

The exact characteristic equation of frequency and mode shape for transverse vibrations of non-uniform and non-homogeneous Euler Bernoulli beam with general non-classical boundary conditions at both ends

Kamiar Hosseini-Hashemi ^{a*}, Roohollah Talebitooti ^b, Shahriar Hosseini-Hashemi ^c

^{a*} Faculty of Mechanical Engineering, Iran university of Science and Technology, Tehran, Postcode 16842-13114, Iran

^b Department of Mechanical Engineering, Faculty of Mechanical Engineering, Iran university of Science and Technology, Tehran, Postcode 16842-13114, Iran

^c Impact Research Laboratory, Faculty of Mechanical Engineering, Iran university of Science and Technology, Tehran, Postcode 16842-13114, Iran

Original Article

Use your device to scan and read the article online



Citation: Hosseini-Hashemi K, Talebitooti R, Hosseini-Hashemi SH. The exact characteristic equation of frequency and mode shape for transverse vibrations of non-uniform and non-homogeneous Euler Bernoulli beam with general non-classical boundary conditions at both ends. *Mechanics of Advanced and Smart Materials*. 2023; 3(1): 1-20

 <https://10.52547/masm.3.1.1>

KEYWORDS

Non-uniform beam
Inhomogeneous beam
Free vibration
Exact solution

ABSTRACT

In this research, the frequency characteristic equation for some non-uniform and homogeneous beams based on Euler-Bernoulli beam theory is presented in closed analytical form. At both ends, the beam carries objects with deviations from the center, mass moment of inertia and linear and rotational elastic constraints. Therefore, the closed analytical characteristic equation has the ability to provide frequency parameters for a wide range of non-classical boundary conditions. Solving the governing differential equation and applying boundary conditions leads to the solution of an eigenvalue problem. Since the beam is non-uniform, the exact solution of the governing differential equation depends on finding a closed analytical solution for the beam deflection. Therefore, a limited type of non-uniform beams can be accurately solved. In order to verify the validity and accuracy of the presented relationships, the results of the method presented in this research have been compared with the existing results for uniform beams. Also, the mode shapes of the deflection are given for a beam sample.

Extended Abstract

1. Introduction

Beam-type structures have been widely used in practice in civil, mechanical, automotive, and aerospace engineering applications, such as in structural systems, automobile frames, and aircraft components. These structures are typically non-uniform and non-homogeneous beams. Hence, laminated composite beams and axially functionally graded beams due to their special characteristics, such as high stiffness and thermal resistance have been widely used in many fields of engineering such as in turbine blades, airplane wings and other mechanical structures. Many researches have been conducted to investigate the behavior of free vibrations of all types of beams in terms of type of material, type of boundary conditions, and type of cross section. The studies related to them can be classified into four groups: 1: homogeneous beams with classical boundary conditions, 2: homogeneous beams with non-classical boundary conditions, 3: functionally graded beams or inhomogeneous with classical boundary conditions, 4: functionally graded beams or inhomogeneous with non-classical boundary conditions. In the following, the literature of the subject will be reviewed according to the mentioned groups. The first group: Abrate [1] presented exact solutions to a new class of tapered rods and beams by showing that for some non-uniform rods and beams the equation of motion can be transformed into equation of motion for uniform rod or beam. Zhou and Cheung

* Corresponding author. Tel. 09201986859

E-mail address: kamiar_hosseini@mecheng.iust.ac.ir

DOI: <https://10.52547/masm.3.1.1>

Received: March 21, 2023; Received in revised form: April, 2023; Accepted: May 21, 2023.

©Author



[2] considered the transverse vibration of truncated taper beams with variable rectangular cross-section using the Rayleigh-Ritz method. More accurate solution to explore the free vibration characteristic of tapered Euler-Bernoulli beams have been presented by Lee and Lee [3] using Differential Transformation and Frobenius methods. Kim et al. [4] developed a state-vector equation method (SVEM)-based spectral element method (SEM) to study axial vibration of non-uniform rods, and transverse vibration of beams modeled according to both Euler-Bernoulli and Timoshenko theories. The second group: Lai et.al. [5] investigated the free vibration of non-uniform and homogeneous beam with non-classical boundary condition by using the Modified Adomian Decomposition Method. Using a power series expansion for the roots of the characteristic equation, the natural frequencies of a cantilevered Euler-Bernoulli beam with an end rigid mass are computed by Lajimi and Heppler [6]. Transverse vibration of free-free slender beams carrying two tip masses investigated by Shi et.al.[7]. An exact frequency equation is derived and the natural frequencies are calculated. Fernandes et.al.[8] studied the transverse vibrations of uniform Euler-Bernoulli beam with non-classical boundary conditions. Malaek and Moeenfard [9] studied large amplitude flexural-extensional free vibration of non-uniform vertical cantilever beam carrying an axially and transversely eccentric tip mass with rotary inertia. Celik [10] used Chebyshev Wavelet Collocation Method to consider vibration of non-uniform beams with various boundary conditions and with flexible end conditions. Ghannadiasl et al. [11] studied the elastically restrained non-uniform beam modeled based on the Euler-Bernoulli theory using a Laguerre collocation method. The third group: Huang and Li [12] presented a novel approach based on transforming the differential equation of motion for transverse vibration of non-uniform Euler-Bernoulli beams into a Freed Holm integral equation. Liu et al. [13] developed new simple models to study the free vibrations of axially FG tapered Euler-Bernoulli beams by using Spline Finite Point Method (SFPM). A simple and new model for free vibrational analysis of functionally graded beams by using Lagrange equation and modified Spectral Chebyshev method have been given by Zhao et al. [14]. Cao et al. [15] applied the asymptotic perturbation approach (APA) to obtain analytical expression for the free vibration analysis of non-uniform and non-homogenous beams with different boundary conditions. The free vibration analysis of FG non-uniform beam with an edge cracked investigated by Shabani and Cunedioglu [16]. They used the Timoshenko beam theory for the finite element analysis and modeled the cantilever beam by 50 layers of material. Sahu et al. [17] introduced a generalized finite element approach to investigate the free vibration of an axially FG non-uniform beam. Material inhomogeneity assumed to vary according to the power and exponential law. The Forth group: Hein and Feklistova [18] studied vibration of non-uniform and functionally graded Euler-Bernoulli beams using Haar wavelet method Using the Spectra-Geometric. Sari and Al-Dahidi [19] used the Chebyshev spectral collocation method to consider the free vibration behavior of FG non-uniform multiple beams. They assumed that the beams are joined by elastic translational springs, and the properties of the beams vary along the axial direction. Using the Spectra-Geometric Method Li et al. [20] studied the free vibration of FG arbitrarily non-uniform beam. They expanded the cross-section area and second moment of area of the beam into Fourier cosine series to consider any beam with variable cross section. A review on literature reveals that, despite of the many methods implemented to solve the vibrations of non-uniform and inhomogeneous beams by a large number of researchers, a little attention has been made to present the frequency characteristic equation and its resulted corresponding mode shape analytically. The aim of this article, is to present closed analytical form of the frequency characteristic equation to obtain the frequency parameters and the mode shape for a special class of non-uniform and inhomogeneous beams with general non-classical boundary conditions at both ends. In this regard, the related coefficients to solve eigenvalues and eigenvector for beams as follow are presented and tabulated. a: General boundary conditions at both end, b: General boundary conditions at one end and classical boundary conditions at the other end and c: Classical boundary conditions at both ends.

2. Theoretical formulation

As shown in Figure 1, Consider a non-uniform beam system subjected to distributed external force $p = p(x, t)$ with a non-concentrated end masses M_i and mass moment of inertias J_{oi} about the ends of the beam. The center of gravity of masse shown by G_i do not coincide with the points of attachment and are located at a distance e_i from the points of attachment. The beam is elastically supported with the translational and rotational spring stiffnesses K_{Ti} and K_{Ri} at both ends respectively. The axial coordinate of the beam, the cross-sectional area, modulus of elasticity, cross sectional moment of inertia, mass density, and length of the non-uniform beam are denoted by $x, A(x), E(x), I(x), \rho(x)$ and L , respectively. Using Hamilton's principle,

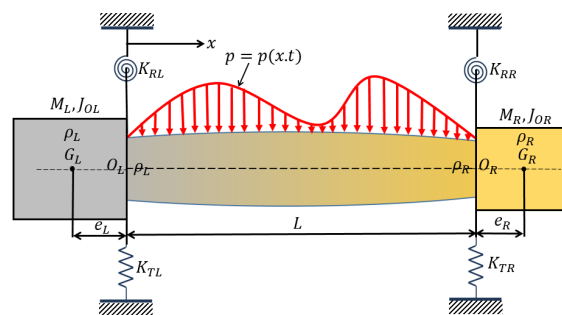


Figure 1. Schematic of non-uniform beam with elastically restrained ends and with off-set tip masses

Using Hamilton's principle, the governing differential equation of motion and the boundary condition according to the previous work of authors [21] may be written as:

$$\frac{d^2}{dX^2} \left(\mu(X) \frac{d^2 \hat{w}(X)}{dX^2} \right) - \beta^4 \eta(X) \hat{w}(X) - \frac{pL^3}{D(0)} = 0 \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \hat{w}(0)}{dX^2} + \hat{G}_{1L} \frac{d\hat{w}(0)}{dX} + \hat{G}_{2L} \hat{w}(0) &= 0, & \frac{d^3 \hat{w}(0)}{dX^3} + \hat{G}_{3L} \frac{d\hat{w}(0)}{dX} + \hat{G}_{4L} \hat{w}(0) &= 0, \\ \frac{d^3 \hat{w}(1)}{dX^3} + \hat{G}_{3R} \frac{d\hat{w}(1)}{dX} + \hat{G}_{4R} \hat{w}(1) &= 0, & \frac{d^3 \hat{w}(1)}{dX^3} + \hat{G}_{3R} \frac{d\hat{w}(1)}{dX} + \hat{G}_{4R} \hat{w}(1) &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

where

$$\mu(X) = \frac{D(X)}{D(0)}, \quad \eta(X) = \frac{m(X)}{m(0)}, \quad \beta^4 = \frac{\omega^2 L^4 m(0)}{D(0)} \tag{3}$$

Also

$$\begin{aligned} \hat{G}_{1L} &= \beta^4 \hat{J}_{OL} - \hat{K}_{RL}, & \hat{G}_{2L} &= -\beta^4 \hat{M}_L \hat{e}_L, & \hat{G}_{3L} &= \gamma_0 (\hat{K}_{RL} - \beta^4 \hat{J}_{OL}) + \hat{M}_L \hat{e}_L \beta^4, \\ \hat{G}_{4L} &= \beta^4 \hat{M}_L (\gamma_0 \hat{e}_L - 1) + \hat{K}_{TL}, & \hat{G}_{1R} &= \hat{K}_{RR} - \lambda \beta^4 \hat{J}_{OR}, & \hat{G}_{2R} &= -\lambda \beta^4 \hat{M}_R \hat{e}_R, \\ \hat{G}_{3R} &= \lambda \beta^4 (\gamma \hat{J}_{OR} + \hat{M}_R \hat{e}_R) - \gamma \hat{K}_{RR}, & \hat{G}_{4R} &= \lambda \beta^4 \hat{M}_R (\gamma \hat{e}_R + 1) - \hat{K}_{TR} \end{aligned} \tag{4}$$

In Eqs.3 $D(x) = E(x)I(x)$, $m(x) = \rho(x)A(x)$ and β are flexural rigidity, mass per unit length and frequency parameter. The dimensionless parameters in Eq.4 are also as follow:

$$\begin{aligned} \hat{M}_L &= \frac{M_L}{m(0)L}, & \hat{e}_L &= \frac{e_L}{L}, & \hat{J}_{OL} &= \frac{J_{OL}}{m(0)L^3}, & \hat{K}_{RL} &= \frac{LK_{RL}}{D(0)}, & \hat{K}_{TL} &= \frac{K_{TL}L^3}{D(0)}, & \gamma_0 &= \frac{D'(0)}{D(0)}, \\ \hat{M}_R &= \frac{M_R}{m(0)L}, & \hat{e}_R &= \frac{e_R}{L}, & \hat{J}_{OR} &= \frac{J_{OR}}{m(0)L^3}, & \hat{K}_{RR} &= \frac{LK_{RR}}{D(1)}, & \hat{K}_{TR} &= \frac{K_{TR}L^3}{D(1)}, & \gamma &= \frac{D'(1)}{D(1)}, & \lambda &= \frac{D(0)}{D(1)} \end{aligned} \tag{5}$$

Assuming now the height and breath of the beam as well its material properties to be given according to Eq.6

$$\begin{aligned} h(X) &= h_0(1 + \alpha X)^p, & b(X) &= b_0(1 + \alpha X)^q, \\ \rho(X) &= \rho_0(1 + \alpha X)^n, & E(X) &= E_0(1 + \alpha X)^r \end{aligned} \tag{6}$$

In this case, if

$$3p + q + r = n + p + q = 4 \tag{7}$$

Is selected, the solution of differential equation 1 can be presented in closed an analytical form according to Eq.8.

$$\hat{w}(X) = \frac{S_1 \sin \beta X + S_2 \cos \beta X + S_3 \sinh \beta X + S_4 \cosh \beta X}{(1 + \alpha X)^2} \tag{8}$$

By using Eq.7 and choosing any desired value for r and n, it is possible to define numerous beams with different dimensions and materials. In Table 1, the specifications of several examples of these beams are given.

