

Buckling Analysis of a Functionally Graded unidirectional rectangular NanoPlate considering the surface effect

Korosh Khorshidi ^{a*}, Mohsen Ghasemi ^a, Mahdi Bahrami ^a

^a Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Arak University, Arak, Iran

Original Article

Use your device to scan
and read the article online



Citation: Khorshidi K, Ghasemi M, Bahrami M. Buckling Analysis of a Functionally Graded unidirectional rectangular Plate considering the surface effect. *Mechanics of Advanced and Smart Materials*. 2023;3(1)21-53.

 <https://10.52547/masm.3.1.21>.

KEYWORDS

Surface effect,
Buckling,
Functionally graded Nano-plate,
Surface elasticity theory,
Nonlocal elasticity theory.

ABSTRACT

In this paper, buckling analysis of functionally graded rectangular Nano-plates considering the surface effect is investigated. Also, to define the material properties the Mori-Tanaka scheme is used which according to this scheme the material properties change continuously along the thickness direction. Displacement field is obtained using modified shear deformation theories. In these theories, against classical plate theory, the effects of rotary inertia and transverse shear deformations are considered and various functions such as exponential, trigonometric, hyperbolic and parabolic functions are used to considering these effects along the thickness direction. To considering nonlocal and surface effects the nonlocal elasticity theory and surface elasticity theory are employed respectively. The governing equations of motion are obtained by Hamilton's principle and the Galerkin method is used to solve these equations. To show the accuracy of the present formulations, the presented results in this thesis are compared with those reported in the literature. Finally, the effects of various parameters which is related to the surface parameters such as residual surface stress, surface elasticity constant and also other parameters such as thickness ratio, aspect ratio, material index and nonlocal parameter of functionally graded nano-plate are investigated.

Extended Abstract

1. Introduction

Functionally Graded Materials (FGMs) are a new class of composites materials that are typically a mixture of metals and ceramics in which the material properties vary continuously along the thickness direction. Inevitably, the resultant materials show a superior performance compared to the conventional composites, because of high-temperature resistance and mitigation of the thermal stress concentration. This features of the FGMs were caused the various applications such as thermal insulation. But in the recent years, the applications of FGMs are developed and they are used in many devices such as nanosensors, nanoactuators and micro and nano electromechanical systems (MEMS and NEMS). As a result, in the past few years, the mechanical properties of micro and nanoscale FGM systems such as bending, vibration and buckling analysis of in various structures, such as nanobeams, nanoshells and nanoplates, have been widely studied [6-9].

The impact of the surrounding environment on the atoms at the surface of structures is not the same as that of the atoms in the bulk part of the structure. The level of the energy and properties of surface atoms are different from those of bulk atoms as a result of friction, heat transfer, and external loads. As a result, the material properties of surface atoms, such as Young's modulus, Lamé constant and mass density may be different. For instance, when you create or remove the bonds of the atoms on the surface of a structure, it causes the atoms on the surface to

* Corresponding author. Tel.: 086-32625720

E-mail address: k-khorshidi@araku.ac.ir

DOI: <https://10.52547/masm.3.1.21>.

Received: January 16, 2023; Received in revised form: February 5, 2023; Accepted: March 19, 2023

© Author



separate from each other, and this process releases energy. Some of this energy is used to create new connections between atoms. As a result, the amount of energy in the structure will change compared to how it was before. Consequently, the Surface energy is defined as an energy that is needed to make a new surface using atoms that are already exist. So far, several studies on the effects of surface parameters on mechanical behaviors of systems and structures [32-41] have been developed.

Surface effects play significant roles in the material properties of the structures at micro and nanoscale, which is attributed to high ratio of the surface to the bulk atoms, compared to large-scale structures. Therefore, the surface effects should be considered in the analysis of micro and nanoscale structures. Since the surface effects are ignored in the conventional elasticity theories, an improved theory, called surface elasticity theory, was proposed by Gurtin and Murdoch [30, 31] to capture the surface effects. This theory has been widely employed to analyze dynamic behavior of the nanostructures. Raghu et al. [36] analyzed the effects of surface stress on the bending and vibration of laminated composite plates. They utilized the surface elasticity theory proposed by Gurtin and Murdoch. Attia [38] used surface elasticity theory to bending, buckling and free vibration of simply supported FG microbeams, based on the couple stress and Euler–Bernoulli beam theories. Nonlinear vibrations of laminated nanoplates, considering the surface and interface components of energy, were investigated by Wang et al [35].

2. Mathematical Formulation

A functionally graded (FG) rectangular nanoplate is made of three layers, a core tha is made of FG materials, and two thin surface layers, as shown in Figure 1. The length, width and thickness of the plate are a, b and h, respectively. Due to the relatively small thicknesses of the face surface layers compared to the core layer, the thicknesses of the surface layers in coparision to core layer is assumed to be negligible. Also, S^+ and S^- refer to the top and bottom surfaces.

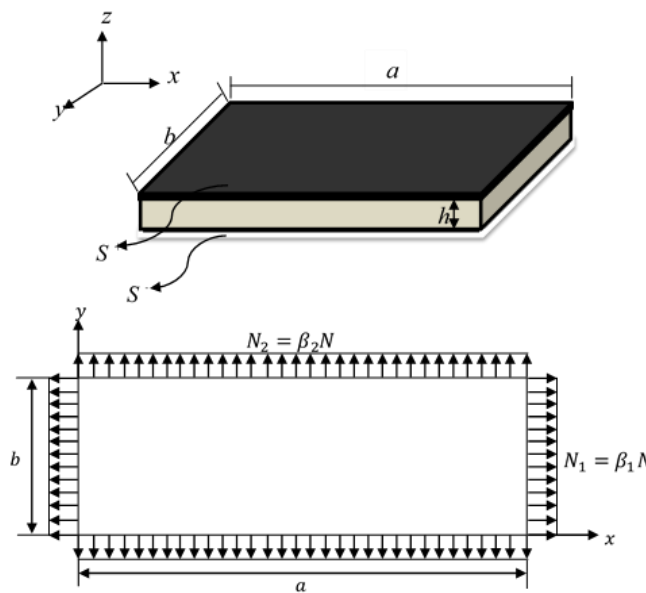


Figure 1. Schematic of the sandwich rectangular FG nanoplate

The Mori-Tanaka model [42] is used to define the material properties of FG plate of the core layer. Based on this model the variations of the Young’s modulus, Poisson’s ratio and mass density can be defined as Equation 1 [42].

$$\begin{aligned}
 E(z) &= \frac{9K(z)G(z)}{3K(z)+G(z)} \\
 \nu(z) &= \frac{3K(z)+2G(z)}{6K(z)+2G(z)} \\
 \rho(z) &= \rho_c V_c + \rho_m V_m
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

2.1. Displacement and constitutive relations

The modified shear deformation theories are employed to define the displacement relations. These theories are Exponential Shear Deformation Theory (ESDT), the Trigonometric Shear Deformation Theory (TSDT), the Hyperbolic Shear Deformation Theory (HSDT) and the Parabolic Shear Deformation Theory (PSDT). Based on these theories, displacement relations can be expressed as:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial x} + f(z)\phi(x, y, t) \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial y} + f(z)\psi(x, y, t) \\ w(x, y, z, t) &= w(x, y, t) \end{aligned} \quad (2)$$

Where, $f(z)$ for each theory is presented in table 1.

