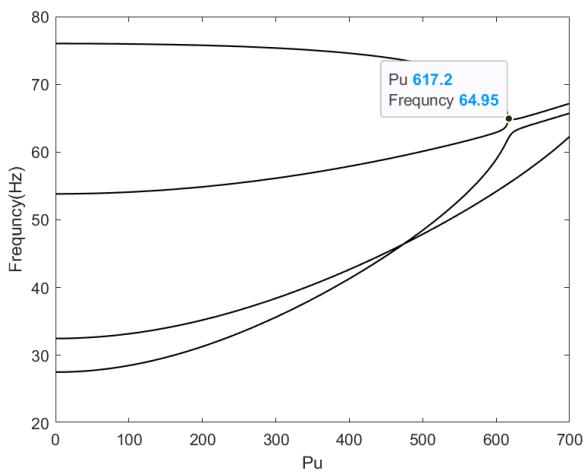


Figure 3. Frequency diagram of 4 sheet modes in terms of dimensionless dynamic pressure in CFCF boundary conditions

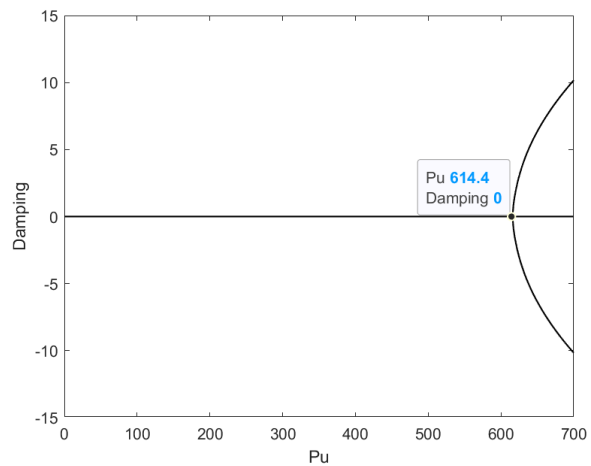


Figure 2. Damping diagram of the first 4 modes of the sheet in terms of dimensionless dynamic pressure in CFCF boundary conditions

By looking at Figure 2, it can be concluded that the first flutter phenomenon occurred due to the coupling of the third and fourth modes of the sheet at the frequency of 64.95 Hz and the dimensionless dynamic pressure of 617. According to this diagram, the damping of the structure in the sheet is created at the dimensionless dynamic pressure of 614.4, which is a number close to 617. The above two graphs are drawn in terms of Mach number as follows:

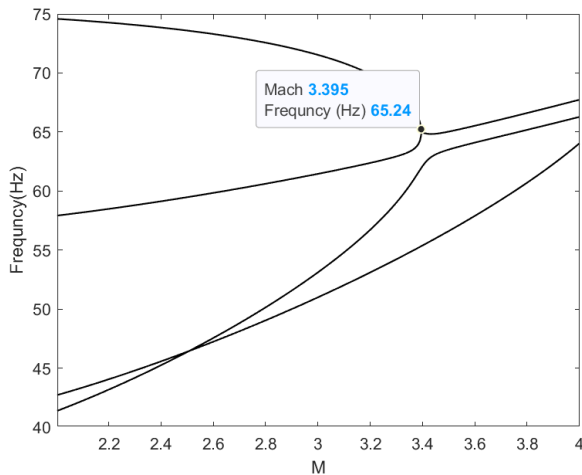


Figure 5. Frequency diagram of 4 sheet modes according to Mach number of air flow in CFCF boundary conditions

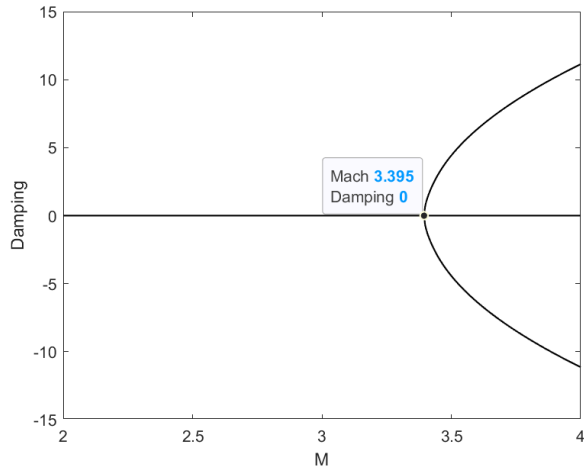


Figure 4. Damping diagram of the first 4 modes of the sheet according to the Mach number of the air flow in CFCF boundary conditions

According to Figure 4 and Figure 5, the first flutter phenomenon occurred at Mach 3.395. In this diagram, Mach numbers below 2 are not shown because the piston theory is not defined for Mach below 2. According to the investigations carried out on a sheet with the mentioned specifications, the first phenomenon of flutter occurs at the dynamic pressure without dimension 6.17, which is equivalent to Mach 3.395.

4. Conclusion

According to the study conducted in this article, it can be concluded that:

1. The use of Kirchhoff sheet assumptions to derive the sheet motion equation and the use of the first-order piston theory as an aerodynamic model brings good accuracy.
2. Using the DQM numerical method in matrix form provides advantages such as high accuracy and speed in solving the flutter problem, provided that the appropriate number of layers is chosen for the boundary points. So that by choosing two layers of boundary points to solve the equation, the frequencies obtained from the MATLAB code using the DQM method are equal to the sheet analytical solution in SSSS boundary conditions, and its error is almost zero for the first 4 frequencies.
3. According to the investigations, an aluminum sheet with the dimensions of length and width of 1 meter and thickness of 5 mm, in open sea surface conditions and with CFCF boundary conditions, at a dynamic dimensionless pressure of 615 (equivalent to Mach 3.395), with the first phenomenon Flutter will be encountered.

From these results, it can be concluded that the use of Kirchhoff sheet hypothesis, first order piston theory and DQM method along with the dimensions of the specified aluminum sheet is appropriate and accurate to investigate the flutter phenomenon in the desired conditions.



مدلسازی آیرودینامیکی و تعیین سرعت فلاتر ورق مستطیلی در جریان هوای مافوق صوت

مصطفی ناظمی زاده^{الف*}، محمدمهدی محمدی^ب، مهران صمدی فروشانی^ج^{الف} استادیار، مجتمع دانشگاهی مکانیک، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، اصفهان، ایران، nazemi@mut-esf.ac.ir^ب استادیار، مجتمع دانشگاهی مکانیک، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، اصفهان، ایران، mohammadi.mm@mut.ac.ir^ج کارشناسی ارشد، مجتمع دانشگاهی مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، اصفهان، ایران، mehransamadiforushani@yahoo.com

واژگان کلیدی	چکیده
سرعت فلاتر، جریان مافوق صوت، نظریه پیستون، روش عددی DQM، شرایط مرزی CFC.	این مقاله به بررسی پدیده فلاتر در یک ورق مستطیلی-شکل در جریان هوای مافوق صوت می پردازد. فلاتر، یک ارتعاش خود برانگیخته است که در معرض جریان سیال اتفاق می افتد. در این پژوهش، ابتدا پدیده فلاتر و روش شناسایی آن بر اساس تحلیل مقادیر ویژه مورد بررسی قرار می گیرد. سپس با استفاده از فرضیات ورق کیرشهف، معادله حرکت ورق استخراج شده و با مدل آیرودینامیکی پیستون مرتبه اول کوپل می شود. در ادامه، معادله کوپل شده سازه-سیال با استفاده از روش تفاضل مربعات (DQM) به صورت ماتریسی حل می شود. استفاده از روش عددی DQM در قالب ماتریسی، مزایایی از جمله دقت و سرعت بالا را برای حل مسئله فلاتر فراهم می کند، به شرطی که تعداد لایه مناسبی برای نقاط مرزی انتخاب شود. همچنین نتایج نشان می دهد که اولین پدیده فلاتر در یک ورق از جنس آلومینیوم با طول و عرض ۱ متر و ضخامت ۵ میلیمتر، در شرایط جوی سطح آزاد دریا و با شرایط مرزی دو سر گیردار و دو سر آزاد، در فشار دینامیکی بدون بعد ۶۱۷ (معادل ۳.۳۹۵ ماخ) رخ می دهد. فرمول بندی ارائه شده می تواند به عنوان یک پایه برای حل و محاسبه سرعت فلاتر اجسام مختلف در جریان هوای مافوق صوت مورد استفاده قرار گیرد.
تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۰۵/۲۱	
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۲/۰۵/۳۰	
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۶/۲۲	

۱- مقدمه

پدیده فلاتر از برهمکنش نیروهای آیرودینامیکی، نیروهای الاستیک و نیروهای اینرسی ایجاد شده و می تواند باعث گسیختگی بال هواپیما شود. چنانچه این پدیده مورد مطالعه و تحلیل قرار نگیرد، در سازه های هوایی که سازه های سبکی محسوب می شوند، موجب ناپایداری و تخریب سازه می شود. لذا تحلیل فلاتر سازه های هوایی یکی از ضرورت های مطالعاتی آن ها بوده و همواره این تحلیل مورد بررسی قرار می گیرد. پدیده فلاتر با توجه به علت وقوع آن به دو دسته الف) پدیده فلاتر در اثر جفت شدن فرکانس طبیعی سازه با فرکانس جریان هوا (مانند پدیده تشدید) و ب) پدیده فلاتر در اثر جفت شدن فرکانس های سازه ای (مورد بحث در این مقاله) تقسیم می شود. پدیده فلاتر در اثر جفت شدن فرکانس های سازه ای زمانی اتفاق می افتد که دو یا چند فرکانس از سازه بر اثر اعمال نیروهای آیرودینامیکی به اندازه کافی به هم نزدیک شوند و این نزدیکی باعث کوپل شدن این دو فرکانس سازه در یک سرعت مشخص از جریان هوا شود تا در نتیجه باعث بی ثباتی در سازه گردد. مثلاً در بال هواپیما، فرکانس های طبیعی حالت های خمشی و پیچشی می توانند با یکدیگر تعامل داشته باشند و منجر به بال زدن یا فلاتر شوند و یا حالت ارتعاش جانبی عرشه پل می تواند با حالت ارتعاش عمودی آن همراه شود و باعث ناپایداری به شکل فلاتر شود.