Table 1. Geometrical and material characteristics of some examples of beams with accurate solution

Beam	$E(X)$	$\rho(X)$	$h(X)$	$b(X)$
1	$E_0(1 + \alpha X)$	$\rho_0(1 + \alpha X)^2$	$h_0(1 + \alpha X)^{1/2}$	$b_0(1 + \alpha X)^{3/2}$
2	$E_0(1 + \alpha X)^2$	$\rho_0(1 + \alpha X)$	$h_0(1 + \alpha X)^{-1/2}$	$b_0(1 + \alpha X)^{7/2}$
3	$E_0(1 + \alpha X)$	$\rho_0(1 + \alpha X)$	h_0	$b_0(1 + \alpha X)^3$
4	E_0	$\rho_0(1 + \alpha X)$	$h_0(1 + \alpha X)^{1/2}$	$b_0(1 + \alpha X)^{5/2}$
5	$E_0(1 + \alpha X)$	ρ_0	$h_0(1 + \alpha X)^{-1/2}$	$b_0(1 + \alpha X)^{9/2}$
6	E_0	ρ_0	h_0	$b_0(1 + \alpha X)^4$
7	$E_0(1 + \alpha X)^{-2}$	$\rho_0(1 + \alpha X)^2$	$h_0(1 + \alpha X)^2$	b_0
8	$E_0(1 + \alpha X)^{-4}$	ρ_0	$h_0(1 + \alpha X)^2$	$b_0(1 + \alpha X)^2$
9	E_0	$\rho_0(1 + \alpha X)^2$	$h_0(1 + \alpha X)$	$b_0(1 + \alpha X)$

3- Accurate frequency characteristic equation with general boundary conditions at both ends

By using Eq.8 and calculating its first to third order derivatives with respect to X and then substituting in Eqs.2 we have:

$$\beta(\hat{G}_{1L} - 4\alpha)S_1 + (\hat{G}_{2L} - \beta^2 - 2\hat{G}_{1L}\alpha + 6\alpha^2)S_2 + \beta(\hat{G}_{1L} - 4\alpha)S_3 + (\hat{G}_{2L} + \beta^2 - 2\hat{G}_{1L}\alpha + 6\alpha^2)S_4 = 0, \tag{9-a}$$

$$\begin{aligned} \beta(\hat{G}_{3L} + 18\alpha^2 - \beta^2)S_1 + (\hat{G}_{4L} + 6\alpha\beta^2 - 2\hat{G}_{3L}\alpha - 24\alpha^3)S_2 + \beta(\hat{G}_{3L} + 18\alpha^2 + \beta^2)S_3 \\ + (\hat{G}_{4L} - 6\alpha\beta^2 - 2\hat{G}_{3L}\alpha - 24\alpha^3)S_4 = 0, \end{aligned} \tag{9-b}$$

$$\begin{aligned}
 & [G(\hat{G}_{1R} - 4\alpha + \hat{G}_{1R}\alpha)\beta \cos \beta + (G^2\hat{G}_{2R} - 2G\hat{G}_{1R}\alpha + 6\alpha^2 - G^2\beta^2) \sin \beta]S_1 \\
 & + [(G^2\hat{G}_{2R} - 2G\hat{G}_{1R}\alpha + 6\alpha^2 - G^2\beta^2) \cos \beta - G(\hat{G}_{1R} - 4\alpha + \hat{G}_{1R}\alpha)\beta \sin \beta]S_2 \\
 & + [G(\hat{G}_{1R} - 4\alpha + \hat{G}_{1R}\alpha)\beta \cosh \beta + (G^2\hat{G}_{2R} - 2G\hat{G}_{1R}\alpha + 6\alpha^2 + G^2\beta^2) \sinh \beta]S_3 \\
 & + [(G^2\hat{G}_{2R} - 2G\hat{G}_{1R}\alpha + 6\alpha^2 + G^2\beta^2) \cosh \beta + G(\hat{G}_{1R} - 4\alpha + \hat{G}_{1R}\alpha)\beta \sinh \beta]S_4 = 0,
 \end{aligned} \tag{9-c}$$

$$\begin{aligned}
 & [(G^3\hat{G}_{4R} - 2\alpha G^2\hat{G}_{3R} + 6\alpha\beta^2G^2 - 24\alpha^3) \sin \beta + \beta G(G^2\hat{G}_{3R} - \beta^2G^2 + 18\alpha^2) \cos \beta]S_1 \\
 & + [(G^3\hat{G}_{4R} - 2\alpha G^2\hat{G}_{3R} + 6\alpha\beta^2G^2 - 24\alpha^3) \cos \beta - \beta G(G^2\hat{G}_{3R} - \beta^2G^2 + 18\alpha^2) \sin \beta]S_2 \\
 & + [(G^3\hat{G}_{4R} - 2\alpha G^2\hat{G}_{3R} - 6\alpha\beta^2G^2 - 24\alpha^3) \sinh \beta \\
 & + \beta G(G^2\hat{G}_{3R} + \beta^2G^2 + 18\alpha^2) \cosh \beta]S_3 \\
 & + [(G^3\hat{G}_{4R} - 2\alpha G^2\hat{G}_{3R} - 6\alpha\beta^2G^2 - 24\alpha^3) \cosh \beta \\
 & + \beta G(G^2\hat{G}_{3R} + \beta^2G^2 + 18\alpha^2) \sinh \beta]S_4 = 0
 \end{aligned} \tag{9-d}$$

where in Eqs. 9-c and 9-d, $G = 1 + \alpha$. Rewriting Eqs. 9-c to 9-d in matrix form leads to:

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{10}$$

where c_{ij} coefficients for the general boundary conditions at the left and right ends are given in Tables 2 and 3, respectively.

Table 2. c_{ij} coefficients for general boundary conditions at the left end

c_{ij}	$i=1, j=1, \dots, 4$	c_{ij}	$i=2, j=1, \dots, 4$
c_{11}	$\beta(\hat{G}_{1L} - 4\alpha)$	c_{21}	$\beta(\hat{G}_{3L} + 18\alpha^2 - \beta^2)$
c_{12}	$\hat{G}_{2L} - \beta^2 - 2\hat{G}_{1L}\alpha + 6\alpha^2$	c_{22}	$\hat{G}_{4L} + 6\alpha\beta^2 - 2\hat{G}_{3L}\alpha - 24\alpha^3$
c_{13}	$\beta(\hat{G}_{1L} - 4\alpha)$	c_{23}	$\beta(\hat{G}_{3L} + 18\alpha^2 + \beta^2)$
c_{14}	$\hat{G}_{2L} + \beta^2 - 2\hat{G}_{1L}\alpha + 6\alpha^2$	c_{24}	$\hat{G}_{4L} - 6\alpha\beta^2 - 2\hat{G}_{3L}\alpha - 24\alpha^3$

Table 3. c_{ij} coefficients for general boundary conditions at the right end

c_{ij}	$i=3, j=1, \dots, 4$	c_{ij}	$i=4, j=1, \dots, 4$
c_{31}	$(T_5 - G^2\beta^2) \sin \beta + T_6G\beta \cos \beta$	c_{41}	$(T_7 + 6\alpha G^2\beta^2) \sin \beta + G\beta(T_8 - G^2\beta^2) \cos \beta$
c_{32}	$(T_5 - G^2\beta^2) \cos \beta - T_6G\beta \sin \beta$	c_{42}	$(T_7 + 6\alpha G^2\beta^2) \cos \beta - G\beta(T_8 - G^2\beta^2) \sin \beta$
c_{33}	$(T_5 + G^2\beta^2) \sinh \beta + T_6G\beta \cosh \beta$	c_{43}	$(T_7 - 6\alpha G^2\beta^2) \sinh \beta + G\beta(T_8 + G^2\beta^2) \cosh \beta$
c_{34}	$(T_5 + G^2\beta^2) \cosh \beta + T_6G\beta \sinh \beta$	c_{44}	$(T_7 - 6\alpha G^2\beta^2) \cosh \beta + G\beta(T_8 + G^2\beta^2) \sinh \beta$

$$\begin{aligned}
 T_5 &= G^2\hat{G}_{2R} - 2G\hat{G}_{1R}\alpha + 6\alpha^2, \\
 T_6 &= G\hat{G}_{1R} - 4\alpha, \\
 T_7 &= G^3\hat{G}_{4R} - 2\alpha G^2\hat{G}_{3R} - 24\alpha^3, \\
 T_8 &= G^2\hat{G}_{3R} + 18\alpha^2
 \end{aligned} \tag{11}$$

To seek a non-trivial solution for c_{ij} ($i = 1 - 4$), and ($j = 1 - 4$), the determinant of coefficient matrix in Eq. (10) should vanish. Hence it can be written

$$c_{11}R_1 + c_{12}R_2 + c_{13}R_3 + c_{14}R_4 = 0 \tag{12}$$

where

$$R_1 = -c_{24}c_{33}c_{42} + c_{23}c_{34}c_{42} + c_{24}c_{32}c_{43} - c_{22}c_{34}c_{43} - c_{23}c_{32}c_{44} + c_{22}c_{33}c_{44}, \tag{13-a}$$

$$R_2 = c_{24}c_{33}c_{41} - c_{23}c_{34}c_{41} - c_{24}c_{31}c_{43} + c_{21}c_{34}c_{43} + c_{23}c_{31}c_{44} - c_{21}c_{33}c_{44}, \tag{13-b}$$

$$R_3 = -c_{24}c_{32}c_{41} + c_{22}c_{34}c_{41} + c_{24}c_{31}c_{42} - c_{21}c_{34}c_{42} - c_{22}c_{31}c_{44} + c_{21}c_{32}c_{44}, \tag{13-c}$$

and

$$R_4 = c_{23}c_{32}c_{41} - c_{22}c_{33}c_{41} - c_{23}c_{31}c_{42} + c_{21}c_{33}c_{42} + c_{22}c_{31}c_{43} - c_{21}c_{32}c_{43} \tag{13-d}$$

Using matrix equation 10 and determining the coefficients of S_2, S_3 and S_4 in terms of S_1 . As a result Eq.8 may be expressed as:

$$\hat{w}(X) = \frac{S_1}{R_1(1 + \alpha X)^2} (R_1 \sin \beta X + R_2 \cos \beta X + R_3 \sinh \beta X + R_4 \cosh \beta X) \tag{14}$$

4- Validation

Validation of results may be examined by substituting $\alpha=0$ in related tables for uniform beam with classical boundary conditions at both ends. Thus, we get:

$$1 - \cos \beta \cosh \beta = 0, \tag{15}$$

$$\begin{aligned} &\text{Clamped-Simply} \\ &\cosh \beta \sin \beta - \cos \beta \sinh \beta = 0, \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} &\text{Clamped-Guided} \\ &\cosh \beta \sin \beta + \cos \beta \sinh \beta = 0, \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} &\text{Clamped-Free} \\ &\cosh \beta \cos \beta + 1 = 0, \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} &\text{Simply-Simply} \\ &\sin \beta \sinh \beta = 0, \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned} &\text{Simply-Guided} \\ &\cosh \beta \cos \beta = 0, \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} &\text{Simply-Free} \\ &\cos \beta \sinh \beta - \cosh \beta \sin \beta = 0, \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} &\text{Guided-Guided} \\ &\sin \beta \sinh \beta = 0, \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned} &\text{Guided-Free} \\ &\cosh \beta \sin \beta + \cos \beta \sinh \beta = 0, \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned} &\text{Free-Free} \\ &1 - \cos \beta \cosh \beta = 0 \end{aligned} \tag{24}$$

These equations are closed analytical form of frequency characteristic equation for uniform beam with classical boundary conditions, which are given in many text books such as [21]. Therefore, the accuracy of the results is confirmed in this way.

5. Conclusion

1- Solution of the differential equation governing the transverse vibrations of non-uniform and inhomogeneous Euler-Bernoulli beams for a class of beams whose dimensions and material properties follows equation (6), was presented in closed analytical form.

2- Since the general non-classical boundary conditions, including objects with mass moment of inertia, eccentricity and elastically constraints at both ends have been considered. Therefore, it is possible to study the transverse vibration of beams with various boundary conditions.

3- In order to solve the related eigenvalue and eigenvector problems, coefficients of c_{ij} for beams with a: General boundary conditions at both end, b: General boundary conditions at one end and classical boundary conditions at the other end and c: Classical boundary conditions at both ends have been given.