Table 1. $f(z)$ for each shear deformation theories

Theory	$f(z)$
Exponential Shear Deformation Theory (ESDT) [13]	$ze^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}$
Trigonometric Shear Deformation Theory (TSDT) [14]	$\frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)$
Hyperbolic Shear Deformation Theory (HSDT) [15]	$h \sin\left(\frac{z}{h}\right) - z \cosh\left(\frac{1}{2}\right)$
Parabolic Shear Deformation Theory (PSDT) [16]	$z \left(\frac{5}{4} - \frac{5z^2}{3h^2}\right)$

Now, using displacement relations the normal ($\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}$) and shear ($\varepsilon_{xy}, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz}$) strain components in the plate domain can be defined as follows:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3)$$

2.2. Constitutive equations

In this study, utilizing the Eringen's nonlocal elasticity theory and the Gurtin-Murdoch surface elasticity theory are employed to express the stress fields in the plate domain. Based on the nonlocal elasticity theory and the Gurtin-Murdoch surface elasticity theory, the constitutive equations of the core (indicated by the superscript b for bulk) and two surface layers (indicated by the superscript s) can be expressed as:

$$\begin{aligned} (1 - \bar{\mu}\nabla^2)\sigma_{ij}^b &= \lambda\varepsilon_{rr}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \\ (1 - \bar{\mu}\nabla^2)\sigma_{iz}^b &= 2\mu\varepsilon_{ij} \\ (1 - \bar{\mu}\nabla^2)\sigma_{ij}^s &= \tau_s\delta_{ij} + (\lambda_s + \tau_s)\varepsilon_{rr}\delta_{ij} + 2(\mu_s - \tau_s)\varepsilon_{ij} + \tau_s u_{i,j} \\ (1 - \bar{\mu}\nabla^2)\sigma_{iz}^s &= \tau_s u_{z,i} \end{aligned} \quad (4)$$

2.3. Governing Equations of Motion

Using Hamilton's principle, the governing equations of motion for the plate can be obtained.

$$\int_0^t (\delta T + \delta W - \delta U) dt = 0 \quad (5)$$

By calculating the strain energy and applying variations of the strain energy for the structure, the equilibrium equations can be expressed as follow:

$$\frac{\partial N_{xx}^{eq}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}^{eq}}{\partial y} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial N_{yy}^{eq}}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}^{eq}}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial^2 M_{xx}^{eq}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yy}^{eq}}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^{eq}}{\partial x \partial y} = +N_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial R_{xx}^{eq}}{\partial x} + \frac{\partial R_{xy}^{eq}}{\partial y} - Q_x^{eq} = 0$$

$$\frac{\partial R_{xx}^{eq}}{\partial y} + \frac{\partial R_{xy}^{eq}}{\partial x} - Q_y^{eq} = 0$$

The present study employs the Galerkin method to discretize the governing equations of motion. The admissible functions, representing the displacements u , v and w and rotations ϕ and ψ , which satisfy the simply supported boundary conditions at the four edges, are expanded as follows

The the equilibrium equations of the structure are solved using Galerkin method. The trial functions, representing the displacements u , v and w and rotations ϕ and ψ , which satisfy the simply supported boundary conditions at the four edges, are expanded as follows

$$\begin{aligned}
 U &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn} \cos(\gamma x) \sin(\beta y) e^{i\Omega t} \\
 V &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_{mn} \sin(\gamma x) \cos(\beta y) e^{i\Omega t} \\
 W &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin(\gamma x) \sin(\beta y) e^{i\Omega t} \\
 \phi &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \phi_{mn} \cos(\gamma x) \sin(\beta y) e^{i\Omega t} \\
 \psi &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{mn} \sin(\gamma x) \cos(\beta y) e^{i\Omega t}
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

Introducing the trial functions (7) in the equilibrium equations (6) leads to the characteristic equation of buckling, as follows:

$$([K] - N_{cr}[K_g])\{\Delta\} = \{0\} \tag{8}$$

3. Results and discussion

In this section, the presented results for effects of various parameter of surfaces on the buckling analysis of FG nanoplate are shown in figures and tables. It is assumed that the FG nanoplate is made of (Al/Al_2O_3) and (Al/Si) . The properties of materials are tabulated in table 2.

Table 2. Material properties

Material	Properties						
	$E(GPa)$	$\rho(Kg/m^3)$	ν	$\rho_s(Kg/m^3)$	$\tau_s(N/m)$	$\lambda_s(N/m)$	$\mu_s(N/m)$
Aluminum (Al)	70	2707	0.3	5.46×10^{-7}	0.9108	6.842	0.376
Alumina (Al_2O_3)	380	3800	0.3
Silicon (Si)	210	2331	0.3	3.17×10^{-7}	0.6048	-4.488	-2.774

3.1. Verification of model

Because there is no in the literature on the study about the dynamic characteristics of the FG nanoplates with surface effect, in this section the surface effect in the developed model is initially ignored to compare the results with those available in the literature

Table 3. Comparison of Non-dimensional critical buckling load ($\bar{N}_{cr} = N_{cr}(a^2/E_m h^3)$) for nanoplate with simply supported boundary condition for all edges (SSSS) under uniaxial loading ($\beta_1 = -1, \beta_2 = 0$)

a/b	a/h	Material Index (g)					
		Theory	0	1	2	5	10
0.5	5	RPT [44]	6.7203	3.4146	2.6451	2.1484	1.9213
		HSDT [43]	6.714	3.39	2.61	2.124	1.90
		ESDT [7]	6.7259	3.4188	2.6457	2.1446	1.9209
		ESDT (Present)	6.72594	3.41881	2.6457	2.14464	1.92089
10	5	RPT [44]	7.405	3.71	2.88	2.41	2.18
		HSDT [43]	7.397	3.70	2.87	2.40	2.18
		ESDT [7]	7.4069	3.7118	2.8898	2.4152	2.1894
		ESDT (Present)	7.40688	3.71175	2.88977	2.41516	2.18938

As it can be seen, there is a good agreement between the presented results in this research and those reported in the literature.

3.2. The effect of surface parameters on the critical buckling load

Firstly, the comparison between considering and neglecting the effect of surface parameters are shown in figures 2 and 3. The effect of different surface parameter such as surface residual stress, of surface elastic constants (λ_s and μ_s) and surface density on the the critical buckling load of FG nanoplate is presented. The results are depicted in figures 4-7.

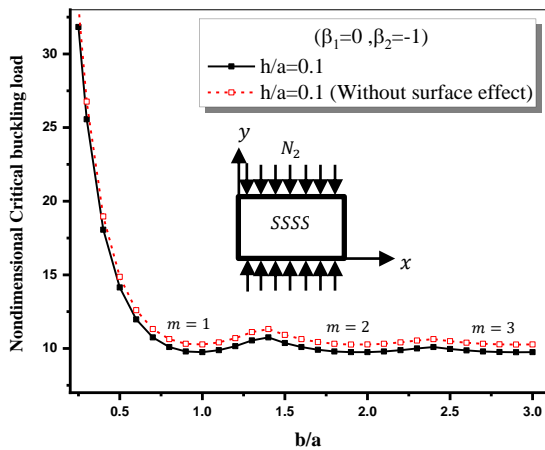


Figure 2. Comparison of Non-dimensional critical buckling load (\bar{N}_{cr}) for FG nanoplate with and without considering surface under uniaxial loading ($\beta_1 = 0, \beta_2 = -1$)

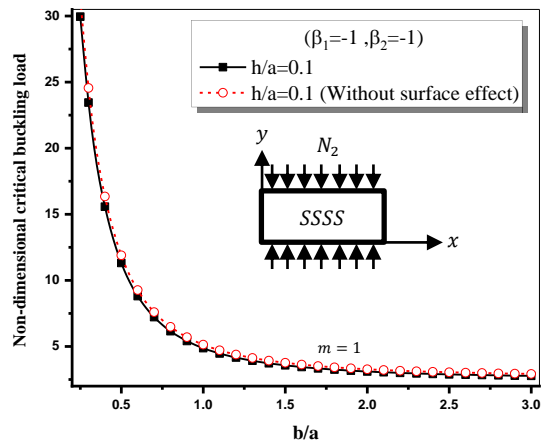


Figure 3. Comparison of Non-dimensional critical buckling load (\bar{N}_{cr}) for FG nanoplate with and without considering surface under Biaxial loading ($\beta_1 = -1, \beta_2 = -1$)

Based on the results presented in figure 2 and 3 we can conclude that considering the surface effects lead to decreasing the Non-dimensional critical buckling load. In fact, every material has different properties for surface parameters that each parameter has particular effect on the critical buckling load but in this research based on the properties that have been tabulated in table 1, the resultant effect of surface parameter leads to decreasing the critical buckling load.