در این باره محققان تلاش های فراوانی را برای مطالعه این پدیده انجام داده اند. امیرزادگان و داوول [۱] با استفاده از روش

گالرکین^۱ و مدل آبرودینامیکی تئوری پیستون، ارتعاشات غیرخطی یک پوسته منحنی و نازک مستطیلی و همسانگرد را در جریان هوای مافوق صوت مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها نتایج تجربی را با نتایج تئوری مقایسه کردند و ویژگی‌های فلاتر و پس فلاتر پانل را مورد بررسی قرار دادند. ژانگ و همکاران [۲] یک مدل تحلیلی از یک پانل دوزنقه‌ای دارای انحنا را با استفاده از تکنیک همگن‌سازی و تئوری لایه‌ای و نظریه پیستون برای تحلیل مودال و آبروالاستیک ورق ارائه دادند. نظریه لایه‌ای پیشنهادی که برای یک صفحه ساندویچی توسعه داده شده بود، میدان جابجایی مرتبه بالاتر را برای لایه هسته و میدان جابجایی مرتبه اول را برای لایه‌های بالا و پایین فرض می‌کرد. آن‌ها دقت این روش را با نتایج حاصل از نرم‌افزارهای مطرح مقایسه کردند و نشان داده شد که روش پیشنهادی از دقت کافی برخوردار است و به تلاش محاسباتی کمتری نیاز دارد، در نتیجه می‌تواند مبنایی نظری برای استفاده از پانل ساندویچ هسته دارای انحنا و دوزنقه‌ای در طراحی هواپیما باشد. بقایی و همکاران [۳] یک رویکرد جدید برای تحلیل فلاتر پانل آبروالاستیک صفحات کامپوزیت مستطیلی توسعه دادند. این پانل هوشمند، که توسط دو کامپوزیت ماکرو فیبر ساندویچ شده است، دارای توالی‌های کلی انباشته است و در معرض محدودیت‌های لبه الاستیک قرار دارد. بررسی اثرات جهت‌گیری در این کامپوزیت‌ها بر روی مرزهای فلاتر این پانل هوشمند انجام شد. قابلیت و اعتبار این رویکرد با تطبیق نتایج با نتایج المان محدود تأیید شده است. حسینه و ملائب [۴] به بررسی پاسخ‌های غیرخطی پس از ناپایداری پانل‌های نازک با درجه‌بندی عملکردی دو جهته درون صفحه پرداختند. در این مطالعه، پاسخ‌های پس از فلاتر پانل‌هایی که در معرض جریان هوای مافوق صوت قرار می‌گیرند به‌عنوان مورد دینامیکی و پاسخ‌های پس کمانش به‌عنوان مورد استاتیک در نظر گرفته شده است. همچنین، تأثیر بارگذاری‌های حرارتی و مکانیکی درون صفحه بر روی پایداری پانل‌ها مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته است. در این مطالعه، تئوری پیستون مرتبه اول برای مدل‌سازی آبرودینامیکی و نظریه صفحه کلاسیک همراه با کرنش‌های غیرخطی فون کارمن برای مدل‌سازی سازه استفاده شده است. برای تحلیل، از روش المان محدود استفاده شده است. فرسادی و همکاران [۵] به بررسی فلاتر غیرخطی و رفتار پس از فلاتر صفحه بال مانند با سختی متغیر پرداخته‌اند. در این مطالعه، تئوری پیستون خطی مرتبه اول برای مدل‌سازی آبرودینامیک استفاده شده است و روش حل تفاضل مربعات دیفرانسیل برای حل معادلات حاکم مورد استفاده قرار گرفته است. از تئوری کرنش غیرخطی فون کارمن برای محاسبه غیرخطی‌های هندسی استفاده می‌شود و تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول برای در نظر گرفتن اثرات برشی عرضی در مدل‌سازی ساختار استفاده می‌شود. نتایج نشان می‌دهد که جهت الیاف تأثیر قابل توجهی بر رفتار دینامیکی صفحه و خواص نامتقارن و همچنین رفتار نوسان سیکل حدی دارد. بار دیگر امیرزادگان و داوود [۶] مطالعه‌ای درباره ناپایداری و نوسانات سیکل حدی پوسته‌های الاستیک کم عمق در جریان گاز مافوق صوت انجام دادند. آن‌ها با تجزیه و تحلیل آبروالاستیک غیرخطی صفحات منحنی مربعی در جهت جریان، نتایج تجربی را مقایسه کردند. همچنین امیرزادگان و همکاران [۷] به مطالعه پایداری صفحه الاستیک در جریان گاز مافوق صوت پرداختند. این مطالعه برای درک بیشتر فلاتر پانل، کمانش و ارتعاش ساختارهای نازک هواپیما و موشک در پرواز با سرعت بالا انجام شد. هدف اصلی این تحقیق افزایش طول عمر سازه بود و بررسی کردن تأثیر تنش‌های طولی و جانبی بر روی سرعت فلاتر و ویژگی‌های پانل بود. این تحقیق می‌تواند به تعیین مناطق پایدار و ناپایدار در سازه‌های هواپیما کمک کند. مجیدی و همکاران [۸]، یک مطالعه جامع در مورد تجزیه و تحلیل فلاتر مافوق صوت صفحات دوزنقه‌ای کنسول نانولوله کربنی با درجه‌بندی عملکردی ارائه دادند. در این مطالعه از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول برای مدل‌سازی سازه استفاده شده است، فشار آبرودینامیکی بر اساس تئوری پیستون تخمین زده می‌شود و مجموعه معادلات حاکم و شرایط مرزی با استفاده از آن استخراج می‌شود. نتایج این مقاله می‌تواند به‌عنوان ابزاری مفید در طراحی و تحلیل وسایل نقلیه هوایی که با سرعت مافوق صوت پرواز می‌کنند، مورد توجه قرار گیرد. هوانگ و همکاران [۹] به بررسی ویژگی‌های فلاتر صفحات چهار ضلعی کامپوزیتی تقویت‌شده با نانوپلاکت گرافن پرداختند. از روش ریتز برای مدل‌سازی و از مدل هالپین-تسای^۲ برای پیش‌بینی خواص ماده استفاده کردند. توابع انرژی بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و تئوری پیستون مرتبه اول به دست آمدند. معادله دینامیکی گسسته صفحات چهار ضلعی با استفاده از تقریب روش ریتز حل شد. دقت نتایج از طریق مقایسه فرکانس‌های طبیعی با مقادیر منتشر شده بررسی شد. موک [۱۰]، بررسی تأثیر اثرات برشی عرضی، بر ویژگی‌های فلاتر را برای صفحات کامپوزیتی چندلایه مستطیلی نشان داد. فرمول تغییرات مختصر برای انواع مختلف تئوری‌های صفحه (کلاسیک، مرتبه اول و مرتبه بالاتر) نشان داده شده است. روش ارزیابی شده