4- The exact frequency characteristic equations of non-uniform beams, which are distinguished from each other according to the choice of the dimensionless parameter α , have been presented in closed analytical form for some classical boundary conditions at the end of the beam. These equations for the uniform beam are converted into known equations by substituting the zero value for α , which are used to validate the results.



معادله مشخصه دقیق فرکانسی و شکل مودها برای ارتعاشات عرضی تیر اویلر برنولی غیر یکنواخت و غیر همگن با شرایط مرزی غیر کلاسیک کلی در دو انتها

کامیار حسینی هاشمی الف*، روح‌الله طالبی توتی ب، شهریار حسینی هاشمی ج

الف* کارشناسی، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران، kamiar_hosseini@mecheng.iust.ac.ir

ب دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران، rtalebi@iust.ac.ir

ج کارشناسی ارشد، آزمایشگاه مکانیک ضربه، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران،

hosseinihashemi1373@gmail.com

واژگان کلیدی	چکیده
تیر غیر یکنواخت، تیرنا همگن، ارتعاش آزاد، حل دقیق.	در این پژوهش، معادله مشخصه فرکانسی برای برخی از تیرهای غیریکنواخت و همگن بر اساس تئوری تیر اویلر-برنولی به صورت تحلیلی بسته ارائه شده است. تیر در دو انتها حامل اجرام با خروج از مرکزیت، ممان اینرسی جرمی و قیود الاستیکی خطی و چرخشی است. از این رو معادله مشخصه تحلیلی بسته قابلیت ارائه پارامترهای فرکانسی را برای طیف وسیعی از شرایط مرزی غیر کلاسیک، را داراست. حل معادله دیفرانسیل حاکم و به کارگیری شرایط مرزی منجر به حل یک مسئله مقدار ویژه می‌گردد. از آنجایی که تیر غیریکنواخت است حل دقیق معادله دیفرانسیل حاکم منوط به یافتن حل تحلیلی بسته برای خیز تیر می‌باشد. لذا نوع محدودی از تیرهای غیریکنواخت قابلیت حل دقیق را دارا هستند. به منظور صحت سنجی و دقت روابط ارائه شده، نتایج حاصل از روش ارائه شده در این پژوهش با نتایج موجود برای تیرهای یکنواخت مقایسه شده است. همچنین شکل مودهای خیز نیز برای یک نمونه تیر آورده شده‌اند.
تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۰۱/۰۱	
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۲/۰۱/۱۵	
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۲/۳۱	

۱- مقدمه

تیرها عملاً به‌طور گسترده در مهندسی عمران، مکانیک، خودرو و هوافضا از جمله در سیستم‌های سازه‌ای، قاب خودرو و اجزای هواپیما مورد استفاده قرار می‌گیرند. این ساختارها معمولاً تیرهای غیریکنواخت و غیر همگن هستند. از این رو استفاده از تیرهای کامپوزیت چندلایه و تیرهای مدرج تابعی محوری در ابعاد وسیعی در بسیاری از زمینه‌های مهندسی مانند پره‌های توربین، باله‌های هواپیما و سایر سازه‌های مکانیکی به دلیل ویژگی‌های خاص خود مانند سفتی بالا و مقاومت حرارتی مورد توجه قرار گرفته است. پژوهش‌های فراوانی برای بررسی رفتار ارتعاشات آزاد انواع تیرها از لحاظ نوع جنس، نوع شرایط مرزی و نوع سطح مقطع انجام گرفته است. مطالعات مربوط به آن‌ها را می‌توان در چهار گروه طبقه‌بندی کرد: ۱: تیرهای هموزن با شرایط مرزی کلاسیک، ۲: تیرهای هموزن با شرایط مرزی غیر کلاسیک، ۳: تیرهای مدرج تابعی یا ناهمگن با شرایط مرزی کلاسیک، ۴: تیرهای مدرج تابعی یا ناهمگن با شرایط مرزی غیر کلاسیک. در ادامه به بررسی ادبیات موضوع با توجه به گروه‌های مذکور پرداخته می‌شود. گروه اول: ابرت [۱] با نشان دادن این که برای برخی از میله‌ها و تیرهای غیریکنواخت، معادله حرکت را می‌توان به معادله حرکت یک میله یا تیر یکنواخت تبدیل کرد، راه‌حل‌های دقیقی را برای کلاس جدیدی از میله‌ها و تیرها ارائه داده است. ژو و چونگ [۲]

ارتعاشات عرضی تیرهای مخروطی ناقص با سطح مقطع متغیر مستطیلی شکل را با استفاده از روش انرژی رایلی- ریتز^۱ و به‌کارگیری توابع استاتیکی به‌عنوان توابع قابل‌قبول در روش رایلی- ریتز مورد مطالعه قرار داده‌اند. لی و لی [۳] با استفاده از روش‌های تبدیل دیفرانسیل و انتگرال فروبینیوس^۲ راه‌حل دقیقی در ارتباط با تحلیل ارتعاشات آزاد تیرهای مخروطی اویلر-برنولی ارائه کرده‌اند. آن‌ها جداول فرکانسی برای بعضی از مثال‌های مرتبط را بر اساس استفاده از تئوری تیر اویلر-برنولی و تئوری تیر تیموشنکو ارائه داده و با نتایج مراجع موجود مقایسه کرده‌اند ارتعاشات طولی میله‌ها و عرضی تیرهای غیریکنواخت که با هر دو نظریه اویلر-برنولی و تیموشنکو مدل‌سازی شده‌اند نیز توسط کیم و همکاران [۴] با استفاده از روش معادله بردار حالت^۳ بررسی شده است. گروه دوم: لی و همکاران [۵] ارتعاشات آزاد تیر اویلر برنولی غیریکنواخت و همگن با شرایط مرزی کلی غیر کلاسیک را با استفاده از روش تجزیه اصلاح شده آدومیان^۴ مورد بررسی قرار داده‌اند. لاجمی و هیلر [۶] ارتعاش آزاد تیر اویلر-برنولی یک سر گیردار که حامل جرم در انتهای آزاد است را مورد مطالعه قرار داده‌اند. آن‌ها بعد از لحاظ کردن اثرات خروج از مرکزیت و ممان اینرسی جرم انتهایی در شرایط مرزی انتهای آزاد تیر، ریشه‌های معادله مشخصه را با استفاده از بسط سری‌های توانی محاسبه و فرکانس‌های طبیعی را تعیین نمودند. در پژوهش دیگری، شی و همکاران [۷] ارتعاشات عرضی تیر اویلر-برنولی با شرایط تکیه‌گاهی آزاد-آزاد را که حامل اجرام متمرکز غیرمساوی انتهایی است را مورد بررسی قرار داده‌اند. در این پژوهش معادله دقیق فرکانسی استنتاج و ریشه‌های آن محاسبه شده‌اند هم‌چنین جهت ارائه روابط ساده تقریبی برای فرکانس‌های اصلی تیر از معادله انتگرالی فرد هلم استفاده نموده‌اند. فرناندس و همکاران [۸] ارتعاشات عرضی تیر اویلر برنولی با شرایط مرزی غیر کلاسیک را مورد مطالعه قرار داده‌اند. بدین منظور با به‌کارگیری حل معادله دیفرانسیل حاکم و اعمال شرایط مرزی در دو انتهای تیر معادلات مشخصه فرکانسی و شکل مودهای وابسته را به‌صورت با بعد ارائه کرده‌اند. مالک و معین فرد [۹] ارتعاش آزاد خمشی- کششی دامنه بزرگ را برای یک تیر یکسر گیردار عمودی غیریکنواخت حامل جرم با خروج از مرکزیت و اینرسی چرخشی در انتهای آزاد بررسی کرده‌اند ارتعاش تیرهای غیریکنواخت با شرایط مرزی مختلف و انتهایی انعطاف‌پذیر با استفاده از روش هماهنگی موجک چیشیف^۵ توسط سلیک [۱۰] مورد مطالعه قرار گرفته است. نتایجی که در این تحقیق توسط وی گزارش شده است شامل جداول فرکانسی برای بعضی از مثال‌های مورد بررسی است که درستی آن‌ها از طریق مقایسه با نتایج موجود در مراجع مختلف صحت‌گذاری شده است. ارتعاش آزاد تیرها با سطح مقطع غیریکنواخت و مستقر بر بستر ثابت و خطی وینکلر بر اساس تئوری تیر اویلر-برنولی و با استفاده از روش لاگر کالوکشن^۶ توسط قنادی اصل و همکاران [۱۱] مورد رسیدگی قرار گرفته است. گروه سوم: هوآنگ و لی [۱۲] رویکرد جدیدی را مبتنی بر تبدیل معادله دیفرانسیل حرکت ارتعاش عرضی تیرهای اویلر-برنولی با سطح مقطع غیریکنواخت به معادله انتگرالی فرد هلم^۷ ارائه کرده‌اند. لیو و همکاران [۱۳] مدل‌های ساده جدیدی برای مطالعه ارتعاشات آزاد تیرهای مخروطی مدرج تابعی اویلر-برنولی با استفاده از روش اسپلاین نقطه‌ای محدود^۸ ایجاد کرده‌اند. یک روش ساده و جدید برای مدل‌سازی و تحلیل ارتعاشات آزاد تیرهای مدرج تابعی محوری با تقریب جابجایی‌ها از طریق بسط چیشیف مرتبه بالا و هم‌چنین گسسته‌سازی معادلات دیفرانسیل حاکم با به‌کارگیری معادله لاگرانژ و روش طیفی چیشیف اصلاح شده^۹ توسط ژو و همکاران [۱۴] ارائه شده است. کا او و همکاران [۱۵] جهت ارائه یک رابطه تحلیلی برای بررسی ارتعاش آزاد تیرهای غیریکنواخت و غیر همگن با شرایط مرزی مختلف از روش آشفتگی مجانبی^{۱۰} استفاده کرده‌اند. ارتعاش آزاد یک تیر متقارن غیریکنواخت و مدرج تابعی محوری با لبه ترک‌دار به‌وسیله شعبانی و کندیوقلو [۱۶] مورد مطالعه قرار گرفته است. آن‌ها جهت تحلیل المان محدود تیر ساندویچی چندلایه از تئوری تیر تیموشنکو استفاده کرده و یک تیر یک سر گیردار را توسط ۵۰ لایه ماده مدل‌سازی کرده‌اند. دو نوع تیر غیریکنواخت با ارتفاع ثابت و پهنای متغیر نمایی و خطی در طول تیر مورد بررسی قرار گرفته است. یک رویکرد المان محدود تعمیم یافته، برای تجزیه و تحلیل ارتعاش آزاد یک تیر مدرج تابعی محوری با ارتفاع متغیر تابع نمایی و پهنای ثابت توسط ساهو و همکاران [۱۷] ارائه شده است. در این رویکرد آن‌ها المان تیر غیریکنواخت را دو گره‌ای و با دو درجه آزادی در هر گره در نظر گرفته و با مونتاژ این المان‌ها مدل اجزای محدود را به یک مدل تعمیم یافته تبدیل