From figures 4 and 5 we can find that Non-dimensional critical buckling load decrease by increasing the surface residual stress for pure ceramic side of the FG nanoplate (τ_{sc}). Similarly, increasing the surface residual stress for pure ceramic side of the FG nanoplate (τ_{sc}) lead to decreasing the Non-dimensional critical buckling load. In fact, by increasing the surface residual stress the level of the strain energy will decrease and as a result the flexibility of the FG nanoplate will increase. It is obvious that the critical buckling load will be decrease when the FG nanoplate is more flexible.

It can be seen from figure 6 and 7 that for a constant value for b/a , Non-dimensional critical buckling load has a larger value when the $\lambda_s + 2\mu_s$ is positive rather than negative values for $\lambda_s + 2\mu_s$. Actually, for positive values of surface elastic constant, the level of the strain energy increase. Therefore, the plate becomes stiffer rather than the situation that surface elastic constant have negative values.

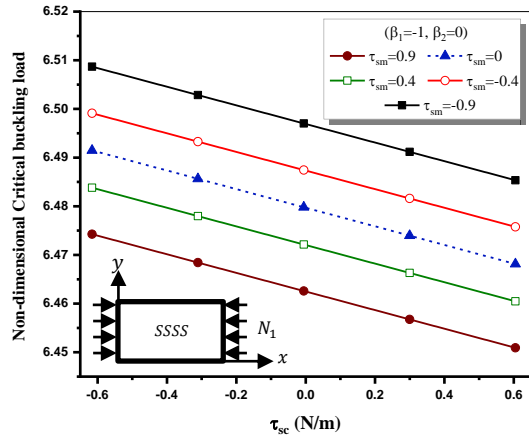


Figure 4. Effect of surface residual stress of pure ceramic side on the Non-dimensional critical buckling load (\bar{N}_{cr}) for FG nanoplate under uniaxial loading ($\beta_1 = -1, \beta_2 = 0$) considering ($g = 1, \bar{\mu} = 0, h/a = 0.1, b/a = 1$)

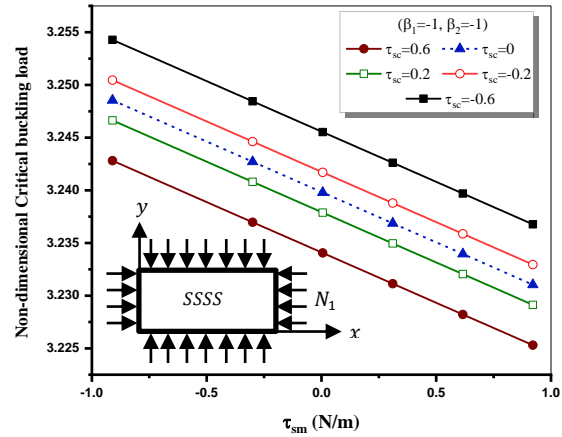


Figure 5. Effect of surface residual stress of pure metal side on the Non-dimensional critical buckling load (\bar{N}_{cr}) for FG nanoplate under uniaxial loading ($\beta_1 = -1, \beta_2 = -1$) considering ($g = 1, \bar{\mu} = 0, h/a = 0.1, b/a = 1$)

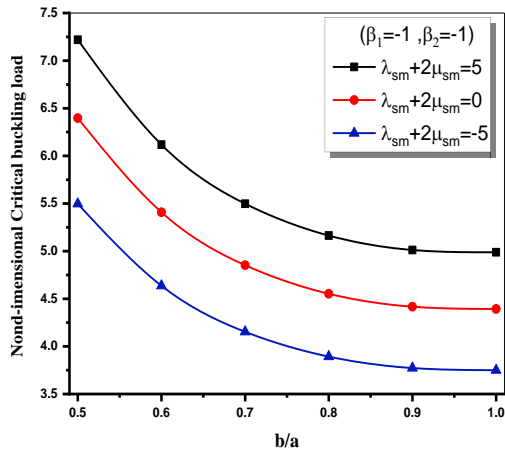


Figure 6. Effect of surface elastic constants of pure metal side on the Non-dimensional critical buckling load (\bar{N}_{cr}) for FG nanoplate under biaxial loading ($\beta_1 = -1, \beta_2 = -1$) considering ($g = 1, \bar{\mu} = 0, h/a = 0.1, b/a = 1$)

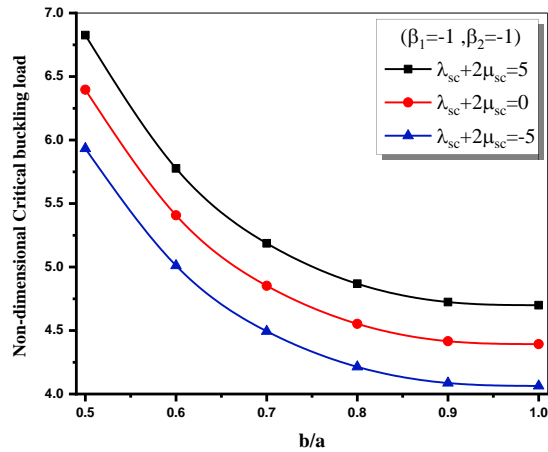


Figure 7. Effect of surface elastic constants of pure ceramic side on the Non-dimensional critical buckling load (\bar{N}_{cr}) for FG nanoplate under biaxial loading ($\beta_1 = -1, \beta_2 = -1$) considering ($g = 1, \bar{\mu} = 0, h/a = 0.1, b/a = 1$)

4. conclusion

In this paper the effects of various parameter of surfaces on the Functionally Graded Nanoplate are investigated. It can be concluded from results that increasing the surface residual stress and choosing the negative values for lead to decreasing the level of the strain energy. Therefore, critical buckling load will be decrease. Because of the type of the analysis of buckling that is static analysis, the kinetic energy will be zero. Thus, the density of the surfaces doesn't have any effects on the critical buckling load. If we want to conclude about overall effects of surface parameters we should say that, considering the surface effects lead to decreasing the Non-dimensional critical buckling load. In fact, every material has different properties for surface parameters that each parameter has particular effect on the critical buckling load but in this research based on the properties that have been tabulated in table 1, the resultant effect of surface parameter leads to decreasing the critical buckling load.



تحلیل کمانش نانو ورق هدفمند تک جهته مستطیلی با در نظر گرفتن اثر سطح

کوروش خورشیدی^{الف*}، محسن قاسمی^ب، مهدی بهرامی^ج^{الف} دانشیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه اراک، اراک، ایران، k-khorshidi@araku.ac.ir^ب کارشناسی ارشد، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه اراک، اراک، ایران، ghasemimohsen2080@yahoo.com^ج کارشناسی ارشد، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه اراک، اراک، ایران، mahdi.bahrami558@gmail.com