¹ Galerkin Method

² Halpin-Tsai model

حل را می توان به عنوان معیاری برای تحلیل عددی در نظر گرفت زیرا نتایج تحلیلی را می توان مستقیماً با استفاده از بسته های نرم افزارهایی مانند Mathematica، Maple یا Matlab به دست آورد. بهرامی و همکاران [۱۱]، یک روش عددی برای مطالعه رفتار دینامیکی یک صفحه مستطیلی همسانگرد تحت بارهای آیرودینامیکی ناشی از جریان هوای مافوق صوت موازی ارائه دادند. یک مدل اجزای محدود، بر اساس توابع جابجایی چند جمله ای دو بعدی و تئوری پیستون خطی، برای مطالعه رفتار دینامیکی صفحه جامد همراه با بارهای آیرودینامیکی استفاده می شود. رویکرد توسعه یافته قادر به مدل سازی صفحات مسطح و پوسته های کم عمق است که در آن جفت شدگی ساختار سیال در سطح مشترک به طور هم زمان با استفاده از روش یکپارچه اعمال می شود. مدل جامد بر اساس نظریه پوسته سندرز^۳ است. ماتریس های سختی و میرایی که از اعمال بار آیرودینامیکی حاصل می شوند با ماتریس های به دست آمده از یک مدل ساختاری همراه می شوند و با استفاده از ادغام تحلیلی محاسبه می شوند. با جمع آوری ماتریس ها، ماتریس های جرم کلی، میرایی و سختی صفحه به دست می آید و سپس معادلات دینامیکی مسئله حاکم به دست می آید. مقادیر ویژه سیستم با استفاده از تکنیک کاهش معادله محاسبه می شود. فشار آیرودینامیکی بی بعد بحرانی جریان هوا که باعث بال زدن سازه می شود برای شرایط مرزی و هندسه های مختلف تعیین می شود. نتایج به دست آمده با سایر آثار تحقیقاتی منتشر شده مقایسه شده و تطابق بسیار خوبی مشاهده می شود. اوپانگ و ليو [۱۲]، رفتار فلاتر حرارتی غیرخطی ورقه های کامپوزیتی با سختی متغیر با الیاف منحنی در جریان مافوق صوت بالا را بررسی کردند. در این مطالعه نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول با ترکیب روابط کرنش-جابجایی انحراف بزرگ فون کارمن، آیرودینامیک تئوری پیستون مرتبه اول شبه پایدار و نظریه تنش حرارتی شبه پایدار برای فرمول بندی معادلات المان محدود حرکت پانل فلوتر غیرخطی استفاده شده است. نتایج نشان می دهد که فشار دینامیکی بحرانی و دامنه سیکل حد هر دو با افزایش گرادیان دما در امتداد ضخامت پانل افزایش می یابند. گوآ و همکاران [۱۳]، تجزیه و تحلیل فلاتر یک تیغه کامپوزیت تقویت شده با نانوپلاکت های گرافن درجه بندی شده عملکردی در حال چرخش تحت جریان هوای مافوق صوت را بررسی کردند. دقت این روش برای این مشکل توسط مطالعات همگرایی جامع و مطالعات مقایسه دقیق تأیید شده است. خلیفه و فضیلتی [۱۴]، یک فرمول تجزیه و تحلیل ایزوهندسی همراه با تکنیک Nitsche بر اساس تئوری صفحه تغییر شکل برشی مرتبه اول برای بررسی رفتار فلاتر پانل آیرو-ترمو-الاستیک یک صفحه دارای درجه بندی عملکردی حاوی ترک استخراج کردند. دقت و کیفیت فرمول ایزوهندسی حاضر در مقایسه با موارد موجود در ادبیات نشان داده شده است. سالام و همکاران [۱۵]، به بررسی اثر تعدیل نیروهای اینرسی و الاستیک بر فلاتر و پایداری پانل های کامپوزیت نازک چندلایه پرداختند. معادلات حرکت پانل بر اساس اصل همیلتون به دست آمده است. تئوری پیستون مرتبه اول برای محاسبه بارگذاری آیرودینامیکی استفاده می شود. عنصر صفحه مستطیلی بوگنر-فاکس-اشمیت در فرمول بندی معادلات اجزای محدود در نظر گرفته شده است. نتایج اثر قابل توجه روش پیشنهادی را نشان می دهد. گورگ و همکاران [۱۶]، پایداری یک صفحه مستطیلی در جریان مافوق صوت را در حضور میدان دمایی ناهمگن در ضخامت بررسی کردند. نشان داده شده است که میدان دما و سرعت جریان وابستگی متقابل دارند و فرآیند پایداری را تنظیم می کنند. همچنین نشان داده شده است که میدان دما معنادار است به شدت بر سرعت بحرانی فلاتر تأثیر می گذارد. سیروان فرهادی و کامران اسدی [۱۷]، با بررسی معادلات حاکم و به کارگیری روش SOF (فیدبک خروجی استاتیک)، سعی کردند حسگرهای ارتعاش را برای نزدیک ترین عملکرد به کنترل کننده LQR جایابی کنند. آن ها برای این کار، از یک ورق مستطیلی که در معرض جریان سوپرسونیک قرار دارد و همچنین برای کنترل ارتعاشات ورق از یک وصله پیزوالکتریک استفاده کردند. همچنین برای شبیه سازی ورق از تئوری ون کارمن^۴ و تئوری ورق نسبتاً ضخیم میندلین^۵، و برای مدل سازی جریان هوا تئوری مرتبه اول پیستون^۶ استفاده شده است. معادلات حرکت را با استفاده از روش لاگرانژ و تقریب میدان جابجایی توسط سری های توانی محدود به دست آوردند. سپس معیاری برای یافتن نقاطی که ترکیب فیدبک جابجایی آن ها می تواند نزدیک ترین عملکرد کنترلی را در مقایسه با کنترلر LQR ایجاد نماید، ارائه دادند. در نهایت با شبیه سازی عددی کارایی معیار به دست آمده مورد ارزیابی و تأیید قرار گرفته شد. نتایج کار فرهادی و اسدی نشان داد که با

³ Sanders shell theory

⁴ Von Karman theory

⁵ Mindlin

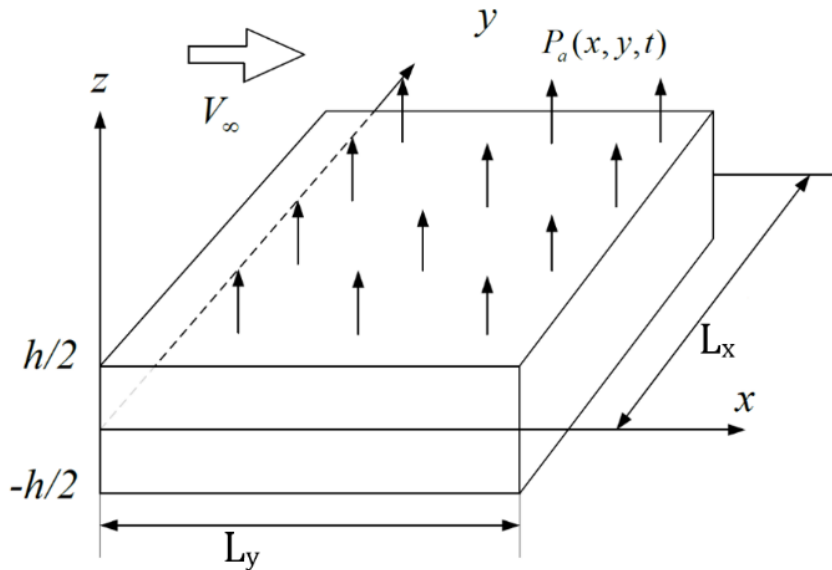
⁶ First order theory of the piston

فیدبک ترکیب مشخصی از جابجایی نقاط خاصی از ورق می‌توان فلاتر ورق را در سرعت‌هایی بیش از دو برابر سرعت بحرانی ورق نیز به شکل مؤثری کنترل نمود. این روش با وجود حذف تخمین گر متغیرهای حالت، عملکردی قابل‌مقایسه با کنترلر LQR ارائه می‌دهد.

در این مطالعه، حل معادلات ورقی با شرایط تکیه‌گاهی⁷ CFCF با استفاده از روش عددی بسیار دقیق⁸ DQM انجام شده است. در مطالعات انجام گرفته شده بر روی سرعت فلاتر با استفاده از روش عددی DQM، از این روش تا به حال به صورت شکل ماتریسی استفاده نشده است. یکی از نوآوری‌های این مطالعه، استفاده از قالب ماتریسی برای حل DQM مسئله فلاتر است. مزیت اصلی استفاده از قالب ماتریسی برای حل مسئله، سرعت و دقت حل می‌باشد. در حالت کلی، این تحقیق به گسترش کد برای به دست آوردن سرعت فلاتر به صورت دقیق و سریع در شرایط مختلف بارگذاری آیرودینامیکی و شرایط مختلف تکیه‌گاهی یک ورق مستطیلی می‌پردازد. در این مطالعه، معادله ورق با استفاده از فرضیات کیرشهف (Kirchhoff) استخراج شده است. همچنین از نظریه پیستون مرتبه اول به عنوان مدل آیرودینامیکی برای تحلیل جریان هوا و تعیین سرعت فلاتر در نظر گرفته شده است. و در آخر تعداد نقاط لایه مرزی مسئله نیز به صورت دقیق مشخص شده است تا حل دقیق‌تری از روش DQM ایجاد شود.

۲- استخراج معادلات حاکم

در این قسمت ابتدا معادلات حرکت ورق و شرایط مرزی ورقی مستطیل شکل با فرضیات کیرشهف از کتاب رانو [۱۸] استخراج می‌شود و در ادامه با مدل آیرودینامیکی نظریه پیستون مرتبه اول کوپل شده و معادله کوپل شده سازه-سیال ایجاد می‌شود. سپس این معادله با استفاده از روش جداسازی متغیرها وارده حوزه فرکانس می‌شود و بعد از بی‌بعد سازی آن، به فرم مسئله مقدار ویژه تبدیل می‌شود. در انتها بعد از تعریف روش عددی DQM، مسئله مقدار ویژه به فرم ماتریسی نوشته می‌شود.



شکل ۱ نمایشی از ورق مستطیل شکل در جریان هوای مافوق صوت

۲-۱- استخراج معادله حرکت ورق

معادله حرکت ورق و شرایط مرزی آن بر مبنای استفاده از فرضیات ورق کیرشهف و فرضیات تار خنثی از مرجع [۹] استخراج شده‌اند. طبق فرضیات ورق کیرشهف، نسبت خیز به ضخامت ورق ناچیز است ($w/h \approx 0$)، نسبت ضخامت به ابعاد دیگر ورق ناچیز است ($h/L_x \approx h/L_y < 0.05$)، ضخامت پس از تغییر شکل ثابت باقی می‌ماند ($\epsilon_{zz} = 0$)، هر مقطع عمود بر سطح میانی

⁷ Clamp-free-clamp-free

⁸ Differential quadrature method

پس از تغییر شکل عمود باقی می‌ماند ($\varepsilon_{zx} = \varepsilon_{zy} = 0$) و فرض $\sigma_{zz} \cong 0$ نیز برقرار است. و همچنین طبق فرضیات تار خنثی، لایه میانی بدون کرنش فرض می‌شود (جابجایی در تار خنثی صفر می‌باشد). با استفاده از این فرضیات، روابط جابجایی برای ورق به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$(u, v, w) = \left(-z \frac{\partial w}{\partial x}, -z \frac{\partial w}{\partial y}, w(x, y, t) \right) \quad (1)$$

و با استفاده از روابط جابجایی به دست آمده، معادله حرکت زیر برای ورق مستطیلی به دست می‌آید:

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p(x, y, t) \quad (2)$$

۲-۲- استخراج شرایط مرزی ورق

در این قسمت شرایط مرزی برای همه حالات ممکن از مرجع [۹] استخراج می‌شود. این شرایط برای یک لبه نمونه مانند لبه $x=L$ یا $x=0$ نوشته شده است. در لبه‌ای با تکیه‌گاه آزاد (Free or F)، نیروی برشی و ممان خمشی در نقاط مرزی ورق برابر صفر است. این شرایط به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$x = 0 \text{ یا } x = L_x \quad (3)$$

$$\rightarrow \begin{cases} M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \vartheta \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \\ V_x = Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \vartheta) \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x} \right) = 0 \end{cases}$$

در لبه‌ای با تکیه‌گاه ساده (Simple or S)، خیز ورق و ممان خمشی در نقاط مرزی ورق برابر صفر است. این شرایط به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$x = 0 \text{ یا } x = L_x \rightarrow \begin{cases} w = 0 \\ M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \vartheta \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

در لبه‌ای با تکیه‌گاه یکسر گیردار (Clamp or C)، خیز و شیب خیز ورق در نقاط مرزی ورق برابر صفر است. این شرایط به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$x = 0 \text{ یا } x = L_x \rightarrow \begin{cases} w = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