¹ Rayleigh -Ritz Method

² Frobenius Integral

³ State Vector Equation Method

⁴ Modified Adomian Decomposition Method

⁵ Chebyshev Wavelet Collocation Method

⁶ Laguerre Collocation Method

⁷ Fredholm Integral Equation

⁸ Spline Finite Point Method

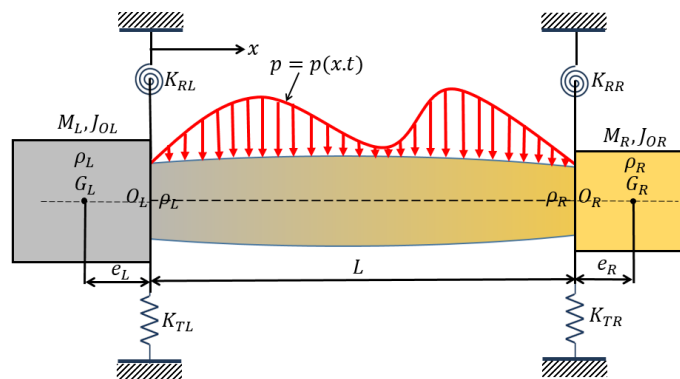
⁹ Chebyshev spectral collocation Method

¹⁰ Asymptotic perturbation Method

کرده‌اند. گروه چهارم: هین و فکلیس تو [۱۸] ارتعاش تیرهای غیر یکنواخت و مدرج تابعی با شرایط مرزی مختلف و سطوح مقطع متغیر را بر اساس تئوری تیر اویلر-برنولی و روش موجک ها^۱ مورد بررسی قرار داده‌اند. در این بررسی فرض شده است که ویژگی‌های سطح مقطع و ماده در جهت محوری متغیرند. ساری و الداهیدی [۱۹] بر اساس نظریه تیر اویلر-برنولی، رفتار ارتعاشی تیرهای چندگانه غیر یکنواخت و مدرج تابعی محوری را که به وسیله فنرهای انتقالی الاستیک به هم متصل شده‌اند مورد رسیدگی قرار داده‌اند در این مطالعه جهت تبدیل معادلات دیفرانسیل حاکم به سیستم معادلات جبری و حل پارامترهای فرکانسی بدون بعد از روش تجمیع طیفی چبیشف^۲ استفاده شده است. لی و همکاران [۲۰] ارتعاشات آزاد تیر تیموشنکو مدرج تابعی محوری با مقطع متغیر دلخواه را بر اساس روش موسوم به طیف هندسی^۳ بررسی کرده‌اند. آن‌ها سطح مقطع، ممان اینرسی، مدول الاستیسیته، جرم مخصوص و مدول برشی را با استفاده از بسط کسینوس فوریه ارائه کرده و با به کارگیری اصل هامیلتون مقادیر ویژه و ضرایب سری فوریه را به دست آورده‌اند. در این پژوهش ارتعاشات آزاد تیرهای غیر یکنواخت و مدرج تابعی با شرایط مرزی غیر کلاسیک کلی شامل اجرام با ممان اینرسی جرمی، خروج از مرکزیت و قیود انعطاف پذیر انتقالی و چرخشی مورد رسیدگی قرار گرفته است. مرور مطالعاتی بر ادبیات موضوع نشانگر این مطلب است که برخلاف روش‌های متعدد به کار گرفته شده جهت بررسی ارتعاشات تیرهای غیر یکنواخت و غیر همگن به وسیله شمار زیادی از محققین، کوشش کمی در جهت ارائه شکل تحلیلی بسته معادله مشخصه فرکانسی و شکل مودها صورت پذیرفته است. در این مقاله هدف ارائه شکل تحلیلی بسته معادله مشخصه فرکانسی جهت استنتاج پارامترهای فرکانسی و شکل مودهای ارتعاشی برای کلاس خاصی از تیرهای غیر یکنواخت و غیر همگن با شرایط مرزی غیر کلاسیک کلی در دو انتهای تیر است. در این راستا روابط مربوط به تیر با شرایط مرزی کلی در دو انتها، تیر با شرایط مرزی کلاسیک در یک انتها و شرایط مرزی دیگر و تیر با شرایط مرزی کلاسیک در دو انتها استنتاج و طی جداولی ارائه شده‌اند.

۲- معادله دیفرانسیل حرکت و شرایط مرزی

تیر غیر یکنواخت با شرایط مرزی غیر کلاسیک مطابق شکل ۱ را در نظر می‌گیریم که در آن K_{Ri} ثابت فنرهای چرخشی، K_{Ti} ثابت فنرهای خطی، M_i اجرام انتهایی، J_{oi} ممان اینرسی جرمی اجرام انتهایی حول نقاط O_i ، e_i خروج از مرکزیت اجرام انتهایی، G_i مراکز جرم اجرام انتهایی، و L طول تیر هستند.



شکل ۱ مدل تیر غیر یکنواخت با شرایط مرزی متشکل از اجرام، فنرهای خطی و چرخشی در دو انتها

برای این تیر با استفاده از اصل هامیلتون و بر اساس تئوری تیر اویلر-برنولی اشکال بی بعد معادله دینامیکی حرکت و شرایط مرزی با اشاره به کار قبلی نویسندگان [۲۱] به صورت معادلات

$$\frac{d^2}{dX^2} \left(\mu(X) \frac{d^2 \hat{w}(X)}{dX^2} \right) - \beta^4 \eta(X) \hat{w}(X) = 0 \quad (1)$$

¹ Haar Wavelet Method

² Chebyshev spectral collocation method

³ Spectra-Geometric Method

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \hat{w}(0)}{dX^2} + \hat{G}_{1L} \frac{d\hat{w}(0)}{dX} + \hat{G}_{2L} \hat{w}(0) &= 0, & \frac{d^3 \hat{w}(0)}{dX^3} + \hat{G}_{3L} \frac{d\hat{w}(0)}{dX} + \hat{G}_{4L} \hat{w}(0) &= 0, \\ \frac{d^3 \hat{w}(1)}{dX^3} + \hat{G}_{3R} \frac{d\hat{w}(1)}{dX} + \hat{G}_{4R} \hat{w}(1) &= 0, & \frac{d^3 \hat{w}(1)}{dX^3} + \hat{G}_{3R} \frac{d\hat{w}(1)}{dX} + \hat{G}_{4R} \hat{w}(1) &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

داده می‌شوند. که در آنها

$$\mu(X) = \frac{D(X)}{D(0)}, \quad \eta(X) = \frac{m(X)}{m(0)}, \quad \beta^4 = \frac{\omega^2 L^4 m(0)}{D(0)} \quad (3)$$

و همچنین

$$\begin{aligned} \hat{G}_{1L} &= \beta^4 \hat{J}_{OL} - \hat{K}_{RL}, & \hat{G}_{2L} &= \beta^4 \hat{M}_L \hat{e}_L, \\ \hat{G}_{3L} &= \gamma_0 (\hat{K}_{RL} - \beta^4 \hat{J}_{OL}) + \hat{M}_L \hat{e}_L \beta^4, & \hat{G}_{4L} &= \beta^4 \hat{M}_L (\gamma_0 \hat{e}_L - 1) + \hat{K}_{TL}, & \hat{G}_{1R} &= \hat{K}_{RR} - \lambda \beta^4 \hat{J}_{OR}, \\ \hat{G}_{2R} &= -\lambda \beta^4 \hat{M}_R \hat{e}_R, & \hat{G}_{3R} &= \lambda \beta^4 (\gamma \hat{J}_{OR} + \hat{M}_R \hat{e}_R) - \gamma \hat{K}_{RR}, & \hat{G}_{4R} &= \lambda \beta^4 \hat{M}_R (\gamma \hat{e}_R + 1) - \hat{K}_{TR} \end{aligned} \quad (4)$$

است. در معادلات ۳، $D(x) = E(x)I(x)$ صلبیت خمشی، $m(x) = \rho(x)A(x)$ جرم بر واحد طول تیر و β پارامتر بی‌بعد فرکانسی می‌باشد. پارامترهای بی‌بعد در معادلات ۴ نیز عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned} \hat{M}_L &= \frac{M_L}{m(0)L}, & \hat{e}_L &= \frac{e_L}{L}, & \hat{J}_{OL} &= \frac{J_{OL}}{m(0)L^3}, & \hat{K}_{RL} &= \frac{LK_{RL}}{D(0)}, & \hat{K}_{TL} &= \frac{K_{TL}L^3}{D(0)}, & \gamma_0 &= \frac{D'(0)}{D(0)}, \\ \hat{M}_R &= \frac{M_R}{m(0)L}, & \hat{e}_R &= \frac{e_R}{L}, & \hat{J}_{OR} &= \frac{J_{OR}}{m(0)L^3}, & \hat{K}_{RR} &= \frac{LK_{RR}}{D(1)}, & \hat{K}_{TR} &= \frac{K_{TR}L^3}{D(1)}, & \gamma &= \frac{D'(1)}{D(1)}, & \lambda &= \frac{D(0)}{D(1)} \end{aligned} \quad (5)$$

حال فرض کنیم ابعاد و ماده تشکیل‌دهنده تیر به صورت:

$$\begin{aligned} h(X) &= h_0(1 + \alpha X)^p, & b(X) &= b_0(1 + \alpha X)^q, \\ \rho(X) &= \rho_0(1 + \alpha X)^n, & E(X) &= E_0(1 + \alpha X)^r \end{aligned} \quad (6)$$

باشند. در این صورت چنانچه

$$3p + q + r = n + p + q = 4 \quad (7)$$

اختیار گردد می‌توان جواب معادله دیفرانسیل ۱ را به صورت تحلیلی بسته مطابق معادله ۸ ارائه کرد. معادله ۸ اولین بار توسط مرجع [۱] برای بررسی ارتعاشات تیر همگن و غیریکنواخت با ارتفاع ثابت h_0 و پهنای متغیر $b(X) = b_0(1 + \alpha X)^4$ ارائه شده است. در مطالعه حاضر این معادله جهت ارائه شکل تحلیلی بسته معادله مشخصه فرکانسی و شکل مودهای ارتعاشی، برای تیرها با مشخصات هندسی و مادی مطابق معادله ۶ و شرایط مرزی کلی در دو انتها به کار گرفته شده است.

$$\hat{w}(X) = \frac{S_1 \sin \beta X + S_2 \cos \beta X + S_3 \sinh \beta X + S_4 \cosh \beta X}{(1 + \alpha X)^2} \quad (8)$$

با به کارگیری رابطه ۷ و انتخاب هر مقدار دلخواه برای r و n می‌توان تیرهای متعددی با ابعاد و جنس‌های مختلف را تعریف کرد. در جدول ۱ مشخصات چندین نمونه از این تیرها داده شده‌اند.

همان‌طور که در این جدول مشاهده می‌شود می‌توان برای نمونه‌های گوناگونی از تیرهای یکنواخت همگن، غیریکنواخت همگن و غیریکنواخت غیر همگن با استفاده از رابطه ۸ معادله مشخصه دقیق فرکانسی و شکل مودهای ارتعاشی را به شرح اشاره شده در بخش‌های بعدی تعیین کرد.

جدول ۱ مشخصات هندسی و جنسی نمونه‌هایی از تیرها با حل دقیق

نمونه	$E(X)$	$\rho(X)$	$h(X)$	$b(X)$
1	$E_0(1 + \alpha X)$	$\rho_0(1 + \alpha X)^2$	$h_0(1 + \alpha X)^{1/2}$	$b_0(1 + \alpha X)^{3/2}$
2	$E_0(1 + \alpha X)^2$	$\rho_0(1 + \alpha X)$	$h_0(1 + \alpha X)^{-1/2}$	$b_0(1 + \alpha X)^{7/2}$
3	$E_0(1 + \alpha X)$	$\rho_0(1 + \alpha X)$	h_0	$b_0(1 + \alpha X)^3$
4	E_0	$\rho_0(1 + \alpha X)$	$h_0(1 + \alpha X)^{1/2}$	$b_0(1 + \alpha X)^{5/2}$
5	$E_0(1 + \alpha X)$	ρ_0	$h_0(1 + \alpha X)^{-1/2}$	$b_0(1 + \alpha X)^{9/2}$
6	E_0	ρ_0	h_0	$b_0(1 + \alpha X)^4$
7	$E_0(1 + \alpha X)^{-2}$	$\rho_0(1 + \alpha X)^2$	$h_0(1 + \alpha X)^2$	b_0
8	$E_0(1 + \alpha X)^{-4}$	ρ_0	$h_0(1 + \alpha X)^2$	$b_0(1 + \alpha X)^2$
9	E_0	$\rho_0(1 + \alpha X)^2$	$h_0(1 + \alpha X)$	$b_0(1 + \alpha X)$

۳- معادله مشخصه دقیق فرکانسی با شرایط مرزی کلی در دو انتها

با به کار گیری معادله (۸) و محاسبه مشتقات مرتبه اول تا سوم آن و سپس جانشینی در معادلات (۲) داریم:

$$\beta(\hat{G}_{1L} - 4\alpha)S_1 + (\hat{G}_{2L} - \beta^2 - 2\hat{G}_{1L}\alpha + 6\alpha^2)S_2 + \beta(\hat{G}_{1L} - 4\alpha)S_3 + (\hat{G}_{2L} + \beta^2 - 2\hat{G}_{1L}\alpha + 6\alpha^2)S_4 = 0, \quad (9\text{-الف})$$

$$\beta(\hat{G}_{3L} + 18\alpha^2 - \beta^2)S_1 + (\hat{G}_{4L} + 6\alpha\beta^2 - 2\hat{G}_{3L}\alpha - 24\alpha^3)S_2 + \beta(\hat{G}_{3L} + 18\alpha^2 + \beta^2)S_3 + (\hat{G}_{4L} - 6\alpha\beta^2 - 2\hat{G}_{3L}\alpha - 24\alpha^3)S_4 = 0, \quad (9\text{-ب})$$

$$\begin{aligned} & [G(\hat{G}_{1R} - 4\alpha + \hat{G}_{1R}\alpha)\beta \cos \beta + (G^2\hat{G}_{2R} - 2G\hat{G}_{1R}\alpha + 6\alpha^2 - G^2\beta^2) \sin \beta]S_1 \\ & + [(G^2\hat{G}_{2R} - 2G\hat{G}_{1R}\alpha + 6\alpha^2 - G^2\beta^2) \cos \beta - G(\hat{G}_{1R} - 4\alpha + \hat{G}_{1R}\alpha)\beta \sin \beta]S_2 \\ & + [G(\hat{G}_{1R} - 4\alpha + \hat{G}_{1R}\alpha)\beta \cosh \beta + (G^2\hat{G}_{2R} - 2G\hat{G}_{1R}\alpha + 6\alpha^2 + G^2\beta^2) \sinh \beta]S_3 \\ & + [(G^2\hat{G}_{2R} - 2G\hat{G}_{1R}\alpha + 6\alpha^2 + G^2\beta^2) \cosh \beta + G(\hat{G}_{1R} - 4\alpha + \hat{G}_{1R}\alpha)\beta \sinh \beta]S_4 \\ & = 0, \quad (9\text{-ج}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & [(G^3\hat{G}_{4R} - 2\alpha G^2\hat{G}_{3R} + 6\alpha\beta^2 G^2 - 24\alpha^3) \sin \beta + \beta G(G^2\hat{G}_{3R} - \beta^2 G^2 + 18\alpha^2) \cos \beta]S_1 \\ & + [(G^3\hat{G}_{4R} - 2\alpha G^2\hat{G}_{3R} + 6\alpha\beta^2 G^2 - 24\alpha^3) \cos \beta \\ & - \beta G(G^2\hat{G}_{3R} - \beta^2 G^2 + 18\alpha^2) \sin \beta]S_2 \\ & + [(G^3\hat{G}_{4R} - 2\alpha G^2\hat{G}_{3R} - 6\alpha\beta^2 G^2 - 24\alpha^3) \sinh \beta \\ & + \beta G(G^2\hat{G}_{3R} + \beta^2 G^2 + 18\alpha^2) \cosh \beta]S_3 \\ & + [(G^3\hat{G}_{4R} - 2\alpha G^2\hat{G}_{3R} - 6\alpha\beta^2 G^2 - 24\alpha^3) \cosh \beta \\ & + \beta G(G^2\hat{G}_{3R} + \beta^2 G^2 + 18\alpha^2) \sinh \beta]S_4 = 0 \quad (9\text{-د}) \end{aligned}$$