چکیده	واژگان کلیدی
در مقاله حاضر، کمانش نانو ورق‌های تابعی مدرج مستطیلی با در نظر گرفتن اثر سطح بررسی شده است. به منظور تعریف خواص مواد از مدل موری-تاناکا بهره برده شده است که بر اساس این مدل خواص به طور پیوسته در راستای ضخامت تغییر می‌کند. میدان جابجایی با استفاده از تئوری‌های تغییر شکل برشی اصلاح شده به دست آمده‌اند که در این تئوری‌ها برخلاف تئوری کلاسیک ورق‌ها اثر اینرسی دورانی و تغییر شکل‌های برشی عرضی در نظر گرفته شده است. جهت در نظر گرفتن اثرات مذکور از توابع مختلف مانند توابع نمایی، مثلثاتی، هایپربولیکی و پارابولیکی در راستای ضخامت بهره گرفته شده است. برای در نظر گرفتن اثرات غیر محلی و اثرات سطح به ترتیب از تئوری‌های الاستیسیته‌ی غیر محلی و تئوری الاستیسیته‌ی سطح استفاده شده است. معادلات حاکم بر حرکت با استفاده از اصل همیلتون به دست آمده‌اند و از روش حل گلرکین جهت حل این معادلات استفاده شده است. برای بررسی صحت نتایج به دست آمده، نتایج حاصل از این تحقیق با نتایج منتشر شده در مقالات معتبر مقایسه شده است. در انتها اثر پارامترهای مرتبط با اثر سطوح مانند تنش باقیمانده سطح، ثوابت الاستیسیته‌ی سطح و همچنین پارامترهایی مانند نسبت ضخامت به طول، نسبت عرض به طول، اندیس توانی، پارامتر غیر محلی بر روی بار بحرانی کمانش سیستم بررسی می‌گردد.	اثر سطح، کمانش، نانو ورق تابعی مدرج، تئوری الاستیسیته‌ی سطح، تئوری الاستیسیته‌ی غیر محلی.
	تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۱۰/۲۶
	تاریخ بازنگری: ۱۴۰۱/۱۱/۱۶
	تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۱۲/۲۸

۱- مقدمه

در دهه‌های اخیر به دلیل کاربرد وسیع ورق‌ها در صنایع مختلف مطالعه‌ی رفتار دینامیکی و استاتیکی آن‌ها بیش مورد استفاده قرار گرفته است [۱-۵]. شامل با توجه به پیشرفت‌های روزافزون در صنایع هوافضا و صنایع نیروگاهی، نیاز به ورق‌هایی که دارای مقاومت بالا در برابر حرارت و بارهای مکانیکی داشته باشند نیز افزایش یافته است. ورق‌هایی که از مواد تابعی مدرج^۱ (FGM) ساخته شده‌اند دارای دو سطح با خواص متفاوت می‌باشند که خواص به تدریج از یک سو به سوی دیگر ورق تغییر می‌کند. به طور معمول این ورق‌ها از جنس فلز-سرامیک ساخته می‌شوند که این امر باعث می‌شود که یک سمت ورق که دارای جنس فلزی می‌باشد در برابر بارهای مکانیکی مقاومت بالایی داشته باشد و سمت دیگر ورق که از جنس سرامیک می‌باشد در برابر حرارت مقاومت بالایی از خود نشان دهد. با توجه به مقدمه ذکر شده در مورد نیاز صنایع مختلف به ورق‌هایی که در برابر حرارت و بارهای مکانیکی مقاومت مطلوبی داشته باشند موجب شده است تا بررسی ارتعاش و کمانش ورق‌های تابعی مدرج بیش

¹ Functionally Graded Materials

از پیش مورد توجه محققان قرار گیرد [۶-۹].

به طور کلی جهت تحلیل ورق‌ها تئوری‌های مختلفی وجود دارد که از جمله آن‌ها می‌توان به تئوری کلاسیک ورق^۲ (CPT) [۱۰] و تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول^۳ (FSDT) [۱۱] اشاره کرد. تئوری کلاسیک ورق به دلیل در نظر نگرفتن تغییر شکل‌های برشی عرضی برای ورق‌های با ضخامت بالا دقت بالایی ندارد. تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول به دلیل در نظر گرفتن کرنش‌های برشی عرضی و اثر اینرسی دورانی به پاسخ‌هایی با دقت بالاتر منتهی می‌شود ولی از آنجایی که تنش‌های برشی در سطوح آزاد ورق صفر در نظر گرفته نشده است، این تئوری نیاز به ضریب تصحیح برشی^۴ دارد. جهت رفع مشکل عنوان شده در تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، تئوری‌های مانند تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم^۵ (TSDT) [۱۲] و تئوری‌های اصلاح شده دیگری مانند تئوری‌های تغییر شکل برشی نمایی^۶ [۱۳]، مثلثاتی^۷ [۱۴]، هایپربولیکی^۸ [۱۵]، پارابولیکی^۹ [۱۶] ارائه شده‌اند. در ادامه به برخی از تحقیقاتی که بر روی ورق‌ها با استفاده از تئوری‌های مذکور صورت پذیرفته اشاره شده است. جواهری و اسلامی [۱۷، ۱۸] به تحلیل رفتار کمانش ورق‌های تابعی مدرج با استفاده از تئوری کلاسیک ورق‌ها پرداختند. آن‌ها بار بحرانی کمانش را تحت چهار نوع بارگذاری حرارتی مختلف [۱۷] و بارگذاری‌های فشاری [۱۸] بررسی کردند. حسینی هاشمی و همکاران [۱۹] با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول کمانش ورق‌های مستطیلی با در نظر گرفتن بارهای درون صفحه‌ای مختلف را مورد بررسی قرار دادند. ژانگ و همکاران [۲۰] نیز کمانش ورق‌های تابعی مدرج را تحت بارگذاری حرارتی و مکانیکی بررسی کرده‌اند. تئوری مورد استفاده آن‌ها تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول بر اساس فرمول‌بندی شکل ضعیف پتروف-گلرکین محلی^{۱۰} بوده است. تای و کیم [۲۱] به فرمول‌بندی جدید برای تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم بر اساس سطح خنثی پرداختند و از این تئوری برای تحلیل کمانش ورق تابعی مدرج مستقر بر بستر الاستیک استفاده کردند. آن‌ها در این تحقیق از روش حل لوی برای حل معادلات حرکت و از مدل پسترناک^{۱۱} برای شبیه‌سازی بستر الاستیک استفاده کردند. مای چی و همکاران [۲۲] تئوری جدید تغییر شکل برشی هایپربولیکی را ارائه کرده‌اند و از این تئوری برای تحلیل کمانش ورق‌های تابعی مدرج ساندویچی استفاده کرده‌اند. برخلاف دیگر تئوری‌ها در این تئوری تعداد معادلات حرکت به دست آمده چهار معادله بوده است زیرا این تئوری دارای چهار ضریب مجهول بوده است. مظفری و ایوب [۲۳] به تحلیل کمانش ورق‌های تابعی مدرج با شرط مرزی چهار طرف تکیه‌گاه ساده با استفاده از تئوری‌های مرتبه بالای تغییر شکل برشی پرداختند. در تحقیق آن‌ها فرض شده است که ضخامت ورق به صورت خطی تغییر می‌کند و آن‌ها تأثیر این تغییرات روی کمانش ورق تابعی مدرج را بررسی کردند.

به دلیل اینکه در مقیاس نانو اثر اندازه قابل توجه می‌باشد جهت بررسی این اثر به طور کلی دو روش وجود دارد. روش اول که شبیه‌سازی اتمی و روش تجربی می‌باشد ولی این روش‌ها بسیار پیچیده، پرهزینه و زمان بر می‌باشند. روش دوم استفاده از روابط مکانیک محیط پیوسته می‌باشد که روشی مناسب برای جایگزینی روش اول می‌باشد. در میان تئوری‌های مکانیک محیط پیوسته، می‌توان به تئوری محیط پیوسته کلاسیک اشاره کرد. از آنجایی که در این تئوری اثر اندازه در نظر گرفته نشده است بنابراین جهت مطالعه رفتار مکانیکی نانو ساختارها نمی‌تواند مفید باشد. جهت رفع این مشکل تئوری‌های دیگری ارائه شده است که از جمله آن‌ها می‌توان به تئوری گرادیان کرنش^{۱۲} [۲۴]، تئوری تنش کوپل^{۱۳} [۲۵]، تئوری الاستیسیته‌ی غیر محلی ارینگن^{۱۴} [۲۶-۲۸] اشاره کرد. خورشیدی فلاح [۷، ۲۹] به تحلیل کمانش نانو ورق‌های تابعی مدرج با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی نمایی پرداختند. آن‌ها در این تحقیق از تئوری الاستیسیته‌ی غیر محلی جهت در نظر گرفتن تأثیر مقیاس روی کمانش نانو ورق استفاده کردند. همچنین خورشیدی و همکاران [۸] تحلیل کمانش میکرو ورق‌های تابعی مدرج در محیط حرارتی با استفاده از تئوری

² Classical Plate Theory

³ First Order Shear Deformation Theory

⁴ Shear correction factor

⁵ Third Order Shear Deformation Theory

⁶ Exponential shear deformation theory

⁷ Trigonometric shear deformation theory

⁸ Hyperbolic shear deformation theory

⁹ parabolic shear deformation theory

¹⁰ Local Petrov-Galerkin weak-formulation

¹¹ Pasternak model

¹² Strain gradient theory

¹³ Couple stress theory

¹⁴ Eringen's Nonlocal elasticity theory

تغییر شکل برشی نمایی را ارائه کردند. آن‌ها در این تحقیق از تئوری تنش کوپل اصلاح شده جهت در نظر گرفتن اثرات اندازه استفاده کردند.