۲-۳- تعیین مدل بارگذاری آیرودینامیکی

نظریه پیستون که به عنوان نظریه جریان پتانسیل خطی نیز شناخته می‌شود، یک نظریه آیرودینامیکی بنیادی است که اساس بسیاری از نظریه‌ها و مدل‌های دیگر را تشکیل می‌دهد. در تئوری پیستون، جریان هوا در اطراف یک جسم به صورت غیر لزج (یعنی بدون اصطکاک) و تراکم ناپذیر فرض می‌شود، به این معنی که چگالی هوا در طول زمان ثابت می‌ماند و تغییرات فشار تجربه شده صرفاً به دلیل تفاوت در سرعت نقاط مختلف سطح است و این نظریه به دلیل سادگی/سرعت توان محاسباتی مورد نیاز برای حل مسائل مربوط به بهینه‌سازی طراحی و غیره، جایگاه قابل توجهی را در میان سایر نظریه‌های آیرودینامیکی دارد. اصل اساسی پشت تئوری پیستون این است که یک سطح ارتعاشی را می‌توان به عنوان مجموعه‌ای از پیستون‌های مسطح که به موازات یکدیگر با سرعت‌های مختلف حرکت می‌کنند، مدل‌سازی کرد. این رویکرد هندسه پیچیده سازه را به اجزای ساده‌تر برای مدل‌سازی و شبیه‌سازی ریاضی ساده‌تر می‌کند. در این مطالعه از تئوری پیستون مرتبه اول استفاده شده است. در این مطالعه فرض شده است که جریان فقط از روی ورق عبور می‌کند و در طرف دیگر ورق تنها فشار استاتیک هوا وجود دارد. با این

فرض، فشار خارجی وارد به ورق به صورت اختلاف فشار دینامیکی و استاتیکی هوا بیان می‌شود. این تئوری برای $M_\infty > \sqrt{2}$ دارای اعتبار است. این فشار خارجی به صورت زیر فرمول‌بندی شده است:

$$p_a(x, y, t) = -\frac{\rho_a V_\infty^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \left\{ \frac{\partial w}{\partial x} + \left(\frac{M_\infty^2 - 2}{M_\infty^2 - 1} \right) \frac{1}{V_\infty} \frac{\partial w}{\partial t} \right\} \quad (6)$$

۲-۴- معادله کوپل شده سازه-سیال

در این قسمت معادله نهایی حرکت ورق با فرض استفاده از مدل بارگذاری آیرودینامیکی پیستون مرتبه اول تحت عنوان "معادله کوپل شده سازه-سیال" به صورت زیر بیان می‌شود:

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\rho_a V_\infty^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \left\{ \frac{\partial w}{\partial x} + \left(\frac{M_\infty^2 - 2}{M_\infty^2 - 1} \right) \frac{1}{V_\infty} \frac{\partial w}{\partial t} \right\} = 0 \quad (7)$$

در معادله بالا پارامترهای ρ ، h ، ρ_a و V_∞ و M_∞ به ترتیب معرف چگالی ورق، ضخامت ورق، چگالی جریان هوا، سرعت جریان هوا و عدد ماخ جریان هوا می‌باشند. در این رابطه فرض شده است که جریان هوا در راستای x به ورق وارد می‌شود. برای حل کردن این معادله در حوزه فرکانس، از روش جداسازی متغیرها به صورت زیر استفاده می‌شود. متغیر این معادلات همان متغیر خیز ورق است. جداسازی این متغیر به صورت زیر انجام می‌شود:

$$w(x, y, t) = W(x, y) e^{i\omega t} \quad (8)$$

و از آنجایی که تابع $p(x, y, t)$ در تئوری مرتبه اول پیستون بر حسب تابع $w(x, y, t)$ نوشته شده است، می‌توان جداسازی متغیرها در این تابع را به صورت زیر نشان داد:

$$p(x, y, t) = P(x, y) e^{i\omega t} \quad (9)$$

حال با استفاده از روابط ۸ و ۹، معادله کوپل شده سازه سیال به صورت زیر جداسازی می‌شود:

$$D \left(\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} \right) e^{i\omega t} + \rho h W (i\omega)^2 e^{i\omega t} = P(x, y) e^{i\omega t} \quad (10)$$

$$\rightarrow \left(\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} \right) - \frac{1}{D} P(x, y) = \frac{\rho h \omega^2}{D} W \quad (11)$$

روابط زیر برای بی‌بعد کردن معادله بالا به کار می‌روند:

$$\left(\begin{array}{l} \frac{x}{L_x} = X \\ \frac{y}{L_y} = Y \\ \frac{L_x}{L_y} = \phi \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{l} d^r x = L_x r (d^r X) \\ d^r y = L_y r (d^r Y) \end{array} \right) \quad (12)$$

با استفاده از روابط بالا، معادله کوپل شده سازه-سیال به صورت زیر بی‌بعد می‌شود:

$$\rightarrow \left(\frac{\partial^4 W}{\partial X^4} + 2 \frac{L_x^2}{L_y^2} \frac{\partial^4 W}{\partial X^2 \partial Y^2} + \frac{L_x^4}{L_y^4} \frac{\partial^4 W}{\partial Y^4} \right) - \left(\frac{L_x^4}{D} \right) P(x, y) = \left(\frac{L_x^4 \rho h \omega^2}{D} \right) W \quad (13)$$

$$\rightarrow \left(\frac{\partial^4 W}{\partial X^4} + 2\phi^2 \frac{\partial^4 W}{\partial X^2 \partial Y^2} + \phi^4 \frac{\partial^4 W}{\partial Y^4} \right) - \left(\frac{L_x^4}{D} \right) P(x, y) = \left(\frac{L_x^4 \rho h \omega^2}{D} \right) W \quad (14)$$

جداسازی متغیرها و بی‌بعد سازی آن‌ها برای شرایط مرزی ورق در لبه $x=0$ یا $x=L_x$ به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$Free \rightarrow \begin{cases} \left(\phi^2 \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \vartheta \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} \right) = 0 \\ \left(\phi^2 \frac{\partial^3 W}{\partial X^3} + (2 - \vartheta) \frac{\partial^3 W}{\partial Y^2 \partial X} \right) = 0 \end{cases} \quad (15)$$

$$Simple \rightarrow \begin{cases} W = 0 \\ \left(\phi^2 \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \vartheta \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} \right) = 0 \end{cases} \quad (16)$$

$$Clamp \rightarrow \begin{cases} W = 0 \\ \frac{\partial W}{\partial X} = 0 \end{cases} \quad (17)$$

این فرآیند برای معادله پیستون مرتبه اول به صورت زیر انجام می شود:

$$p_a(x, y, t) = P(x, y)e^{i\omega t} = \quad (18)$$

$$-\frac{\rho_a V_\infty^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \left\{ e^{i\omega t} \frac{\partial W}{\partial x} + \left(\frac{M_\infty^2 - 2}{M_\infty^2 - 1} \right) \frac{1}{V_\infty} e^{i\omega t} W(i\omega) \right\}$$

$$\rightarrow P(x, y) = -\frac{\rho_a V_\infty^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \left\{ \frac{\partial W}{\partial x} + i\omega \left(\frac{M_\infty^2 - 2}{M_\infty^2 - 1} \right) \frac{1}{V_\infty} W \right\} \quad (19)$$

با تعریف عدد ماخ به صورت زیر، معادله پیستون مرتبه اول به شکل زیر بازنویسی می شود:

$$M_\infty = \frac{V_\infty}{C_a} \rightarrow V_\infty = C_a M_\infty \quad (20)$$

$$P(x, y) = \left[-\frac{\rho_a C_a^2 M_\infty^2}{L_x \sqrt{M_\infty^2 - 1}} \frac{\partial W}{\partial X} \right] + i\omega \left[-\frac{\rho_a C_a M_\infty (M_\infty^2 - 2)}{(M_\infty^2 - 1)^{1.5}} W \right] \quad (21)$$

جمله موهومی این معادله معرف جمله میرا کننده ورق توسط جریان هوا می باشد. از آنجایی که مرز فلاتر در شرایطی قرار دارد که میرایی سازه صفر است (حرکت هارمونیک)، می توان از این جمله صرف نظر کرد. پس نظریه پیستون مرتبه اول به صورت زیر نوشته می شود:

$$P(x, y) = \left[-\frac{\rho_a C_a^2 M_\infty^2}{L_x \sqrt{M_\infty^2 - 1}} \frac{\partial W}{\partial X} \right] \quad (22)$$

در نهایت معادله کوپل شده سازه-سیال به صورت زیر نوشته می شود:

$$\rightarrow \left(\frac{\partial^4 W}{\partial X^4} + 2\phi^2 \frac{\partial^4 W}{\partial X^2 \partial Y^2} + \phi^4 \frac{\partial^4 W}{\partial Y^4} \right) - \left(\frac{L_x^4}{D} \right) \left[-\frac{\rho_a C_a^2 M_\infty^2}{L_x \sqrt{M_\infty^2 - 1}} \frac{\partial W}{\partial X} \right]$$

$$= \left(\frac{L_x^4 \rho h \omega^2}{D} \right) W \quad (23)$$

$$\rightarrow \left(\frac{\partial^4 W}{\partial X^4} + 2\phi^2 \frac{\partial^4 W}{\partial X^2 \partial Y^2} + \phi^4 \frac{\partial^4 W}{\partial Y^4} \right) + P_u \frac{\partial W}{\partial X} = \lambda^4 W \quad (24)$$

در رابطه بالا λ و P_u به ترتیب فرکانس بدون بعد ورق و فشار دینامیکی بدون بعد هوا می باشند که به صورت زیر تعریف می شوند:

$$P_u = \left(\frac{L_x^3}{D} \right) \frac{\rho_a C_a^2 M_\infty^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \quad (25)$$

$$\lambda = \left(\left(\frac{L_x^4}{D} \right) (\rho h \omega^2) \right)^{\frac{1}{4}} \quad (26)$$