که در معادلات ۹-ج و ۹-د، $G = 1 + \alpha$ اختیار شده است. چنانچه معادلات ۹-الف الی ۹-د را به صورت ماتریسی بنویسیم داریم:

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (10)$$

که در آن ضرایب c_{ij} برای شرایط مرزی کلی در انتهای سمت چپ و شرایط مرزی کلی در انتهای سمت راست به ترتیب در جداول ۲ و ۳ داده شده‌اند.

جدول ۲ ضرایب c_{ij} برای شرایط مرزی کلی در انتهای سمت چپ

c_{ij}	$i=1, j=1, \dots, 4$	c_{ij}	$i=2, j=1, \dots, 4$
c_{11}	$\beta(\hat{G}_{1L} - 4\alpha)$	c_{21}	$\beta(\hat{G}_{3L} + 18\alpha^2 - \beta^2)$
c_{12}	$\hat{G}_{2L} - \beta^2 - 2\hat{G}_{1L}\alpha + 6\alpha^2$	c_{22}	$\hat{G}_{4L} + 6\alpha\beta^2 - 2\hat{G}_{3L}\alpha - 24\alpha^3$
c_{13}	$\beta(\hat{G}_{1L} - 4\alpha)$	c_{23}	$\beta(\hat{G}_{3L} + 18\alpha^2 + \beta^2)$
c_{14}	$\hat{G}_{2L} + \beta^2 - 2\hat{G}_{1L}\alpha + 6\alpha^2$	c_{24}	$\hat{G}_{4L} - 6\alpha\beta^2 - 2\hat{G}_{3L}\alpha - 24\alpha^3$

جدول ۳ ضرایب c_{ij} برای شرایط مرزی کلی در انتهای سمت راست

c_{ij}	$i=3, j=1, \dots, 4$	c_{ij}	$i=4, j=1, \dots, 4$
c_{31}	$(T_5 - G^2\beta^2) \sin \beta + T_6 G\beta \cos \beta$	c_{41}	$(T_7 + 6\alpha G^2\beta^2) \sin \beta + G\beta(T_8 - G^2\beta^2) \cos \beta$
c_{32}	$(T_5 - G^2\beta^2) \cos \beta - T_6 G\beta \sin \beta$	c_{42}	$(T_7 + 6\alpha G^2\beta^2) \cos \beta - G\beta(T_8 - G^2\beta^2) \sin \beta$
c_{33}	$(T_5 + G^2\beta^2) \sinh \beta + T_6 G\beta \cosh \beta$	c_{43}	$(T_7 - 6\alpha G^2\beta^2) \sinh \beta + G\beta(T_8 + G^2\beta^2) \cosh \beta$
c_{34}	$(T_5 + G^2\beta^2) \cosh \beta + T_6 G\beta \sinh \beta$	c_{44}	$(T_7 - 6\alpha G^2\beta^2) \cosh \beta + G\beta(T_8 + G^2\beta^2) \sinh \beta$

در جدول ۳ ضرایب T_5 الی T_8 عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned} T_5 &= G^2 \hat{G}_{2R} - 2G \hat{G}_{1R} \alpha + 6\alpha^2, \\ T_6 &= G \hat{G}_{1R} - 4\alpha, \\ T_7 &= G^3 \hat{G}_{4R} - 2\alpha G^2 \hat{G}_{3R} - 24\alpha^3, \\ T_8 &= G^2 \hat{G}_{3R} + 18\alpha^2 \end{aligned} \quad (11)$$

حال جهت تعیین معادله مشخصه فرکانسی با جانشین کردن ضرایب c_{ij} از جداول ۲ و ۳ در معادله ماتریسی ۱۰ و با برابر صفر قرار دادن دترمینان معادله ماتریسی داریم:

$$c_{11}R_1 + c_{12}R_2 + c_{13}R_3 + c_{14}R_4 = 0 \quad (12)$$

که در آن

$$R_1 = -c_{24}c_{33}c_{42} + c_{23}c_{34}c_{42} + c_{24}c_{32}c_{43} - c_{22}c_{34}c_{43} - c_{23}c_{32}c_{44} + c_{22}c_{33}c_{44}, \quad (13\text{-الف})$$

$$R_2 = c_{24}c_{33}c_{41} - c_{23}c_{34}c_{41} - c_{24}c_{31}c_{43} + c_{21}c_{34}c_{43} + c_{23}c_{31}c_{44} - c_{21}c_{33}c_{44}, \quad (13\text{-ب})$$

$$R_3 = -c_{24}c_{32}c_{41} + c_{22}c_{34}c_{41} + c_{24}c_{31}c_{42} - c_{21}c_{34}c_{42} - c_{22}c_{31}c_{44} + c_{21}c_{32}c_{44}, \quad (13\text{-ج})$$

و

$$R_4 = c_{23}c_{32}c_{41} - c_{22}c_{33}c_{41} - c_{23}c_{31}c_{42} + c_{21}c_{33}c_{42} + c_{22}c_{31}c_{43} - c_{21}c_{32}c_{43} \quad (13\text{-د})$$

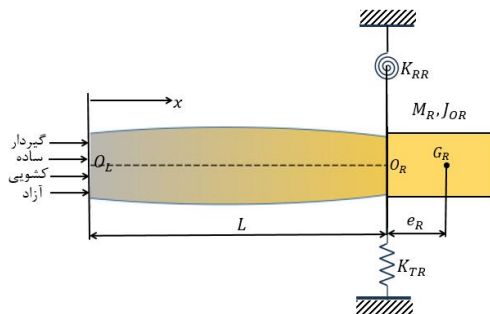
است. همچنین جهت ارائه شکل مودهای ارتعاشی با به‌کارگیری معادله ماتریسی ۱۰ و تعیین ضرایب S_2 ، S_3 و S_4 برحسب S_1 و به‌کارگیری معادله ۸ می‌توان نوشت:

$$\hat{w}(X) = \frac{S_1}{R_1(1 + \alpha X)^2} (R_1 \sin \beta X + R_2 \cos \beta X + R_3 \sinh \beta X + R_4 \cosh \beta X) \quad (14)$$

۴ - معادله مشخصه دقیق فرکانسی با شرایط مرزی کلاسیک در سمت چپ و شرایط مرزی کلی در سمت راست

تیر غیریکنواخت مطابق شکل ۲ در نظر گرفته می‌شود که در انتهای سمت راست دارای شرایط مرزی کلی و در انتهای سمت چپ دارای یکی از شرایط مرزی کلاسیک است. چهار شرط مرزی کلاسیک به‌صورت گیردار، ساده، کشویی و آزاد می‌باید موردبررسی قرار گیرند. برای تیرها با شرایط مرزی گیردار، ساده، کشویی و آزاد شرایط مرزی در $X = 0$ به ترتیب عبارت‌اند از

$$\hat{w}(0) = \frac{d\hat{w}(0)}{dX} = 0, \hat{w}(0) = \frac{d^2\hat{w}(0)}{dX^2} = 0, \frac{d\hat{w}(0)}{dX} = \hat{Q}(0) = 0, \frac{d^2\hat{w}(0)}{dX^2} = \hat{Q}(0) = 0 \quad (15)$$



شکل ۲ تیر غیریکنواخت با شرایط مرزی کلاسیک در انتهای سمت چپ و شرایط مرزی غیر کلاسیک کلی در انتهای سمت راست

در نتیجه ضرایب c_{ij} برای شرایط مرزی کلاسیک در انتهای سمت چپ مطابق جداول ۴ الی ۷ داده می شوند.

جدول ۴ ضرایب c_{ij} برای شرط مرزی گیردار در انتهای سمت چپ

c_{ij}	$i=1, j=1, \dots, 4$	c_{ij}	$i=2, j=1, \dots, 4$
c_{11}	0	c_{21}	β
c_{12}	1	c_{22}	-2α
c_{13}	0	c_{23}	β
c_{14}	1	c_{24}	-2α

جدول ۵ ضرایب c_{ij} برای شرط مرزی ساده در انتهای سمت چپ

c_{ij}	$i=1, j=1, \dots, 4$	c_{ij}	$i=2, j=1, \dots, 4$
c_{11}	0	c_{21}	$-4\alpha\beta$
c_{12}	1	c_{22}	$6\alpha^2 - \beta^2$
c_{13}	0	c_{23}	$-4\alpha\beta$
c_{14}	1	c_{24}	$6\alpha^2 + \beta^2$

جدول ۶ ضرایب c_{ij} برای شرط مرزی کشویی در انتهای سمت چپ

c_{ij}	$i=1, j=1, \dots, 4$	c_{ij}	$i=2, j=1, \dots, 4$
c_{11}	β	c_{21}	$\beta(2\alpha^2 - \beta^2)$
c_{12}	-2α	c_{22}	$2\alpha\beta^2$
c_{13}	β	c_{23}	$\beta(2\alpha^2 + \beta^2)$
c_{14}	-2α	c_{24}	$-2\alpha\beta^2$

جدول ۷ ضرایب c_{ij} برای شرط مرزی آزاد در انتهای سمت چپ

c_{ij}	$i=1, j=1, \dots, 4$	c_{ij}	$i=2, j=1, \dots, 4$
c_{11}	$-4\alpha\beta$	c_{21}	$\beta(2\alpha^2 - \beta^2)$
c_{12}	$6\alpha^2 - \beta^2$	c_{22}	$2\alpha\beta^2$
c_{13}	$-4\alpha\beta$	c_{23}	$\beta(2\alpha^2 + \beta^2)$
c_{14}	$6\alpha^2 + \beta^2$	c_{24}	$-2\alpha\beta^2$

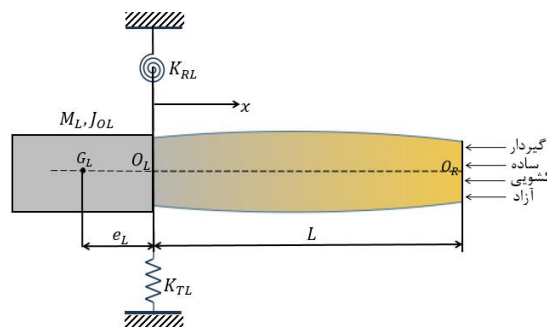
بدیهی است ضرایب c_{ij} ، $(i=3, j=1, \dots, 4)$ و $(i=4, j=1, \dots, 4)$ برای همه شرایط مرزی کلاسیک در سمت چپ به وسیله جدول ۳ داده می شوند. بنابراین با به کارگیری معادلات ۱۲ و ۱۴ به ترتیب معادله مشخصه فرکانسی و شکل مودهای ارتعاشی تعیین می گردند.

۵- معادله مشخصه دقیق فرکانسی با شرایط مرزی کلاسیک در سمت راست و شرایط مرزی کلی

در سمت چپ

تیر غیر یکنواخت مطابق شکل ۳ در نظر گرفته می شود که در انتهای سمت چپ دارای شرایط مرزی کلی و در انتهای سمت راست دارای یکی از شرایط مرزی کلاسیک است. برای تیرها با شرایط مرزی گیردار، ساده، کشویی و آزاد، شرایط مرزی در $X = 1$ به ترتیب عبارتند از:

$$\hat{w}(1) = \frac{d\hat{w}(1)}{dX} = 0, \hat{w}(1) = \frac{d^2\hat{w}(1)}{dX^2} = 0, \frac{d\hat{w}(1)}{dX} = \hat{Q}(1) = 0, \frac{d^2\hat{w}(1)}{dX^2} = \hat{Q}(1) = 0 \quad (16)$$



شکل ۳ تیر غیر یکنواخت با شرایط مرزی کلی در انتهای سمت چپ و شرایط مرزی کلاسیک در انتهای سمت راست

لذا ضرایب c_{ij} برای شرایط مرزی کلاسیک در انتهای سمت راست مطابق جداول ۸ الی ۱۱ داده می‌شوند.