از آنجایی که هدف اصلی این مقاله بررسی اثرات ناشی از سطوح بر با بحرانی کمانش نانو ورق می‌باشد در این قسمت به اهمیت بررسی این موضوع پرداخته شده است. در واقع تأثیری که محیط اطراف یک جسم روی اتم‌های موجود در سطح آزاد آن جسم می‌گذارد با تأثیری که روی اتم‌های موجود در قسمت حجم میانی جسم می‌گذارد متفاوت می‌باشد. از سوی دیگر عملیات مکانیکی مختلف از جمله بریدن اجسام، تراشکاری و... که منجر به به وجود آمدن یک سطح آزاد می‌شوند، باعث شکسته شدن پیوند اتم‌ها در آن سطح می‌شوند. که این شکسته شدن اتم‌ها باعث آزاد شدن انرژی می‌شود. علاوه بر این برای به وجود آمدن پیوند جدید بین اتم‌های موجود در سطح مقداری انرژی صرف می‌شود. به کار انجام شده برای تشکیل سطح از اتم‌های موجود، انرژی سطح گفته می‌شود. علاوه بر انرژی سطح مفاهیم دیگری در رابطه با سطح وجود دارند که از جمله آن‌ها می‌توان به تنش سطح و خواص الاستیسیته‌ی سطح اشاره کرد. تنش سطح در واقع نیروی اعمال شده بر واحد سطح است که برای کشش الاستیک در سطح مورد نیاز است. همان‌طور که در تعریف دو مفهوم انرژی و تنش سطح مشخص است در جامدات بین این دو مفهوم تفاوت‌های اساسی وجود دارد. نکته‌ی قابل توجه دیگر تفاوت خواص الاستیسیته در سطوح اجسام و قسمت حجم میانی آن‌ها می‌باشد. سطوح اجسام به دلیل فعالیت‌های مکانیکی مختلف از قبیل تراشکاری، فرزکاری، سخت کاری و... دارای خواص مکانیکی متفاوتی نسبت به سایر قسمت‌های آن اجسام می‌باشند. در واقع برخی خواص الاستیسیته‌ی سطوح مانند مدول یانگ، ثابت لامه و چگالی با انجام فعالیت‌های مکانیکی ذکر شده در بالا دچار تغییر می‌شوند. علاوه بر فعالیت‌های مکانیکی مختلف عوامل دیگری نیز مانند تقابل سطوح با محیط اطراف و تأثیر پدیده‌های مختلف از جمله اصطکاک، انتقال حرارت و بارگذاری‌های مختلف می‌توانند خواص الاستیسیته‌ی سطوح را تغییر دهند.

در اجسامی که تعداد اتم‌های موجود در سطح آن‌ها در مقایسه با کل اتم‌های جسم کم و ناچیز می‌باشند تأثیرات مرتبط با سطح که در بالا ذکر شدند قابل نظر کردن هستند. در صورتی که برای اجسامی که دارای نسبت سطح به حجم زیادی می‌باشند و در حقیقت تعداد اتم‌های موجود در سطح در مقایسه با کل اتم‌های آن‌ها قابل ملاحظه می‌باشد، تأثیرات مرتبط با سطح دیگر قابل چشم‌پوشی نمی‌باشند. حال با در نظر گرفتن این موضوع که در مقیاس طول نانومتری نسبت سطح به حجم زیاد می‌باشد می‌توان دریافت که در این مقیاس خواص مربوط به سطح نقش تأثیرگذاری بر رفتار ماده خواهند داشت. اثرات مختلف سطح روی رفتار مواد در تئوری الاستیسیته‌ی کلاسیک در نظر گرفته نشده است بنابراین این تئوری نیازی به اصلاح دارد تا بتواند این اثرات را لحاظ کند. از همین رو گرتین و مرداچ^{۱۵} تئوری الاستیسیته‌ی اصلاح شده را ارائه کردند [۳۰، ۳۱]. در ادامه به تحقیقاتی که در سال‌های اخیر در زمینه‌ی اثر سطح بر روی ورق‌ها انجام شده است پرداخته شده است. لو و همکاران [۳۲] یک تئوری برای ورق‌های نازک ارائه کرده‌اند که در این تئوری آن‌ها تأثیرات مرتبط با سطح و اندازه را در نظر گرفته‌اند. آن‌ها برای سادگی کار این تئوری را بر اساس روابط الاستیسیته‌ی خطی نوشته‌اند ولی این قابلیت گسترش برای جابجایی‌های غیرخطی را نیز داشته است. انصاری و سهمانی [۳۳] تأثیر تنش سطح را روی ارتعاش آزاد نانو ورق‌ها بررسی کردند. آن‌ها از تئوری الاستیسیته‌ی سطح گرتین-مرداچ جهت در نظر گرفتن روابط مربوط به تنش سطح استفاده کردند. معادلات حرکت را نیز بر اساس تئوری‌های کلاسیک ورق‌ها و تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول به دست آوردند. اسدی [۳۴] حل تحلیلی برای مطالعه‌ی ارتعاش اجباری نانو ورق‌های مستطیلی تحت بارگذاری خارجی را ارائه داد. او در این تحقیق اثر خواص سطح شامل تنش باقیمانده سطح، خواص الاستیسیته‌ی سطح و چگالی وزنی سطح را روی فرکانس طبیعی نانو ورق‌های مستطیلی بررسی کرد. او از تئوری الاستیسیته‌ی سطح گرتین-مرداچ و تئوری تعمیم‌یافته‌ی کیر-شلف جهت به دست آوردن معادلات بهره برد. وانگ و وانگ [۳۵] یک مدل اجزا محدود پیوسته برای مطالعه خمش و ارتعاش نانو ورق‌ها در نظر گرفتن اثر سطح ارائه دادند. آن‌ها جهت حل معادلات حاکم از روش گلرکین^{۱۶} استفاده کردند و با بررسی نتایج خود دریافتند که تأثیر خواص سطح روی رفتار نانو ورق‌ها وابسته به نوع شرایط مرزی اعمال شده بر آن‌ها دارد. راقو و همکاران [۳۶] به تحلیل ورق‌های کامپوزیتی لایه‌ای با در نظر گرفتن