طبق رابطه بالا، با داشتن مقادیر λ ، مقادیر فرکانس ورق (ω) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \left(\frac{\lambda}{L_x} \right)^2 \quad (27)$$

۲-۵- روش عددی DQM

در این قسمت به شرح روش عددی DQM برای حل معادله حاکم بر مسئله پرداخته می‌شود. روش تفاضل مربعات دیفرانسیل (DQM) یک تکنیک عددی قدرتمند است که برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی (PDEs⁹) استفاده می‌شود. این روش در طول سال‌ها به دلیل دقت و تطبیق پذیری بالا، محبوبیت زیادی پیدا کرده است. DQM با تقریب مشتقات یک تابع با استفاده از مجموع وزنی مقادیر تابع در نقاط گسسته بر روی یک شبکه کار می‌کند. با انجام این کار، PDE ها به معادلات جبری مرتبه اول تبدیل می‌شوند و سپس با استفاده از تکنیک‌های جبر خطی استاندارد به راحتی قابل حل می‌شوند. درون‌یابی با استفاده از چندجمله‌ای لاگرانژ، زیربنای ریاضیاتی در این روش می‌باشد. فرض کنید n نقطه زیر داده شده است:

$$(x_1, f_1), (x_2, f_2), (x_3, f_3), \dots, (x_i, f_i), \dots, (x_n, f_n)$$

چندجمله‌ای مرتبه $n-1$ ای که بتواند از این نقاط عبور کند به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f = \sum_{i=1}^n L_i(x) f_i \quad (28)$$

در تابع بالا، n تابع $L_i(x)$ را n چندجمله‌ای لاگرانژ می‌نامند که چندجمله‌ای‌هایی از درجه $n-1$ هستند و به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$L_i(x) = \prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \quad (29)$$

عبارتی که برای روش DQM مورد استفاده قرار می‌گیرد، مشتق چندجمله‌ای لاگرانژ است که به صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$f(x) = \sum_{j=1}^N \left(\frac{\prod_{k=1, k \neq j}^N (x - x_k)}{\prod_{k=1, k \neq j}^N (x_j - x_k)} \right) f_j = \sum_{j=1}^N L_j(x) f_j \quad (30)$$

$$\rightarrow \frac{d^r f}{dx^r} = \sum_{j=1}^N \frac{d^r L_j(x)}{dx^r} f_j \quad (31)$$

مشتق مرتبه اول $L_j(x)$ نسبت به x به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$A_{ij} = \frac{dL_j(x)}{dx} \Big|_{x_i} = \begin{cases} \frac{\prod_{k=1, k \neq i, j}^N (x_i - x_k)}{\prod_{k=1, k \neq j}^N (x_j - x_k)} & i \neq j \\ \sum_{k=1, k \neq i}^N \frac{1}{(x_i - x_k)} & i = j \end{cases} \quad (32)$$

⁹ partial differential equations

$$\rightarrow \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x_i} = \sum_{j=1}^N A_{ij} f_j \quad (33)$$

فرم ماتریسی رابطه بالا به صورت زیر بیان می شود:

$$\left\{ \frac{df}{dx} \right\} = [A]_{N \times N} \{f\}_{N \times 1} = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N1} & \cdots & A_{NN} \end{bmatrix} \{f_1, f_2, \dots, f_N\}^T \quad (34)$$

این فرم برای مشتقات بالاتر به صورت زیر بیان می شود:

$$\left\{ \frac{d^r f}{dx^r} \right\} = [A] \left\{ \frac{d^{r-1} f}{dx^{r-1}} \right\} = [A]^r \{f\} \quad (35)$$

برای ایجاد ماتریس ضرایب وزنی ($[A]$) نیاز به تعریف و توزیع نقاط نمونه روی مدل می باشد. توزیع غیریکنواخت چبیشف و ماتریس های ضرایب وزنی برای حالتی که f تابعی از x و y باشد به صورت زیر نوشته می شود:

$$x_i = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \cos \left(\frac{i-1}{n-1} \pi \right) \right\} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (36)$$

$$y_i = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \cos \left(\frac{i-1}{m-1} \pi \right) \right\} \quad i = 1, 2, 3, \dots, m \quad (37)$$

$$A_{ij}^x = \begin{cases} \frac{\prod_{k=1, k \neq i, j}^n (x_i - x_k)}{\prod_{k=1, k \neq j}^n (x_j - x_k)} & i \neq j \\ \sum_{k=1, k \neq i}^n \frac{1}{(x_i - x_k)} & i = j \end{cases} \rightarrow [A^x]_{n \times n} = \begin{bmatrix} A_{1,1}^x & \cdots & A_{1,n}^x \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n,1}^x & \cdots & A_{n,n}^x \end{bmatrix}_{n \times n} \quad (38)$$

$$A_{ij}^y = \begin{cases} \frac{\prod_{k=1, k \neq i, j}^m (y_i - y_k)}{\prod_{k=1, k \neq j}^m (y_j - y_k)} & i \neq j \\ \sum_{k=1, k \neq i}^m \frac{1}{(y_i - y_k)} & i = j \end{cases} \rightarrow [A^y]_{m \times m} = \begin{bmatrix} A_{1,1}^y & \cdots & A_{1,m}^y \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m,1}^y & \cdots & A_{m,m}^y \end{bmatrix}_{m \times m} \quad (39)$$

در نهایت روش DQM به صورت زیر برای جملات مختلف از معادله پیاده سازی می شود:

$$\left\{ \begin{array}{l} w_{ij} = w(x_i, y_j) \\ i = 1, 2, \dots, n \\ j = 1, 2, \dots, m \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^r w}{dx^r} = [A^x]_{n \times n}^{(r)} [w]_{n \times m} \\ \frac{d^s w}{dy^s} = [w]_{n \times m} ([A^y]_{m \times m}^{(s)})^T \\ \frac{d^{r+s} w}{dx^r dy^s} = [A^x]_{n \times n}^{(r)} [w]_{n \times m} ([A^y]_{m \times m}^{(s)})^T \end{array} \right. \quad (40)$$

۲-۶- حل معادله به روش DQM

با استفاده از این روش حل، معادله کوپل شده سازه-سیال به فرم زیر نوشته می شود:

$$\begin{aligned}
 [A^x]^4_{n \times n} [W]_{n \times m} + 2\phi^2 [A^x]^2_{n \times n} [W]_{n \times m} [A^y]^2_{m \times m}^T & \quad (41) \\
 + \phi^4 [W]_{n \times m} [A^y]^2_{m \times m}^T + P_u [A^x]_{n \times n} [W]_{n \times m} & \\
 = \lambda^4 [W]_{n \times m} &
 \end{aligned}$$

در این معادله، خیز ورق (W) پس از اعمال روش حل عددی DQM به فرم ماتریس بیان شده است و برای آنکه بتوان ماتریس $[W]_{n \times m}$ را از معادله فاکتور گرفت و معادله را به فرم مسئله مقدار ویژه استاندارد نوشت، باید از ضرب کرونیگر به فرمت شرح داده شده در زیر استفاده شود.

ماتریس خیز متناسب با توزیع نقاط مشخص شده روی ورق، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$[W]_{n \times m} = \begin{bmatrix} w_{1.1} & \dots & w_{1.m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{n.1} & \dots & w_{n.m} \\ \underbrace{\phantom{w_{n.1}}}_{u_1} & & \underbrace{\phantom{w_{n.m}}}_{u_m} \end{bmatrix} = [u_1, u_2, \dots, u_m] \quad (42)$$

که در آن هر بردار u_j به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$u_j = \begin{Bmatrix} w_{1j} \\ \vdots \\ w_{nj} \end{Bmatrix} = \text{ستون } j\text{ام ماتریس خیز} \quad (43)$$

سپس بردار خیز ورق به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\{u\}_{nm \times 1} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{m-1} \\ u_m \end{Bmatrix}_{nm \times 1} = \begin{Bmatrix} w_{1.1} \\ w_{2.1} \\ \vdots \\ w_{n.1} \\ \vdots \\ w_{1.m} \\ w_{2.m} \\ \vdots \\ w_{n.m} \end{Bmatrix}_{nm \times 1} \quad (44)$$

قاعده تبدیل ماتریس خیز به بردار خیز در یک معادله، با استفاده از ضرب کرونیگر به صورت زیر می‌باشد:

$$[a][w][b] \equiv ([b]^T \otimes [a])\{u\} \quad (45)$$

ضربی که در رابطه بالا مشاهده می‌شود، ضرب کرونیگر است که با علامت \otimes نمایش داده می‌شود. مثال زیر نحوه عملکرد این ضرب را نشان می‌دهد:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{21} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{21} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{11}b_{31} & a_{11}b_{32} & a_{12}b_{31} & a_{12}b_{32} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{21} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{21} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \\ a_{21}b_{31} & a_{21}b_{32} & a_{22}b_{31} & a_{22}b_{32} \end{bmatrix} \quad (46)$$

سپس معادله کوپل شده سازه-سیال با استفاده از قواعد ضرب کرونیگر به فرم زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned}
 ([I]_{m \times m} \otimes [D^x]_{n \times n})_{nm \times nm} \{u\}_{nm \times 1} & \quad (47) \\
 + 2\phi^2 ([B^y]_{m \times m} \otimes [B^x]_{n \times n})_{nm \times nm} \{u\}_{nm \times 1} & \\
 + \phi^4 ([D^y]_{m \times m} \otimes [I]_{n \times n})_{nm \times nm} \{u\}_{nm \times 1} & \\
 + P_u ([I]_{m \times m} \otimes [A^x]_{n \times n})_{nm \times nm} \{u\}_{nm \times 1} & \\
 = \lambda^4 ([I]_{m \times m} \otimes [I]_{n \times n})_{nm \times nm} \{u\}_{nm \times 1} &
 \end{aligned}$$