جدول ۸ ضرایب c_{ij} برای شرط مرزی گیردار در انتهای سمت راست

c_{ij}	$i=3, j=1, \dots, 4$	c_{ij}	$i=4, j=1, \dots, 4$
c_{31}	$\sin \beta$	c_{41}	$G\beta \cos \beta - 2\alpha \sin \beta$
c_{32}	$\cos \beta$	c_{42}	$-G\beta \sin \beta - 2\alpha \cos \beta$
c_{33}	$\sinh \beta$	c_{43}	$G\beta \cosh \beta - 2\alpha \sinh \beta$
c_{34}	$\cosh \beta$	c_{44}	$G\beta \sinh \beta - 2\alpha \cosh \beta$

جدول ۹ ضرایب c_{ij} برای شرط مرزی ساده در انتهای سمت راست

c_{ij}	$i=3, j=1, \dots, 4$	c_{ij}	$i=4, j=1, \dots, 4$
c_{31}	$\sin \beta$	c_{41}	$(6\alpha^2 - G^2\beta^2) \sin \beta - 4\alpha G\beta \cos \beta$
c_{32}	$\cos \beta$	c_{42}	$(6\alpha^2 - G^2\beta^2) \cos \beta + 4\alpha G\beta \sin \beta$
c_{33}	$\sinh \beta$	c_{43}	$(6\alpha^2 + G^2\beta^2) \sinh \beta - 4\alpha G\beta \cosh \beta$
c_{34}	$\cosh \beta$	c_{44}	$(6\alpha^2 + G^2\beta^2) \cosh \beta - 4\alpha G\beta \sinh \beta$

جدول ۱۰ ضرایب c_{ij} برای شرط مرزی کشویی در انتهای سمت راست

c_{ij}	$i=3, j=1, \dots, 4$	c_{ij}	$i=4, j=1, \dots, 4$
c_{31}	$G\beta \cos \beta - 2\alpha \sin \beta$	c_{41}	$2\alpha^2 \cos \beta - G^2\beta^2 \cos \beta + 2G\alpha\beta \sin \beta$
c_{32}	$-G\beta \sin \beta - 2\alpha \cos \beta$	c_{42}	$-2\alpha^2 \sin \beta + G^2\beta^2 \sin \beta + 2G\alpha\beta \cos \beta$
c_{33}	$G\beta \cosh \beta - 2\alpha \sinh \beta$	c_{43}	$2\alpha^2 \cosh \beta + G^2\beta^2 \cosh \beta - 2G\alpha\beta \sinh \beta$
c_{34}	$G\beta \sinh \beta - 2\alpha \cosh \beta$	c_{44}	$2\alpha^2 \sinh \beta + G^2\beta^2 \sinh \beta - 2G\alpha\beta \cosh \beta$

جدول ۱۱ ضرایب c_{ij} برای شرط مرزی آزاد در سمت راست

c_{ij}	$i=3, j=1, \dots, 4$	c_{ij}	$i=4, j=1, \dots, 4$
c_{31}	$(6\alpha^2 - G^2\beta^2) \sin \beta - 4\alpha G\beta \cos \beta$	c_{41}	$2\alpha^2 \cos \beta - G^2\beta^2 \cos \beta + 2G\alpha\beta \sin \beta$
c_{32}	$(6\alpha^2 - G^2\beta^2) \cos \beta + 4\alpha G\beta \sin \beta$	c_{42}	$-2\alpha^2 \sin \beta + G^2\beta^2 \sin \beta + 2G\alpha\beta \cos \beta$
c_{33}	$(6\alpha^2 + G^2\beta^2) \sinh \beta - 4\alpha G\beta \cosh \beta$	c_{43}	$2\alpha^2 \cosh \beta + G^2\beta^2 \cosh \beta - 2G\alpha\beta \sinh \beta$
c_{34}	$(6\alpha^2 + G^2\beta^2) \cosh \beta - 4\alpha G\beta \sinh \beta$	c_{44}	$2\alpha^2 \sinh \beta + G^2\beta^2 \sinh \beta - 2G\alpha\beta \cosh \beta$

بدیهی است ضرایب c_{ij} ، و $(i=1, j=1, \dots, 4)$ و $(i=2, j=1, \dots, 4)$ برای همه شرایط مرزی کلاسیک در سمت راست به‌وسیله جدول ۲ داده می‌شوند؛ بنابراین با به‌کارگیری معادلات ۱۲ و ۱۴ به ترتیب معادله مشخصه فرکانسی و شکل مودهای ارتعاشی تعیین می‌گردند.

۶- معادله مشخصه دقیق فرکانسی با شرایط مرزی کلاسیک در دو انتها

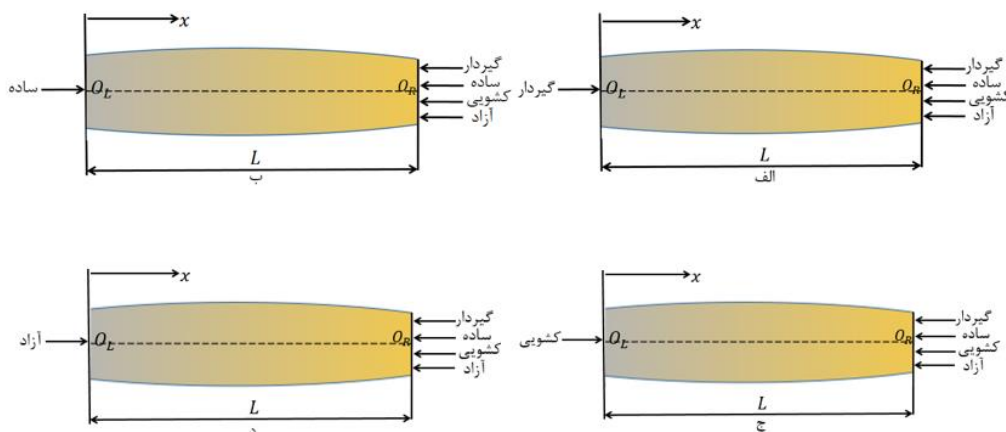
تیر غیریکنواخت با شرایط مرزی مندرج در شکل ۴ را در نظر می‌گیریم. شانزده حالت برای شرایط مرزی کلاسیک در دو انتهای تیر مطابق حالات الف الی د که در شکل ۴ به نمایش گذاشته شده‌اند امکان‌پذیر است. جهت ارائه معادله دقیق مشخصه فرکانسی و شکل مودهای ارتعاشی با استفاده از معادلات ۱۲ و ۱۴، شرایط مرزی مربوط به هر یک از این شانزده حالت را نوشته و ضرایب c_{ij} در معادله ماتریسی ۱۰ را با استفاده از جداول راهنمای ۱۲ و ۱۳ تعیین می‌کنیم.

جدول ۱۲ راهنمای تعیین ضرایب c_{ij} برای شرایط مرزی حالات الف و ب

شرایط مرزی حالت الف	جدول مربوط به ضرایب c_{ij}	شرایط مرزی حالت ب	جدول مربوط به ضرایب c_{ij}
گیردار-گیردار	۴ و ۸	گیردار-ساده	۵ و ۸
ساده-گیردار	۴ و ۹	ساده-ساده	۵ و ۹
کشویی-گیردار	۴ و ۱۰	کشویی-ساده	۵ و ۱۰
آزاد-گیردار	۴ و ۱۱	آزاد-ساده	۵ و ۱۱

جدول ۱۳ راهنمای تعیین ضرایب C_{ij} برای شرایط مرزی حالات ج و د

شرایط مرزی حالت ج	جداول مربوط به ضرایب C_{ij}	شرایط مرزی حالت د	جداول مربوط به ضرایب C_{ij}
گیردار-کشویی	۶ و ۸	گیردار-آزاد	۷ و ۸
ساده-کشویی	۶ و ۹	ساده-آزاد	۷ و ۹
کشویی-کشویی	۶ و ۱۰	کشویی-آزاد	۷ و ۱۰
آزاد-کشویی	۶ و ۱۱	آزاد-آزاد	۷ و ۱۱



شکل ۴ تیر غیر یکنواخت با شرایط مرزی کلاسیک در دو انتهای

۷- برخی معادله مشخصه فرکانسی با شرایط مرزی کلاسیک

گیردار-گیردار

$$1 - \cos \beta \cosh \beta = 0 \quad (۱۷)$$

گیردار در $X = 0$ و ساده در $X = 1$

$$\cosh \beta [4\alpha \cos \beta + \beta(1 + \alpha) \sin \beta] - \beta(1 + \alpha) \cos \beta \sinh \beta - 4\alpha = 0 \quad (۱۸)$$

گیردار در $X = 0$ و لغزشی در $X = 1$

$$4\alpha^3 + \cosh \beta \{4\alpha^3 \cos \beta + (\alpha + 1)\beta[\beta^2 + 2\alpha\beta^2 + \alpha^2(\beta^2 + 4)] \sin \beta + (\alpha + 1)\beta\{[\beta^2 + 2\alpha\beta^2 + \alpha^2(\beta^2 - 4)] \cos \beta - 4\alpha(\alpha + 1)\beta \sin \beta\} \sinh \beta = 0 \quad (۱۹)$$

گیردار در $X = 0$ و آزاد در $X = 1$

$$\cosh \beta \{[(4\alpha^3 + 6\alpha^2 + 4\alpha + 1)\beta^4 + \alpha^4(\beta^4 - 12)] \cos \beta - 4\alpha(\alpha + 1)\beta[\beta^2 + 2\alpha\beta^2 + \alpha^2(\beta^2 + 3)] \sin \beta - 4\alpha(\alpha + 1)\beta\{[\beta^2 + 2\alpha\beta^2 + \alpha^2(\beta^2 - 3)] \cos \beta - 3\alpha(\alpha + 1)\beta \sin \beta\} \sinh \beta + 12\alpha^4 + (\alpha^4 + 4\alpha^3 + 6\alpha^2 + 4\alpha + 1)\beta^4 = 0 \quad (۲۰)$$

ساده در $X = 0$ و گیردار در $X = 1$

$$(4\alpha \cos \beta - \beta \sin \beta) \cosh \beta + \beta \cos \beta \sinh \beta - 4\alpha = 0 \quad (۲۱)$$

ساده-ساده

$$8\alpha^2 - 2\alpha^2(4 \cos \beta + \beta \sin \beta) \cosh \beta + \beta [2\alpha^2 \cos \beta - \beta(\alpha + 1) \sin \beta] \sinh \beta = 0 \quad (۲۲)$$

ساده در $X = 0$ و لغزشی در $X = 1$

$$\cosh \beta \{ (8\alpha^4 + \beta^4 + 3\alpha\beta^4 + 3\alpha^2\beta^4 + \alpha^3\beta^4) \cos \beta + 2\alpha^2\beta[\beta^2 + \alpha^2(\beta^2 + 4) + \alpha(2\beta^2 + 3)] \sin \beta + 2\alpha^2\beta\{[\beta^2 + \alpha^2(\beta^2 - 4) + \alpha(2\beta^2 - 3)] \cos \beta - 2\beta(1 + 3\alpha + 2\alpha^2) \sin \beta\} \sinh \beta - 8\alpha^4 = 0 \quad (۲۳)$$

ساده در $X = 0$ و آزاد در $X = 1$

$$4\alpha[\beta^4 + 4\alpha\beta^4 + 6\beta^4\alpha^2 + 4\alpha^3\beta^4 + \alpha^4(12 + \beta^4)] - \cosh\beta\{-4\alpha[-\beta^4 - 2\alpha\beta^4 + 2\alpha^3\beta^4 + \alpha^4(-12 + \beta^4)]\cos\beta + \beta[\beta^4 + 4\alpha\beta^4 + 16\alpha^5(3 + \beta^2) + 4\alpha^3\beta^2(6 + \beta^2) + \alpha^4(36 + 36\beta^2 + \beta^4)] + \alpha^2(4\beta^2 + 6\beta^4)\sin\beta\} + \beta\{[\beta^4 + 4\alpha\beta^4 + 4\alpha^3\beta^2(-6 + \beta^2) - 16\alpha^5(-3 + \beta^2) + \alpha^4(36 - 36\beta^2 + \beta^4)] + \alpha^2(-4\beta^2 + 6\beta^4)\cos\beta + 24\alpha^3(1 + 3\alpha + 2\alpha^2)\beta\sin\beta\}\sinh\beta = 0 \quad (24)$$