¹⁵ Gurtin and Murdoch

¹⁶ Galerkin Method

اثر سطح پرداختند. آن‌ها در این مطالعه از تئوری الاستیسیته‌ی غیر محلی ارینگن جهت در نظر گرفتن تأثیر اندازه و از تئوری الاستیسیته‌ی سطح گرتین-مرداچ جهت در نظر گرفتن اثرات سطح استفاده کردند. معادلات دیفرانسیل با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم ردی نوشته شده و جهت حل آن‌ها روش حل نویر^{۱۷} بهره بردند. کریمی و شهیدی [۳۷] تحلیل ارتعاش نانو ورق‌ها تحت نیروهای حرارتی، مکانیکی و مغناطیسی با در نظر گرفتن اثر سطح موضوع تحقیقشان بوده است. در این تحقیق تأثیر بستر الاستیک وینکلر^{۱۸} نیز بر رفتار نانو ورق‌ها بررسی شده است. اتیا [۳۸] تحلیل کاملی شامل تحلیل خمش، ارتعاش و کمانش نانو تیرهای تابعی مدرج را ارائه داده است. تئوری مورد استفاده او در این تحقیق جهت نوشتن معادلات حرکت حاکم بر تیر، تئوری اویلر برنولی بوده و جهت تحلیل اثر اندازه از تئوری تنش کوپل اصلاح شده استفاده کرده است. از تئوری گرتین-مرداچ جهت تحلیل تأثیر خواص الاستیسیته‌ی سطح روی رفتار نانو تیر بهره برده است. وانگ و همکاران [۳۹] تأثیر انرژی سطح را روی ارتعاش غیرخطی نانو ورق‌های کامپوزیتی لایه‌ای بررسی کردند. آن‌ها در تحقیق خود دریافتند که دامنه‌ی ارتعاش غیرخطی با در نظر گرفتن انرژی سطح نسبت به حالتی که انرژی سطح را در نظر نگرفته بودند کمتر شده است. همچنین اثر انرژی سطح برای نانو ورق‌ها با لایه‌های بیشتر چشم‌گیرتر خواهد بود. ژو و همکاران [۴۰] نیز به تحلیل اثر انرژی سطح روی رفتار کمانش نانو پوسته‌های تابعی مدرج استوانه‌ای پرداختند. آن‌ها در این تحلیل در نظر گرفتند که در بالا و پایین نانو پوسته دو میکرو لایه‌ی پیزوالکتریک قرار دارد و جهت به دست آوردن معادلات حرکت حاکم بر نانو پوسته از تئوری کلاسیک پوسته‌ها استفاده کردند. لو و همکاران [۴۱] اثرات کوپل تنش غیر محلی، گرادیان کرنش و انرژی سطح را روی پاسخ دینامیکی نانو ورق‌ها بررسی کرده‌اند. آن‌ها در این مطالعه جهت نشان دادن اثرات تنش غیر محلی و گرادیان کرنش از تئوری گرادیان کرنش غیر محلی استفاده کرده‌اند در حالی که برای در نظر گرفتن اثرات سطح از تئوری الاستیسیته‌ی سطح بهره برده‌اند.

با توجه به مقدمه ذکر شده و بررسی کلیه پژوهش‌هایی که در زمینه‌ی مطالعه اثر سطح بر روی ورق‌ها در بخش‌های پیشین عنوان شده است می‌توان گفت که در مقاله حاضر برای اولین بار به مطالعه کمانش نانو ورق تابعی مدرج مستطیلی با در نظر گرفتن اثر سطح پرداخته شده است. برای این منظور از تئوری‌های تغییر شکل برشی اصلاح شده‌ی مختلف با به کارگیری تئوری الاستیسیته‌ی غیر محلی ارینگن بهره گرفته شده است. تئوری مورد استفاده جهت در نظر گرفتن اثر سطح تئوری الاستیسیته‌ی سطح گرتین-مرداچ می‌باشد. معادلات حرکت حاکم با استفاده از اصل همپلتون^{۱۹} به دست آمده و روش مورد استفاده جهت حل این معادلات روش گلرکین می‌باشد.

۲- روابط حاکم بر مواد تابعی مدرج

همان‌گونه که عنوان شد نانو ورق مورد مطالعه در این پژوهش از مواد تابعی مدرج ساخته شده است. به طوری که قسمت پایین ورق از جنس سرامیک خالص و قسمت بالایی ورق از جنس فلز خاص می‌باشد. خواص مواد در راستای ضخامت از سرامیک به فلز به صورت پیوسته تغییر می‌کنند. در واقع چگونگی تغییرات خواص شامل مدول یانگ، چگالی و نسبت پواسون در راستای ضخامت دارای اهمیت می‌باشد. برای مدل کردن نحوه‌ی تغییرات خواص مواد از مدل‌های مختلفی استفاده می‌شود که مدل مورد استفاده در این تحقیق مدل موری-تاناکا می‌باشد. این مدل در سال ۱۹۷۳ توسط موری و تاناکا [۴۲] ارائه شد که بر اساس آن کسر حجمی سرامیک و فلز بر اساس تابع توانی به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$V_c = \left(\frac{z}{h} + 0.5\right)^g \quad (1)$$

$$V_c + V_m = 1$$

که در رابطه‌ی بالا V_c و V_m به ترتیب کسر حجمی سرامیک و فلز، g اندیس توانی و h ضخامت ورق می‌باشند. در مدل موری-تاناکا مدول بالک $K(z)$ و مدول برشی $G(z)$ مؤثر به صورت روابط ۲ و ۳ تعریف می‌شوند.

$$\frac{K(z) - K_m}{K_c - K_m} = \frac{V_c}{1 + V_m \frac{3(K_c - K_m)}{3K_m + 4G_m}} \quad (2)$$

¹⁷ Navier Solution Method

¹⁸ Winkler Elastic Foundation

¹⁹ Hamilton's Principle

$$\frac{G(z) - G_m}{G_c - G_m} = \frac{V_c}{1 + V_m \frac{G_c - G_m}{G_m + F(z)}} \quad (۳)$$

که در رابطه‌ی (۳) داریم:

$$F(z) = \frac{G_m(9K_m + 8G_m)}{6K_m + 12G_m} \quad (۴)$$

بنابراین با توجه به روابط بالا مدول یانگ، نسبت پواسون و ضریب انبساط حرارتی به صورت روابط ۵ تا ۷ تعریف می‌شوند:

$$E(z) = \frac{9K(z)G(z)}{3K(z) + G(z)} \quad (۵)$$

$$\nu(z) = \frac{3K(z) + 2G(z)}{6K(z) + 2G(z)} \quad (۶)$$

$$\frac{\alpha(z) - \alpha_m}{\alpha_c - \alpha_m} = \frac{\frac{1}{K(z)} - \frac{1}{K_m}}{\frac{1}{K_c} - \frac{1}{K_m}} \quad (۷)$$

به علاوه چگالی وزنی نیز بر اساس مدل قانون توانی به صورت رابطه‌ی ۸ تعریف می‌شود:

$$\rho(z) = \rho_c V_c + \rho_m V_m \quad (۸)$$

در روابط (۲) تا (۸) اندیس m و c به ترتیب بیانگر فلز و سرامیک می‌باشند.

۳- تئوری الاستیسیته‌ی غیر محلی

جهت تحلیل کمانش ورق‌های تابعی مدرج با در نظر گرفتن اثر سطوح می‌بایستی از تئوری‌هایی استفاده کرد که اثرات اندازه و سطوح در آن‌ها در نظر گرفته شده باشد. در مکانیک محیط‌های پیوسته (تئوری الاستیسیته‌ی محلی) اثرات مقیاس در نظر گرفته نشده است زیرا در این تئوری به جای آنکه مواد به صورت ذرات گسسته مدل شوند، به صورت یک جسم یکپارچه که هیچ فاصله‌ای بین ذرات (اتم‌ها) آن وجود ندارد مدل شده است. در واقع در مقیاس اتمی اندرکنش‌های بین مولکولی و تنش‌های به وجود آمده سبب می‌شود تا اثرات اندازه و سطوح غیر قابل چشم‌پوشی باشند. جهت در نظر گرفتن اثرات مذکور در تحلیل رفتار دینامیکی ورق‌ها از تئوری الاستیسیته‌ی غیر محلی استفاده می‌شود. در تئوری الاستیسیته‌ی غیر محلی اثر محیط اطراف به نقطه در نظر گرفته می‌شود در حالی که در تئوری الاستیسیته‌ی محلی رفتار محلی یک نقطه بدون در نظر گرفتن محیط اطراف می‌باشد. در مقیاس نانو به دلیل آنکه اثرات اتم‌های مجاور بر روی یک اتم قابل چشم‌پوشی نمی‌باشد. از این رو تئوری الاستیسیته‌ی غیر محلی به پاسخ‌هایی با دقت بالا برای رفتار دینامیکی ورق‌ها منجر خواهد شد.