در رابطه ۴۷، $[I]_m \otimes [I]_n = [I]$ است. در ادامه رابطه ۴۷ با فاکتور گرفتن $\{u\}_{nm \times 1}$ به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$[[I]_{m \times m} \otimes [D^x]_{n \times n} + 2\phi^2 [B^y]_{m \times m} \otimes [B^x]_{n \times n} + \phi^4 [D^y]_{m \times m} \otimes [I]_{n \times n} + P_u [I]_{m \times m} \otimes [A^x]_{n \times n}]_{nm \times nm} \{u\}_{nm \times 1} = \lambda^4 \{u\}_{nm \times 1} \quad (48)$$

با مشاهده رابطه بالا مشخص می شود که مسئله مقدار ویژه تشکیل شده است. به این صورت که:

$$[Z]_{nm \times nm} \{u\}_{nm \times 1} = \lambda^4 \{u\}_{nm \times 1} \quad (49)$$

$$[Z]_{nm \times nm} = [I]_{m \times m} \otimes [D^x]_{n \times n} + 2\phi^2 [B^y]_{m \times m} \otimes [B^x]_{n \times n} + \phi^4 [D^y]_{m \times m} \otimes [I]_{n \times n} + P_u [I]_{m \times m} \otimes [A^x]_{n \times n} \quad (50)$$

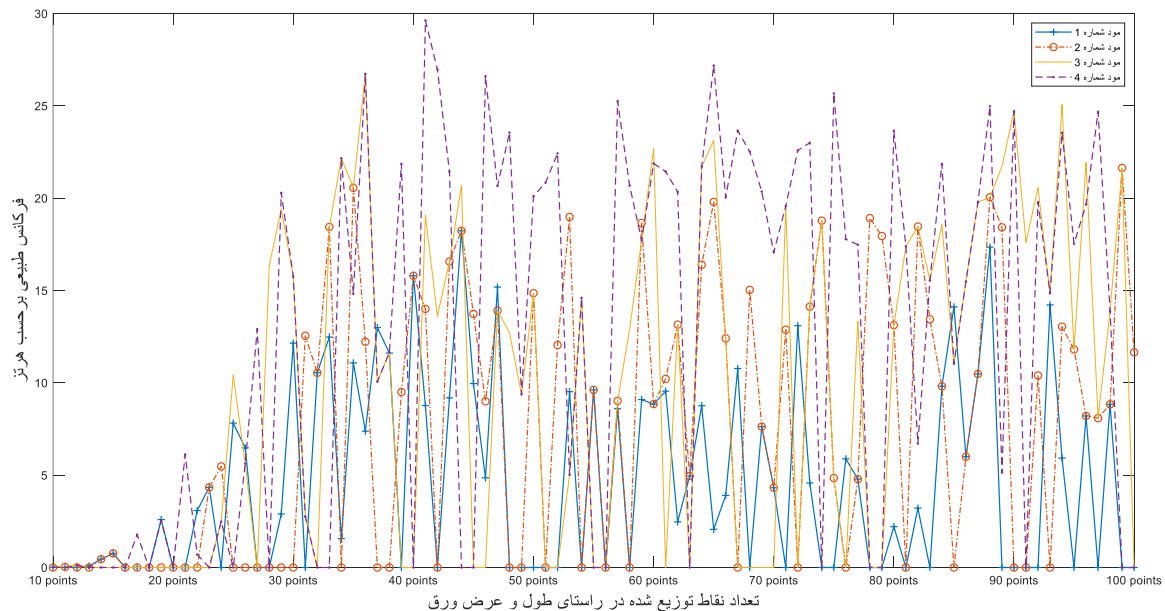
شرایط مرزی مسئله نیز مانند روش یاد شده به یک ماتریس شرایط مرزی تبدیل می شوند که برای حل نهایی مسئله، این ماتریس شرایط مرزی باید با معادله ۴۹ ادغام شود.

۳- نتایج

در این قسمت ابتدا صحت نتایج روش حل استفاده شده با منابع موجود بررسی می شود، سپس نتایج مورد نظر برای شرایط مرزی CFCF ارائه می شود.

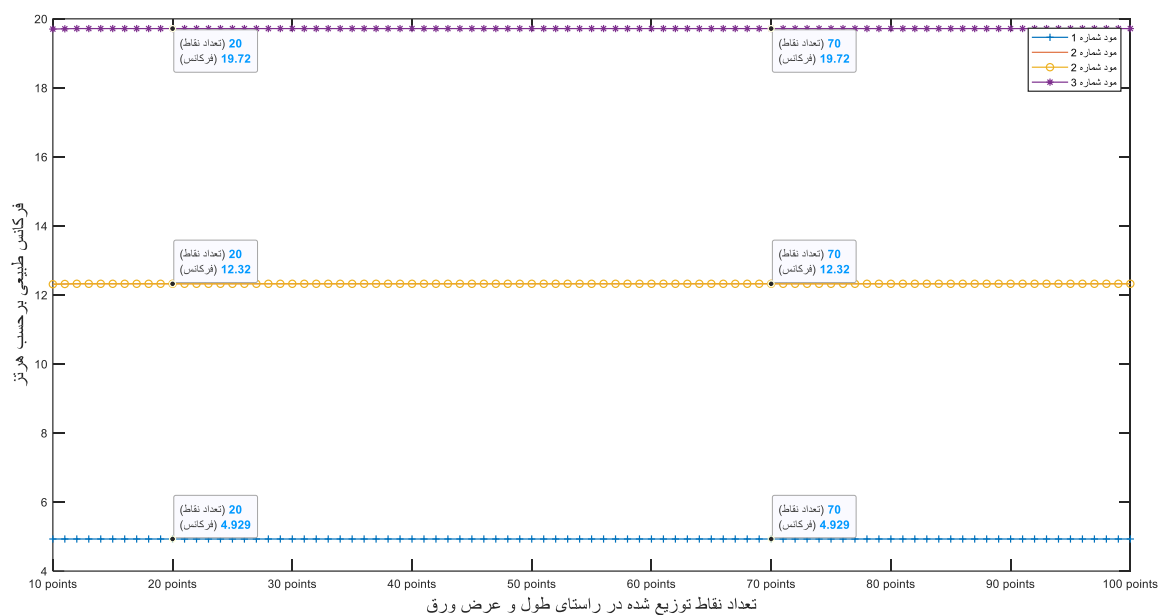
۳-۱- بررسی صحت نتایج

قبل از بررسی فرکانس های طبیعی ورق، باید به این نکته توجه کرد که انتخاب نقاط مرزی برای اعمال ماتریس شرایط مرزی، فقط شامل یک حالت نمی باشد. ابتدا حالت های مختلفی که می توان برای نقاط مرزی در ورق مستطیلی فرض کرد بیان می شود و سپس بهترین حالت انتخاب می گردد. حالت های مختلف برای انتخاب نقاط مرزی، مربوط به تعداد لایه هایی است که باید به این نقاط اختصاص داد. برای انتخاب تعداد لایه های مناسب از نقاط مرزی، ۲ حالت بررسی می شود. حالت اول: توزیع نقاط مرزی به صورت یک لایه. حالت دوم: توزیع نقاط مرزی به صورت دو لایه. در این بررسی، ۴ فرکانس طبیعی اول ورقی از جنس آلومینیوم با مدول یانگ 70 GPa، چگالی 2700 kg/m³ و ضریب پواسون 0.35 با طول و عرض 1 m، ضخامت 1 mm و شرایط مرزی SSSS¹⁰ در دو حالت توزیع نقاط مرزی برای تعداد نقاط ۱۰ الی ۱۰۰ نقطه در راستای x و y مورد بررسی قرار می گیرد.



شکل ۲ چهار فرکانس طبیعی اول ورق برای توزیع نقاط مرزی به صورت یک لایه

¹⁰ Simple-simple-simple-simple



شکل ۳ سه فرکانس طبیعی اول ورق برای توزیع نقاط مرزی به صورت دولاویه

از بین این دو حالت توزیع نقاط، تعداد دولاویه نقاط مرزی برای حل مسئله مناسب است. انتخاب درست این تعداد لایه نقاط مرزی را می‌توان در مقایسه فرکانس‌های به‌دست‌آمده از روش DQM با فرکانس‌های به‌دست‌آمده از روش تحلیلی ارائه شده در مرجع [۹] در قالب جدول زیر مشاهده کرد:

جدول ۱: مقایسه فرکانس‌های طبیعی بین روش تحلیلی و روش DQM برای شرایط مرزی SSSS

شماره فرکانس	فرکانس‌های ورق از حل تحلیلی	فرکانس‌های ورق از DQM در توزیع دولاویه	درصد اختلاف روش DQM نسبت به نتایج تحلیلی
فرکانس اول	۴.۹۲۹۲	۴.۹۲۹۵	۰.۰۰۶٪
فرکانس دوم	۱۲.۳۲۳۷	۱۲.۳۲۳۷	۰٪
فرکانس سوم	۱۹.۷۱۸۰	۱۹.۷۱۸۰	۰٪
فرکانس چهارم	۲۴.۶۴۷۵	۲۴.۶۴۷۵	۰٪

درصد اختلاف به‌دست‌آمده از جدول ۱، گویای این موضوع است که عملاً تفاوتی بین حل به روش DQM و حل تحلیلی وجود ندارد و این نشان‌دهنده دقت بالای روش DQM است. برای آنکه اطمینان حاصل شود که توزیع دولاویه نقاط مرزی برای دیگر شرایط مرزی نیز صادق است، نتایج حاصل از این روش با نتایج حاصل از نرم‌افزار آباکوس برای شرایط مرزی دیگر مقایسه می‌شود. این نتایج در قالب جدول زیر ارائه می‌شوند:

جدول ۲: مقایسه بین روش DQM و روش المان محدود در آباکوس برای شرایط مرزی مختلف

شرایط مرزی	شماره فرکانس	نتایج DQM با ۳۰ نقطه	نتایج Abaqus با ۳۰ نقطه	درصد اختلاف نسبت به DQM
SSSS	فرکانس اول	۴.۹۲۹۵	۴.۹۳۴	۰.۰۹٪
	فرکانس دوم	۱۲.۳۲۳۷	۱۲.۳۷۲	۰.۳۹٪
	فرکانس سوم	۱۹.۷۱۸۰	۱۹.۷۹۱	۰.۳۷٪
	فرکانس چهارم	۲۴.۶۴۷۵	۲۴.۹۰۷	۱.۰۵٪
	فرکانس اول	۸.۹۸۶۶	۹.۰۰۷۵	۰.۲۳٪

CCCC ¹¹	فرکانس دوم	۱۸.۳۲۸۷	۱۸.۴۵۳	۰.۶۷٪
	فرکانس سوم	۲۷.۰۲۵۱	۲۷.۱۸۹	۰.۶۰٪
	فرکانس چهارم	۳۲.۸۵۹۸	۳۳.۳۶۲	۱.۵۲٪
CCFF ¹²	فرکانس اول	۰.۹۷۱۱	۱.۶۹۹۸	۷۵٪
	فرکانس دوم	۵.۵۴۷۸	۵.۸۶۰۹	۵.۶۴٪
	فرکانس سوم	۶.۰۹۲۹	۶.۶۳۴۶	۸.۸۹٪
CCCF ¹³	فرکانس اول	۵.۹۲۳۲	۵.۹۴۹۳	۰.۴۴٪
	فرکانس دوم	۹.۹۲۱۶	۹.۹۴۱۰	۰.۱۹٪
	فرکانس سوم	۱۵.۶۹۶۲	۱۵.۸۵۰	۰.۹۷٪
CFFF ¹⁴	فرکانس اول	۰.۵۱۸۷	شناسایی نشد	نامشخص
	فرکانس دوم	۰.۸۱۵۹	۰.۸۶۳۴۵	۵.۸۲٪
	فرکانس سوم	شناسایی نشد	۲.۰۶۷۲	نامشخص
CFCF ¹⁵	فرکانس اول	۵.۵۰۵۵	۵.۵۳۲۳	۰.۴۸٪
	فرکانس دوم	۶.۴۹۸۶	۶.۵۲۵۲	۰.۴۰٪
	فرکانس سوم	۱۰.۷۶۷۶	۱۰.۷۸۲	۰.۱۳٪
	فرکانس چهارم	۱۵.۲۰۴۲	۱۵.۳۶۲	۱.۰۳٪

تمامی شرایط مرزی بررسی شده در جدول ۲ از دقت قابل قبولی برخوردار هستند. در بیشتر موارد، درصد اختلاف میان DQM و آباکوس زیر ۱ درصد است. فقط در دو شرایط مرزی CCFF و CFFF مقداری اختلاف نتیجه وجود دارد. با مشاهده جدول ۲ مشخص می شود که درصد اختلاف در شرایط CCFF و CFFF معمولاً بین ۵ تا ۹ درصد است (به غیر از فرکانس اول حالت CCFF که ۷۵ درصد اختلاف وجود دارد و از آنجایی فرکانس اول ورق محسوب می شود و مقدار آن نزدیک به صفر است، می توان از این اختلاف صرف نظر کرد). همچنین یک اختلاف در حالت CFFF وجود دارد و آن پیدا شدن یک فرکانس پایین تر از ۰.۸ هرتز در روش DQM و یک فرکانس بالاتر از ۰.۸ هرتز در نتایج آباکوس است که در روش های مقابل آن ها مشاهده نشده است. (از آنجایی که این فرکانس ها تقریباً نزدیک به صفر هستند، می توان از آن ها صرف نظر کرد).

۲-۳- نتایج بررسی فلاتر در شرایط مرزی CFCF

در این قسمت سرعت فلاتر در ورقی از جنس آلومینیوم با مدول یانگ 70 GPa، چگالی 2700 kg/m^3 و ضریب پواسون 0.35 با طول و عرض 1 m و ضخامت 5 mm در شرایط مرزی CFCF و شرایط جوی سطح آزاد دریا با چگالی جریان هوا 1.225 kg/m^3 و سرعت صوت 343 m/s بررسی می شود. این مشخصات هندسی، مکانیکی و جوی برای تعیین سرعت فلاتر از این جهت انتخاب شده است که ورق با این مشخصات در بازار به راحتی پیدا می شود و شرایط جوی سطح آزاد دریا برای انجام آزمایش سرعت فلاتر توسط سایر محققان می تواند به راحتی فراهم شود. قبل از بررسی سرعت فلاتر، ابتدا همگرایی ۵ فرکانس طبیعی اول ورق

¹¹ Clamp-clamp-clamp-clamp

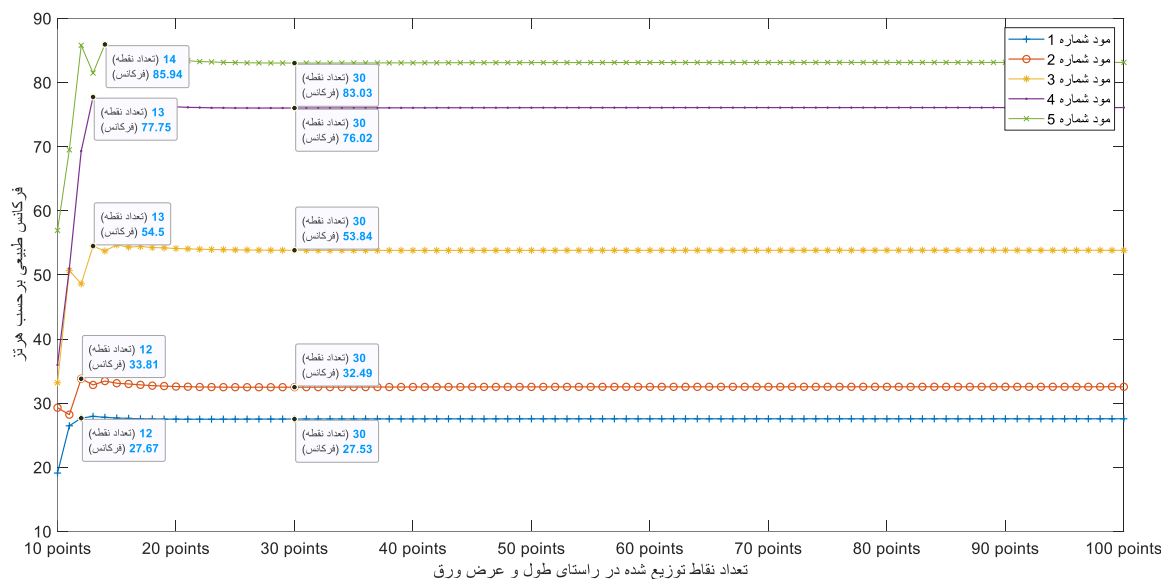
¹² Clamp-clamp-free-free

¹³ Clamp-clamp-clamp-free

¹⁴ Clamp-free-free-free

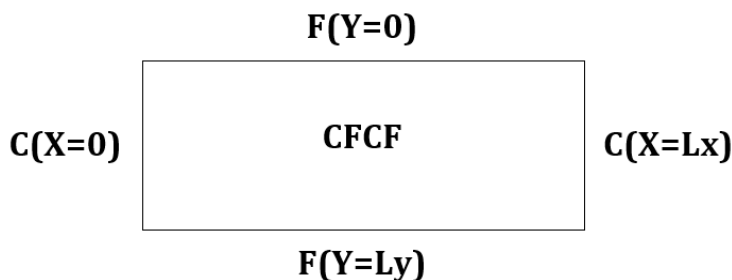
¹⁵ Clamp-free-Clamp-free

با شرایط هندسی و مکانیکی یاد شده به صورت زیر بررسی می شود:

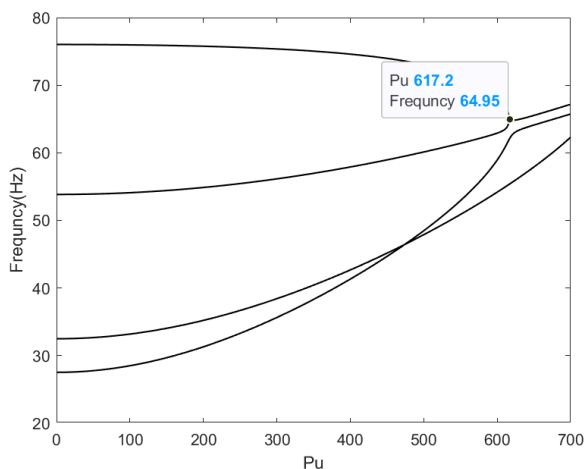


شکل ۴ پنج فرکانس طبیعی اول ورق برای توزیع نقاط مرزی به صورت دولایه

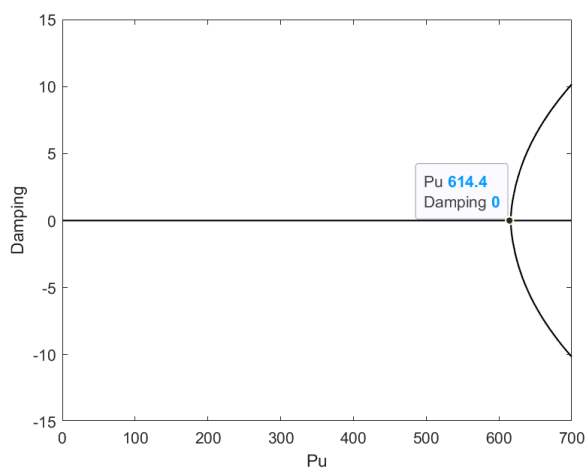
طبق نتایج نمودار شکل ۴، مقادیر به دست آمده برای ۵ فرکانس طبیعی اول ورقی با مشخصات یاد شده بعد از توزیع ۱۵ نقطه به بعد به یک عدد مشخص همگرا شده اند. در ادامه نتایج حاصل از بررسی این فرکانس های سازه ای در سرعت های مختلف جریان سیال بر روی ورق به صورت زیر استخراج می شود.