لغزشی در $X = 0$ و گیردار در $X = 1$

$$4\alpha^3 + \cosh\beta[\beta(4\alpha^2 + \beta^2)\sin\beta - 4\alpha^3\cos\beta] + \beta[(\beta^2 - 4\alpha^2)\cos\beta + 4\alpha\beta\sin\beta]\sinh\beta = 0 \quad (25)$$

لغزشی در $X = 0$ و ساده در $X = 1$

$$\cosh\beta[(8\alpha^4 + \beta^4 + \alpha\beta^4)\cos\beta + 2\alpha^2\beta(\alpha^2 + \beta^2 - 3\alpha)\sin\beta] + 2\alpha^2\{-4\alpha^2 + \beta[(\beta^2 - \alpha^2 + 3\alpha)\cos\beta + 2\beta(\alpha - 1)\sin\beta]\}\sinh\beta = 0 \quad (26)$$

آزاد در $X = 0$ و گیردار در $X = 1$

$$\cosh\beta[(\beta^4 - 12\alpha^4)\cos\beta + 4\alpha\beta(\beta^2 + 3\alpha^2)\sin\beta] - 4\alpha\beta(3\alpha^2\cos\beta - \beta^2\cos\beta - 3\alpha\beta\sin\beta)\sinh\beta + 12\alpha^4 + \beta^4 = 0 \quad (27)$$

آزاد در $X = 0$ و ساده در $X = 1$

$$\cosh\beta[-4\alpha(12\alpha^4 + \beta^4 + 2\alpha\beta^4)\cos\beta + \beta(36\alpha^4 - 12\alpha^5 + 4\alpha^2\beta^2 - 12\alpha^3\beta^2 + \beta^4 + \alpha\beta^4)\sin\beta] - \beta[(36\alpha^4 - 12\alpha^5 - 4\alpha^2\beta^2 + 12\alpha^3\beta^2 + \beta^4 + \alpha\beta^4)\cos\beta + 24\alpha^3\beta(\alpha - 1)\sin\beta]\sinh\beta = 0 \quad (28)$$

همان‌طور که قبلاً اشاره شد شانزده حالت برای شرایط مرزی کلاسیک در دو انتهای تیر امکان‌پذیر است که در این قسمت به دوازده حالت بر طبق معادلات ۱۷ الی ۲۸ اشاره شده است.

۸- مثال‌های عددی

به منظور استنتاج پارامترهای فرکانسی بی‌بعد و شکل مودها، مشخصات هندسی و مادی تیر را مطابق معادله ۲۹ اختیار می‌کنیم

$$h(X) = h_0(1 - c_h X), \quad b(X) = b_0(1 - c_b X), \quad (29)$$

$$E(X) = E_0(1 - c_h X), \quad \rho(X) = \rho_0(1 - c_h X)^2$$

که در آن h, b, E و ρ به ترتیب بر ارتفاع، پهنا، مدول الاستیسیته و جرم مخصوص تیر دلالت دارند. همچنین c_b و c_h بر طبق رابطه ۳۰ داده می‌شوند.

$$c_h = 1 - \frac{h(1)}{h(0)}, \quad c_b = 1 - \frac{b(1)}{b(0)} \quad (30)$$

به هنگامی که $c_b = c_h = 0$ باشد تیر به تیر یکنواخت تبدیل می‌گردد و در صورتی که $c_b = c_h = 1$ باشد سطح مقطع تیر در انتهای $X = 1$ از نظر تئوری به یک نقطه تبدیل می‌شود.

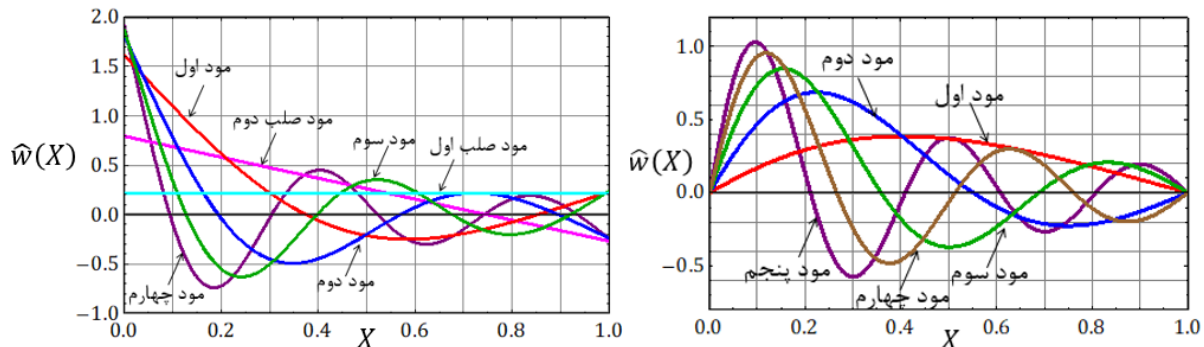
۸-۱ تیر گوه‌ای غیر همگن با چهار نوع شرایط مرزی کلاسیک مختلف

چنانچه در معادله ۲۹ $c_b \neq 0$ و $c_h \neq 0$ باشد تیر مورد بررسی به تیر مخروطی با مقطع چهار گوش و در صورتی که $c_b = 0$ و $c_h \neq 0$ باشد تیر مورد نظر به تیر گوه‌ای شکل تبدیل می‌گردد. با استفاده از جداول راهنمای ۱۲ و ۱۳ و مراجعه به جداول اشاره‌شده در آن‌ها، می‌توان ضرایب c_{iz} برای چهار نوع شرایط مرزی گیردار-گیردار، ساده-ساده، کشویی-کشویی و آزاد-آزاد را تعیین کرد. بدین ترتیب پنج پارامتر فرکانسی اول برای تیر گوه‌ای با به‌کارگیری رابطه ۱۲ محاسبه و در جدول ۱۴ داده شده‌اند.

همچنین برای دو شرط مرزی ساده-ساده و آزاد-آزاد با استفاده از رابطه ۱۴ شکل مودها استنتاج و در شکل ۵ به نمایش گذاشته شده‌اند. بررسی جدول ۱۴ مبین این مطلب است که بیشترین مقادیر پارامترهای فرکانسی مربوط

جدول ۱۴ پنج پارامتر فرکانسی اول برای تیر گوه‌ای با شرایط مرزی کلاسیک $c_h = -13/7$ ، $c_b = 0$

شرایط مرزی	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5
گیردار-گیردار	4.73004	7.85320	10.9956	13.1372	17.2788
ساده - ساده	2.89950	6.38590	9.54151	12.6754	15.8066
کشویی-کشویی	RBM	3.70632	6.63207	9.66970	12.7536
آزاد-آزاد	RBM	RBM	5.26359	8.26951	11.3259



شکل ۵ نمایش پنج مود اول الاستیک نرمالایز شده برای تیر گوه‌ای با شرایط مرزی ساده-ساده و آزاد-آزاد $c_h = -13/7$ ، $c_b = 0$

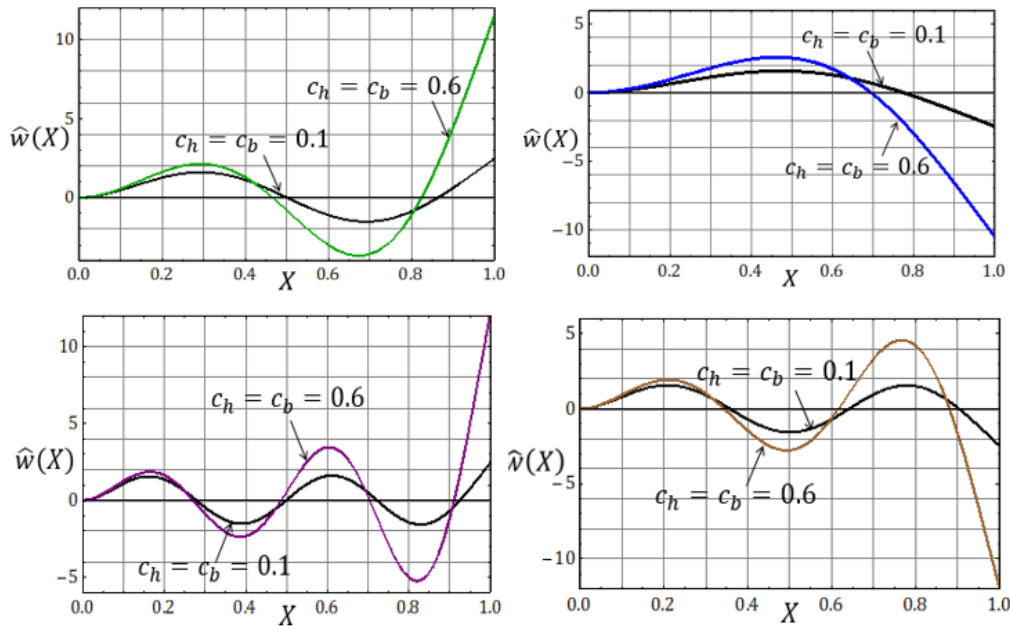
به شرایط مرزی گیردار-گیردار و کم‌ترین مربوط به شرایط مرزی آزاد-آزاد هستند. به عبارت دیگر با بیشتر مقید شدن شرایط مرزی در دو انتهای تیر پارامترهای فرکانسی افزایش می‌یابند. از این رو تکیه‌گاه گیردار در درجه اول، ساده در درجه دوم، کشویی در درجه سوم و آزاد در درجه چهارم به ترتیب بیشترین و کمترین مقادیر پارامترهای فرکانسی را به دست می‌دهند. همچنین همان‌طور که در این جدول مشخص شده است شرایط مرزی کشویی-کشویی دارای یک مود صلب انتقالی و شرایط مرزی آزاد-آزاد دارای یک مود صلب انتقالی و یک مود صلب دورانی است. این مودها در جدول با نماد (RBM) مشخص شده‌اند. در شکل ۵ می‌توان شکل پنج مود الاستیک اول برای تیر گوه‌ای با شرایط مرزی ساده-ساده و سه مود الاستیک اول همراه با در مود صلب برای تیر آزاد-آزاد را مشاهده کرد.

۸-۲ اثر هندسه تیرهای مخروطی غیر همگن بر روی پارامترهای فرکانسی

تیرهای مخروطی غیر همگن با مقادیر مختلف $c_h = c_b$ را در نظر گرفته و مشابه قسمت ۸-۱ پارامترهای فرکانسی را برای تیر با شرایط مرزی گیردار-آزاد محاسبه می‌کنیم. پنج پارامتر فرکانسی اول برای این تیر در جدول ۱۵ درج شده‌اند. همان‌طور که در این جدول مشاهده می‌کنیم با کاهش مقادیر $c_h = c_b$ تیر نرم‌تر شده و پارامترهای فرکانسی کاهش می‌یابند. مقایسه تغییرات شکل مودهای دوم تا چهارم برای دو نوع تیر مخروطی در شکل ۶ به نمایش گذاشته شده است. می‌توان ملاحظه کرد که با نرم‌تر شدن تیر نقاط گرهی به سمت راست یعنی مقطع نازک‌تر تیر پیشروی می‌کنند.

جدول ۱۵ پنج پارامتر فرکانسی اول برای تیر مخروطی با شرایط مرزی گیردار-آزاد

تیر مخروطی	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5
$c_h = c_b = 0.9$	4.25784	7.07603	9.93026	12.8147	15.7365
$c_h = c_b = 0.6$	3.03891	5.59301	8.46925	11.4641	14.5148
$c_h = c_b = 0.4$	2.50957	5.16807	8.15806	11.2205	14.3154
$c_h = c_b = 0.3$	2.31001	5.01932	8.05693	11.1438	14.2540
$c_h = c_b = 0.1$	1.99860	4.78796	7.91009	11.0354	14.1683



شکل ۶ مقایسه شکل مدهای دوم الی چهارم برای دو نوع تیر مخروطی

۸-۳ تیر مخروطی غیر همگن با قیود الاستیکی انتقالی

تیر مخروطی غیر همگن با قیود الاستیکی انتقالی در دو انتها، شامل دو فنر خطی با سفتی‌های بی‌بعد $\bar{K}_{TL} = \bar{K}_{TR}$ را در نظر گرفته و فرض می‌کنیم سفتی فنرهای چرخشی در دو انتها برابر صفر باشد. در این صورت می‌توان تغییرات پارامترهای فرکانسی را برحسب تغییرات سفتی بی‌بعد فنرهای انتقالی مورد مطالعه قرار داد. بدین منظور ضرایب c_{ij} را از جداول ۲ و ۳ استخراج کرده و پارامترهای فرکانسی را محاسبه می‌کنیم. پنج پارامتر فرکانسی اول برای این تیر در جدول ۱۶ ارائه شده است. مشاهده می‌شود با افزایش سفتی فنرهای خطی انتهایی تیر مقیدتر شده و در نتیجه پارامترهای فرکانسی افزایش می‌یابند. در این مورد مثال $c_h = c_b = -0.4$ اختیار شده است.