در تئوری الاستیسیته‌ی غیر محلی، تنش در هر نقطه از جسم علاوه بر کرنش در همان نقطه، به کرنش در محیط اطراف نیز وابسته می‌باشد. بنابراین در این تئوری، تنش به صورت زیر تعریف می‌شود [۲۶].

$$\sigma_{ij}(x) = \int_V H(|x' - x|) \sigma_{ij}^c(x') dV(x') \quad (۹)$$

که در رابطه بالا، x نقطه‌ای از جسم است که تحت تأثیر میدان تنش می‌باشد، x' نقطه‌ای دیگر از جسم هست و V معرف حجمی از جسم می‌باشد که روی آن انتگرال گرفته می‌شود. تانسور تنش محلی و تابع غیر محلی به ترتیب $\sigma_{ij}^c(x')$ و $H(|x' - x|)$ می‌باشند که به طول مشخصه‌ی داخلی وابسته است. با در نظر گرفتن اینکه تابع غیر محلی به عنوان یک تابع گرین از عملگر دیفرانسیلی خطی می‌باشد داریم:

$$LH(|x' - x|) = \delta(|x' - x|) \quad (۱۰)$$

که در رابطه ۱۰، δ دلتای دیراک و L عملگر دیفرانسیلی خطی می‌باشند. با جایگذاری رابطه ۲ در رابطه ۱ به یک فرم

دیفرانسیلی اولیه به فرم رابطه‌ی ۱۱ دست می‌یابیم.

$$L\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^c \quad (11)$$

رابطه‌ی تعادل برای یک جسم الاستیک، به صورت رابطه ۱۲ تعریف می‌شود.

$$\sigma_{ijj} + f_i = \rho(z)\ddot{u}_i \quad (12)$$

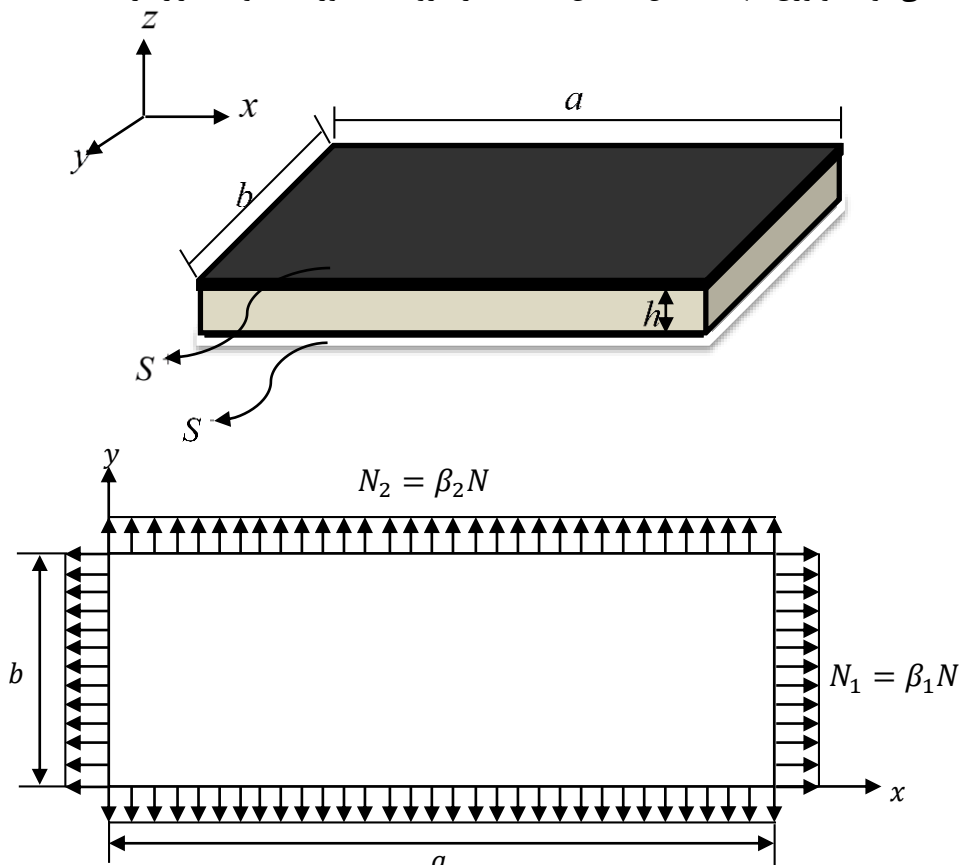
که در این رابطه ρ چگالی، f_i نیروهای حجمی و u_i بردار جابجایی می‌باشند. مدل غیر محلی با استفاده از عملگر دیفرانسیلی خطی L تعریف می‌شود که در حالت دوبعدی به صورت رابطه‌ی ۱۳ می‌باشد.

$$L = 1 - \mu^2 \nabla^2 \quad (13)$$

که ∇^2 عملگر لاپلاسین بوده و در مختصات کارتزین به صورت $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ تعریف می‌شود. $\mu = e_0 a$ نیز پارامتر غیر محلی بوده که a طول مشخصه داخلی و e_0 ثابت ماده است که از طریق آزمایش اندازه‌گیری می‌شود.

۴- تحلیل کمانش نانو ورق تابعی مدرج با در نظر گرفتن اثر سطح

جهت تحلیل کمانش نانو ورق تابعی مدرج بر اساس تئوری الاستیسیته‌ی غیر محلی با در نظر گرفتن اثر سطح، نانو ورق با طول a ، عرض b و ضخامت h مطابق شکل ۱-الف در نظر گرفته شده است. دو سطح در نظر گرفته شده در بالا (S^+) و پایین (S^-) ورق جهت بررسی اثر سطح می‌باشند و در واقع ضخامت این دو سطح بسیار ناچیز بوده و صرفاً جهت درک راحت‌تر به این صورت نمایش داده شده‌اند. دستگاه مختصات کارتزین x ، y و z بر لایه‌ی میانی ورق مستقر شده است. در شکل ۱-ب نیز همان‌طور که ملاحظه می‌شود نانو ورق جهت تحلیل کمانش تحت تأثیر نیروهای محوری N_1 و N_2 قرار گرفته است.



شکل ۱-الف) هندسه نانو ورق تابعی مدرج مستطیلی (ب) نمایش یک نانو ورق تحت تأثیر نیروهای درون صفحه‌ای

روابط جابجایی در سه راستای x ، y و z بر اساس تئوری تغییر شکل برشی نمایی [۱۳]، مثلثاتی [۱۴]، هایپربولیکی [۱۵]، پارابولیکی [۱۶] به صورت روابط ۱۴ تا ۱۶ بیان می‌شوند.

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial x} + f_i(z)\phi(x, y, t) \quad (14)$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial y} + f_i(z)\psi(x, y, t) \quad (15)$$

$$W(x, y, z, t) = w(x, y, t) \quad (16)$$

که در روابط بالا t بیانگر زمان، u و v جابجایی ورق به ترتیب در راستای محورهای x و y و W جابجایی عرضی ورق در راستای محور z می‌باشد. همچنین u_0 و v_0 جابجایی‌های درون صفحه‌ای به ترتیب در راستای محورهای x و y می‌باشند. ϕ و ψ نیز اینرسی دورانی به ترتیب حول محورهای x و y می‌باشند. $f_i(z)$ نیز برای تئوری‌های مختلف تغییر شکل برشی در جدول ۱ ارائه شده است.