شکل ۵ نمایش شرایط مرزی CFCF روی لبه های ورق مستطیلی



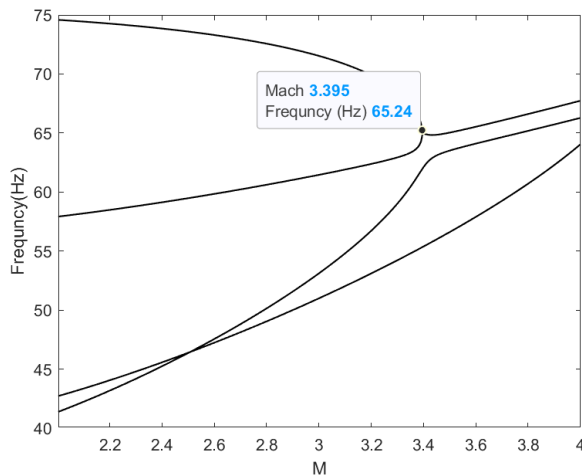
شکل ۷ نمودار فرکانس ۴ مود ورق بر حسب فشار دینامیکی بدون بعد در شرایط مرزی CFCF



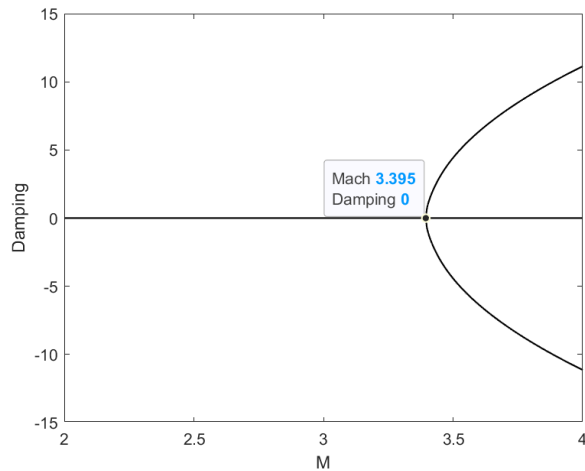
شکل ۶ نمودار میرایی ۴ مود اول ورق بر حسب فشار دینامیکی بدون بعد در شرایط مرزی CFCF

با مشاهده شکل ۷ این نتیجه حاصل می شود که اولین پدیده فلاتر به موجب کوپل شدن مود سوم و چهارم ورق در فرکانس

۶۴.۹۵ هرتز و فشار دینامیکی بدون بعد ۶۱۷ رخ داده است. صحت وقوع پدیده فلاتر در این کوپل شدگی فرکانسها با مشاهده نمودار شکل ۶ حاصل می شود. طبق این نمودار، میرایی سازه در ورق در فشار دینامیکی بدون بعد ۶۱۴.۴ که عددی نزدیک به ۶۱۷ است، ایجاد شده است. دو نمودار بالا برحسب عدد ماخ به صورت زیر رسم می شوند:



شکل ۹: نمودار فرکانس ۴ مود ورق برحسب عدد ماخ جریان هوا در شرایط مرزی CFCF



شکل ۸: نمودار میرایی ۴ مود اول ورق برحسب عدد ماخ جریان هوا در شرایط مرزی CFCF

طبق شکل ۸ و شکل ۹، اولین پدیده فلاتر در ۳.۳۹۵ ماخ اتفاق افتاده است. در این نمودار، اعداد ماخ کمتر از ۲ نمایش داده نشده است، زیرا نظریه پیستون برای ماخ کمتر از ۲ تعریف نشده است. طبق بررسی های انجام گرفته بر روی ورقی با مشخصات ذکر شده، اولین پدیده فلاتر در فشار دینامیکی بدون بعد ۶۰۱۷ که معادل ۳.۳۹۵ ماخ می باشد، اتفاق می افتد.

۳-۳- نتیجه گیری

با توجه به مطالعه انجام شده در این مقاله، می توان نتیجه گرفت که:

۱. استفاده از فرضیات ورق کیرشهف برای استخراج معادله حرکت ورق و استفاده از نظریه پیستون مرتبه اول به عنوان مدل آیرودینامیکی، دقت خوبی را به همراه دارد.
۲. استفاده از روش عددی DQM به صورت ماتریسی، مزایایی از قبیل دقت و سرعت بالا در حل مسئله فلاتر را فراهم می کند، به شرطی که تعداد لایه های مناسبی برای نقاط مرزی انتخاب شود. به طوری که با انتخاب دولایه از نقاط مرزی برای حل معادله، فرکانس های به دست آمده از کد متلب به روش DQM با حل تحلیلی ورقی در شرایط مرزی SSSS برابری می کند و خطای آن برای ۴ فرکانس اول تقریباً برابر صفر است.
۳. بر اساس بررسی ها، ورقی از جنس آلومینیوم با ابعاد طول و عرض ۱ متر و ضخامت ۵ میلی متر، در شرایط سطح آزاد دریا و با شرایط مرزی CFCF، در فشار دینامیکی بدون بعد ۶۱۵ (معادل ۳.۳۹۵ ماخ)، با اولین پدیده فلاتر مواجه می شود.

از این نتایج می توان استنباط کرد که استفاده از فرضیات ورق کیرشهف، نظریه پیستون مرتبه اول و روش DQM به همراه ابعاد ورق آلومینیوم مشخص شده، برای بررسی پدیده فلاتر در شرایط مورد نظر، مناسب و دقیق است.

Authorship Contribution Statement

Dr. Mostafa
Nazemizadeh



Biography: Mostafa Nazemizadeh received his PhD in Mechanical Engineering from Amirkabir University of Technology, in 2016. His current research interests are robotics, nonlinear dynamics, optimal control, micro-to-nano system modeling and nonlinear vibration.

Contribution Statement: Conceptualization, Resources, Supervision, Methodology, Writing & editing.

Dr. Mohammad Mahdi
Mohammadi



Biography: Mohammad Mahdi Mohammadi received his PhD in Mechanical Engineering from Iran University of Science and Technology, in 2017. His current research interests are aero-elastic problems, sloshing and structural vibration analysis.

Contribution Statement: Conceptualization, Resources, Supervision, Project administration.

Mehran Samadi



Biography: Mehran Samadi is the student of M.Sc. in Mechanical Engineering at Malek Ashtar University of Technology. His current research topics are robotics, nonlinear dynamics, and vibration and flutter analysis.

Contribution Statement: Investigation, Formal analysis, Validation, Software, Visualization, Writing & editing.

۴- مراجع

- [1] Amirzadegan S, Dowell EH. Correlation of experimental and computational results for flutter of streamwise curved plate. *AIAA Journal*. 2019;57:3556-61.
- [2] Zhuang W, Yang C, Wu Z. Modal and aeroelastic analysis of trapezoidal corrugated-core sandwich panels in supersonic flow. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2019;157:267-81.
- [3] Baghaee M, Farrokhhabadi A, Jafari-Talookolaei R-A. Modeling, analysis, and control of MFC sandwiched laminate panel flutter with general layups and arbitrary boundary conditions. *Composite Structures*. 2019;223:110940.
- [4] Hussein OS, Mulani SB. Nonlinear aeroelastic stability analysis of in-plane functionally graded metal nanocomposite thin panels in supersonic flow. *Thin-Walled Structures*. 2019;139:398-411.
- [5] Farsadi T, Asadi D, Kurtaran H. Nonlinear flutter response of a composite plate applying curvilinear fiber paths. *Acta Mechanica*. 2020;231:715-31.
- [6] Amirzadegan S, Dowell EH. Nonlinear limit cycle oscillation and flutter analysis of clamped curved plates. *Journal of Aircraft*. 2020;57:368-76.
- [7] Amirzadegan S, Mousavi Safavi SM, Jafarzade A. Supersonic panel flutter analysis assuming effects of initial structural stresses. *Journal of The Institution of Engineers (India): Series C*. 2019;100:833-9.
- [8] Majidi MH, Azadi M, Fahham H. Effect of CNT reinforcements on the flutter boundaries of cantilever trapezoidal plates under yawed supersonic fluid flow. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*. 2022;50:630-50.

- [9] Huang K, Guo H, Qin Z, Cao S, Chen Y. Flutter analysis of laminated composite quadrilateral plates reinforced with graphene nanoplatelets using the element-free IMLS-Ritz method. *Aerospace Science and Technology*. 2020;103:105915.
- [10] Muc A. Transverse shear effects in supersonic flutter problems for composite multilayered rectangular plates– Benchmark for numerical analysis. *Composites Part C: Open Access*. 2020;1:100001.
- [11] Bahrami-Torabi H, Kerboua Y, Lakis AA. Finite element model to investigate the dynamic instability of rectangular plates subjected to supersonic airflow. *Journal of Fluids and Structures*. 2021;103:103267.
- [12] Ouyang X, Liu Y. Flutter of variable stiffness composite laminates in supersonic flow with temperature effects. *Journal of Composite Materials*. 2021;55:3253-66.
- [13] Guo H, Ouyang X, Żur KK, Wu X. Meshless numerical approach to flutter analysis of rotating pre-twisted nanocomposite blades subjected to supersonic airflow. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2021;132:1-11.
- [14] Khalafi V, Fazilati J. Panel flutter analysis of cracked functionally graded plates in yawed supersonic flow with thermal effects. *Applied Mathematical Modelling*. 2022;101:259-75.
- [15] Kouritem SA, Elshabasy MM. Tailoring the panel inertial and elastic forces for the flutter and stability characteristics enhancement using copper patches. *Composite Structures*. 2021;274:114311.
- [16] Baghdasaryan GY, Mikilyan MA, Vardanyan IA, Melikyan KV, Marzocca P. Thermoelastic non-linear flutter oscillations of rectangular plate. *Journal of Thermal Stresses*. 2021;44:731-54.
- [17] Farhadi S, Asadi K. Optimal placement of the sensors for Static Output Feedback of fluttering plates in the supersonic flow. *Mechanic of Advanced and Smart Materials*. 2022;2:73-93.
- [18] Rao SS. *Vibration of continuous systems*: John Wiley & Sons, 2019.