جدول ۱۶ پنج پارامتر فرکانسی اول برای تیر مخروطی با قیود انتقالی و $\bar{K}_{RL} = \bar{K}_{RR} = 0$

$\bar{K}_{TL} = \bar{K}_{TR}$	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5
0.001	0.202127	0.282498	4.78334	7.89622	11.0293
0.01	0.359427	0.502356	4.78350	7.89625	11.0293
0.1	0.638954	0.893256	4.78511	7.89661	11.0295
1	1.132510	1.587220	4.80114	7.90023	11.0308
10	1.952490	2.800850	4.95731	7.93656	11.0442
100	2.817120	4.666680	6.09577	8.30725	11.1820
1000	3.078930	6.037630	8.56181	10.6145	12.5892

۸-۴ تیر مخروطی غیر همگن با شرایط مرزی غیر کلاسیک انتهایی

تیر مخروطی غیر همگن ($c_h = c_b = 0.4$) شامل جرم متمرکز $\bar{M}_L = 1$ در سمت چپ و جرم متمرکز \bar{M}_R در سمت راست را در نظر می‌گیریم برای این تیر با استفاده از جداول ۲ و ۳ ضرایب c_{ij} را تعیین کرده و سپس پارامترهای فرکانسی را برای مقادیر مختلف \bar{M}_R محاسبه می‌کنیم. در این صورت پنج پارامتر فرکانسی اول مطابق جدول ۱۷ ارائه می‌شوند. همان‌طور که در این جدول مشاهده می‌شود با افزایش جرم متمرکز سمت راست تیر مخروطی نرم‌تر شده و پارامترهای فرکانسی کاهش می‌یابند. پارامترهای فرکانسی برای حالت $\bar{M}_R = \infty$ و هر مقدار دلخواه \bar{M}_L از رابطه ۳۱ نیز قابل محاسبه اند.

$$\begin{aligned}
& 4\alpha(12\alpha^4 + \beta^4 - 4\widehat{M}_L\alpha\beta^4) \\
& + \cosh \beta \{ -4\alpha[12\alpha^4 + \beta^4 + 2(1 - 2\widehat{M}_L)\alpha\beta^4] \cos \beta \\
& + \beta[36\alpha^4 - 12\alpha^5 - 12\alpha^3\beta^2 + \beta^4 + \alpha\beta^4 + 4\alpha^2(\beta^2 + \widehat{M}_L\beta^4)] \sin \beta \} \\
& + \beta \{ [-36\alpha^4 + 12\alpha^5 - 12\alpha^3\beta^2 - \beta^4 - \alpha\beta^4 + \alpha^2(4\beta^2 - 4\widehat{M}_L\beta^4)] \cos \beta \\
& + 2\beta(12\alpha^3 - 12\alpha^4 + \widehat{M}_L\beta^4 + \widehat{M}_L\alpha\beta^4) \sin \beta \} \sinh \beta = 0
\end{aligned} \quad (31)$$

جدول ۱۷ پنج پارامتر فرکانسی اول برای تیر مخروطی با جرم متمرکز $\widehat{M}_L = 1$ در سمت چپ

\widehat{M}_R	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5
0	4.32281	7.33254	10.4077	13.5089	15.6237
0.5	3.24499	6.39675	9.51487	12.6398	15.7697
1	3.20293	6.38248	9.50624	12.6337	15.7649
2	3.18055	6.37520	9.80187	12.6306	15.7625
∞	3.15717	6.36783	9.49747	12.6275	15.7601

۹- اعتبارسنجی

۹-۱ تیر یکنواخت همگن با شرایط مرزی غیر کلاسیک

تیر یکنواخت همگن ($c_h = c_b = 0$) شامل اجرام متمرکز انتهایی با مشخصات توصیف شده در بند ۸-۴ را در نظر می‌گیریم. برای این تیر پارامترهای فرکانسی را برای مقادیر مختلف \widehat{M}_R محاسبه می‌کنیم. جدول ۱۸ پنج پارامتر فرکانسی اول را با نتایج مرجع [۷] مقایسه می‌کند. همان‌طور که ملاحظه می‌گردد توافق بسیار خوبی مابین نتایج برقرار است. که بر صحت نتایج تا کید می‌نماید.

جدول ۱۷ پنج پارامتر فرکانسی اول برای تیر یکنواخت با جرم متمرکز $\widehat{M}_L = 1$ در سمت چپ

مطالعه حاضر، مرجع [۷]

\widehat{M}_R	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5
0	4.04183'	7.13384'	10.2566'	13.3878'	16.5227'
	4.04180"	7.13380"	10.2566"	13.3878"	16.5227"
0.5	3.48872'	6.48734'	9.56874'	12.6773'	15.7981'
	3.48870"	6.48730"	9.56870"	12.6773"	15.7981"
1	3.39880'	6.42726'	9.52445'	12.6424'	15.7694'
	3.39880"	6.42730"	9.52450"	12.6424"	15.7694"
2	3.34173'	6.39319'	9.50037'	12.6239'	15.7543'
	3.34170"	6.39320"	9.50040"	12.6239"	15.7542"
∞	3.34173'	6.39319'	9.50037'	12.6239'	15.7543'
	3.27330"	6.35600"	9.46490"	12.6045"	15.7387"

۹-۲ معادله مشخصه فرکانسی تیر یکنواخت با شرایط مرزی کلاسیک

با جانشین کردن $\alpha = 0$ و تعیین ضرایب c_{ij} از جداول ۱۲ و ۱۳ و به‌کارگیری معادله ۱۲ تعداد ده معادله مستقل برای تیر یکنواخت با شرایط مرزی کلاسیک در دو انتها نتیجه می‌گردد. در نتیجه می‌توان نوشت:

گیردار-گیردار

$$1 - \cos \beta \cosh \beta = 0 \quad (32)$$

گیردار-ساده

$$\cosh \beta \sin \beta - \cos \beta \sinh \beta = 0 \quad (33)$$

گیردار-لغزشی

$$\cosh \beta \sin \beta + \cos \beta \sinh \beta = 0 \quad (34)$$

گیردار-آزاد

$$1 + \cos \beta \cosh \beta = 0 \quad (35)$$

ساده-ساده

$$\sin \beta \sinh \beta = 0 \quad (36)$$

ساده-لغزشی

$$\cosh \beta \cos \beta = 0 \quad (37)$$

ساده-آزاد

$$\cos \beta \sinh \beta - \cosh \beta \sin \beta = 0 \quad (38)$$

کشویی-کشویی

$$\sin \beta \sinh \beta = 0 \quad (39)$$

کشویی-آزاد

$$\cos \beta \sinh \beta + \cosh \beta \sin \beta = 0 \quad (40)$$

آزاد-آزاد

$$1 - \cos \beta \cosh \beta = 0 \quad (41)$$

این معادلات شکل تحلیلی بسته معادله مشخصه فرکانسی تیر یکنواخت اویلر برنولی با شرایط مرزی کلاسیک هستند که در مراجع متعدد از جمله [۲۲] آورده شده‌اند. لذا صحت نتایج بدین ترتیب نیز مورد تأیید قرار می‌گیرد.

۱۰- جمع بندی

۱- حل معادله دیفرانسیل حاکم بر ارتعاشات عرضی تیر غیریکنواخت و همگن اویلر برنولی برای کلاسی از تیرها که مشخصات هندسی و خواص مادی آن‌ها از معادله ۶ پیروی می‌کند به صورت تحلیلی بسته ارائه شد.

۲- شرایط مرزی به صورت غیر کلاسیک کلی شامل اجرام با ممان اینرسی جرمی، خروج از مرکزیت و قیود الاستیکی خطی و چرخشی مطابق شکل ۱ در نظر گرفته شدند. از این رو می‌توان ارتعاشات عرضی تیرها با ترکیبات متعددی از شرایط مرزی را مورد مطالعه قرار داد.

۳- ضرایب C_{ij} جهت حل مسئله مقدار ویژه و بردار ویژه به منظور استنتاج پارامترهای فرکانسی و شکل مودهای ارتعاشی برای تیر با شرایط مرزی غیر کلاسیک کلی تعیین شدند.

۴- معادلات مشخصه دقیق فرکانسی تیرهای غیریکنواخت که بر حسب انتخاب مقدار پارامتر بی بعد α از یکدیگر متمایز می‌گردند برای برخی شرایط مرزی کلاسیک دو انتهای تیر به صورت تحلیلی بسته ارائه شده‌اند. این معادلات برای تیر یکنواخت با جانشین کردن مقدار صفر برای α به معادلات شناخته شده تبدیل می‌گردند که جهت اعتبارسنجی نتایج مورد استفاده واقع شده‌اند.

۱۱- مراجع

[1] S. Abrate S. Vibration of non-uniform rods and beams. Journal of Sound and Vibration. 1995,185(4); 703-716.

[2] Zhou D, Cheung Y K. The free vibration of a type of tapered beams. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2000;188:203-16.

[3] Lee J W, Lee J Y. Free vibration analysis using the transfer matrix method on a tapered beam, Computer and Structures. 2016; 164: 75-82.

[4] Kim T, Lee B, Lee U. State vector equation method for the frequency domain spectral element modelling of non-uniform one-dimensional structures. International Journal of Mechanical Sciences. 2019; 157: 75-86.

- [5] Lai H Y, Hsu J C, Chen C K. Free Vibration of Non-Uniform Euler-Bernoulli Beams by the Adomian modified decomposition method. *Computers Modeling in Engineering and Sciences*.2008; 34(1): 87-113.
- [6] Mousaavi Lajimi S A, Heppler G R. Comment on natural frequencies of a uniform cantilever with a tip mass slender in the axial direction. *Journal of Sound and Vibration*.2012; 331: 2964-2968.
- [7] Shi W, Li X F, Lee K Y. Transverse vibration of free-free beams carrying two unequal end masses. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2015; 90: 251-257.
- [8] Fernandes J, Allende L, Santos S. Free vibration Analysis of Euler-Bernoulli beams under non-classical boundary conditions. *IX Congress Nacional de Engenharia Mecanica*. 2015; 1-10.
- [9] Malaek H, Moeenfarid H. Analytical modeling of large amplitude free vibration of non-uniform beams carrying a both transversely and axially eccentric tip mass. *Journal of Sound and Vibration*. 2016; 366: 211-29.
- [10] Celik I. Free vibration of non-uniform Euler-Bernoulli beam under various supporting conditions using Chebyshev wavelet collocation method. *Applied Mathematical Modelling*.2018; 54: 268-80.
- [11] Ghannadiasl A, Zamiri A, Borhanifar A. Free vibrations of non-uniform beams on a non-uniform Winkler foundation using the Laguerre collocation method, *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*. 2020; 42(5) 242: 1-12.
- [12] Huang Y, Li X F. A new approach for free vibration of axially functionally graded beams with non-uniform cross-section. *Journal of Sound and Vibration*.2010; 329: 2291-303.
- [13] Liu P, Lin K, Liu H, Qin R. Free transverse vibration analysis of axially functionally graded tapered Euler-Bernoulli beams through spline finite point method. *Shock and Vibration*. 2016; 1-23.
- [14] Zhao Y, Huang Y, Guo M. A novel approach for free vibration of axially functionally graded beams with non-uniform cross-section based on Chebyshev polynomials theory. *Composite Structures* 2017; 277-84.
- [15] Cao D, Cao Y, Wang J, Yao M, Zhang W. Analytical analysis of free vibration of non-uniform and homogenous beams: asymptotic perturbation approach. *Applied Mathematical Modelling*. 2019; 65: 526-34.
- [16] Shabani S, Cunedioglu Y. Free vibration analysis of cracked functionally graded non-uniform beams. *Materials Research Express*. 2020; 7 015707: 1-15.
- [17] Sahu R P, Sutar M K, Pattnaik S. A generalized finite element approach towards the free vibration analysis of non-uniform axially functionally graded beam, *Scientia Iranica*, 2022; 29 (2): 556-71.
- [18] Hein H, Feklistova L. Free vibrations of non-uniform and axially functionally graded beams using Haar wavelets. *Engineering Structures*.2011; 33: 3696-701.
- [19] Sari M.S, Al-Dahidi S. Vibration characteristic of multiple functionally graded non uniform beams. *Journal of vibration control*. 2020; 10: 2205-218.
- [20] Li G, Wang G, Ni J, Li L. The vibration analysis of the elastically restrained functionally graded Timoshenko beam with arbitrary cross sections, *Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control*, 2021; 40,4: 1853-875.
- [21] Hosseini-Hashemi K, Talebitooti R, Hosseini-Hashemi S H. A Unique Approach to Investigate the Free Vibrations of Non-uniform and Functionally Graded Euler-Bernoulli Beams, *Mechanics of Advanced and Smart Materials Journal*, 2023; 2(4):463-87.
- [22] Rao S S. *Vibration of Continuous Systems*, Fifth edition , Prentice Hall , New Jersey, 2011; 326- 36.