جدول ۱ تئوری‌های مختلف تغییر شکل برشی

$f_i(z)$	تئوری
$ze^{-2(\frac{z}{h})^2}$	تئوری تغییر شکل برشی نمایی [۱۳]
$\frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)$	تئوری تغییر شکل برشی مثلثاتی [۱۴]
$h \sin\left(\frac{z}{h}\right) - z \cosh\left(\frac{1}{2}\right)$	تئوری تغییر شکل برشی هایپربولیکی [۱۵]
$z\left(\frac{5}{4} - \frac{5z^2}{3h^2}\right)$	تئوری تغییر شکل برشی پارابولیکی [۱۶]

با توجه به اینکه روابط کرنش جابجایی به صورت رابطه‌ی ۱۷ نوشته می‌شود، کرنش‌های عمودی و کرنش‌های برشی مانند روابط ۱۸ تا ۲۲ نوشته خواهند شد.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (17)$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x}(x, y, t) - z \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial x^2} + f_i(z) \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y, t) \quad (18)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial x}(x, y, t) - z \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial y^2} + f_i(z) \frac{\partial \psi}{\partial x}(x, y, t) \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}(x, y, t) - z \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial x^2} + f_i(z) \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y, t) + \frac{\partial v_0}{\partial x}(x, y, t) \right. \\ &\quad \left. - z \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial y^2} + f_i(z) \frac{\partial \psi}{\partial x}(x, y, t)\right) \end{aligned} \quad (20)$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{df_i(z)}{dz} \phi(x, y, t) + \frac{\partial w}{\partial x}(x, y, t)\right) \quad (21)$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{df_i(z)}{dz} \psi(x, y, t) + \frac{\partial w}{\partial y}(x, y, t)\right) \quad (22)$$

۴-۱- روابط ساختاری برای نانو ورق تابعی مدرج

روابط ساختاری برای نانو ورق بر اساس تئوری الاستیسیته‌ی غیر محلی ارینگن [۲۶-۲۸] به صورت رابطه‌ی ۲۳ بیان می‌شود:

$$(1 - \bar{\mu} \nabla^2) \sigma_{\alpha\beta} = \lambda \varepsilon_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} + 2\mu \varepsilon_{\alpha\beta} \quad (23)$$

$$(1 - \bar{\mu} \nabla^2) \sigma_{\alpha z} = 2\mu \varepsilon_{\alpha\beta}$$

روابط بین تنش و کرنش برای حجم میانی با توجه به رابطه‌ی ۲۳ به شکل روابط ۲۴ تا ۲۸ نوشته می‌شوند:

$$(1 - \bar{\mu}V^2)\sigma_{xx}^b = (\lambda + 2\mu)(\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}) \quad (24)$$

$$(1 - \bar{\mu}V^2)\sigma_{yy}^b = (\lambda + 2\mu)(\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{xx}) \quad (25)$$

$$(1 - \bar{\mu}V^2)\sigma_{xy}^b = 2\mu\varepsilon_{xy} \quad (26)$$

$$(1 - \bar{\mu}V^2)\sigma_{xz}^b = 2\mu\varepsilon_{xz} \quad (27)$$

$$(1 - \bar{\mu}V^2)\sigma_{yz}^b = 2\mu\varepsilon_{yz} \quad (28)$$

همچنین روابط ساختاری بر اساس تئوری الاستیسیته‌ی سطح گرین-مرداچ [۳۱، ۳۰] به صورت رابطه‌ی زیر تعریف می‌شود:

$$\sigma_{\alpha\beta}^s = \tau_s \delta_{\alpha\beta} + (\lambda_s + \tau_s)\varepsilon_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta} + 2(\mu_s - \tau_s)\varepsilon_{\alpha\beta} + \tau_s u_{\alpha,\beta} \quad (29)$$

$$\sigma_{\alpha z}^s = \tau_s u_{z,\beta}$$

با توجه به عبارت ۲۹ برای دو لایه سطح بالا و پایین رابطه‌ی تنش و کرنش به صورت روابط ۳۰ تا ۳۴ به دست می‌آیند:

$$(1 - \bar{\mu}V^2)\sigma_{xx}^s = \tau_s + (\lambda_s + 2\mu_s)\varepsilon_{xx} + (\lambda_s + \tau_s)\varepsilon_{yy} \quad (30)$$

$$(1 - \bar{\mu}V^2)\sigma_{yy}^s = \tau_s + (\lambda_s + 2\mu_s)\varepsilon_{yy} + (\lambda_s + \tau_s)\varepsilon_{xx} \quad (31)$$

$$(1 - \bar{\mu}V^2)(\sigma_{xy}^s + \sigma_{yx}^s)/2 = (2\mu_s - \tau_s)\varepsilon_{xy} \quad (32)$$

$$(1 - \bar{\mu}V^2)\sigma_{xz}^s = \tau_s \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (33)$$

$$(1 - \bar{\mu}V^2)\sigma_{yz}^s = \tau_s \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (34)$$

که در روابط ۲۳ تا ۳۴، σ_{ij}^b و σ_{ij}^s به ترتیب بیانگر تنش سطوح، تنش حجم میانی و همچنین ε_{ij} و τ_s نیز به ترتیب کرنش و تنش باقیمانده سطح می‌باشند. همچنین $\bar{\mu}$ پارامتر غیر محلی مربوط به تئوری الاستیسیته‌ی غیر محلی می‌باشد. ∇^2 نیز عملگر لاپلاسین می‌باشد و در دستگاه مختصات کارتزین به صورت $(\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2)$ تعریف می‌شود. λ و μ ثابت لامه می‌باشند و بر اساس رابطه‌ی ۳۵ تعریف می‌شوند:

$$\lambda = \frac{E}{1-\nu^2} ; \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (35)$$

در تئوری کلاسیک ورق‌ها فرض شده است که به دلیل کوچک بودن σ_{zz} در مقایسه با سایر مؤلفه‌های تنش می‌توان از آن صرف نظر کرد ولی بر اساس تئوری الاستیسیته‌ی غیر محلی ارینگن σ_{zz} قابل چشم‌پوشی نبوده و در همین راستا رابطه‌ی ۳۶ برای بیان نحوه‌ی تغییرات σ_{zz} در راستای ضخامت لیو و همکاران [۳۲] ارائه شده است:

$$\sigma_{zz} = \frac{\left(\frac{\partial \sigma_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}^s}{\partial y} - \rho_s \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \right) \Big|_{s^+} - \left(\frac{\partial \sigma_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}^s}{\partial y} - \rho_s \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \right) \Big|_{s^-}}{2} + \frac{\left(\frac{\partial \sigma_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}^s}{\partial y} - \rho_s \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \right) \Big|_{s^+} - \left(\frac{\partial \sigma_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}^s}{\partial y} - \rho_s \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \right) \Big|_{s^-}}{h} \quad (36)$$

از آنجاکه $(1 - \bar{\mu}V^2)\sigma_{\alpha z}^s = \tau_s u_{z,\beta}$ رابطه‌ی ۳۶ به فرم رابطه‌ی ۳۷ نوشته می‌شود:

$$\sigma_{zz} = \frac{2z}{h} \left(\tau_s \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \tau_s \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} - \rho_s \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \right) \quad (37)$$

حال با جایگذاری روابط ۱۸ تا ۲۲ و ۳۷ در روابط ۲۴ تا ۲۸ و ۳۰ تا ۳۴ روابط تنش برای حجم میانی و سطوح برحسب کرنش به صورت روابط ۳۸ تا ۴۷ به دست می‌آیند:

$$(1 - \bar{\mu} \nabla^2) \sigma_{xx}^b = (\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f_i(z) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \lambda \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + f_i(z) \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{2zv}{(1-v)h} \left(\tau_s \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \rho_s \dot{w} \right) \quad (38)$$

$$(1 - \bar{\mu} \nabla^2) \sigma_{yy}^b = (\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + f_i(z) \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \lambda \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f_i(z) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{2zv}{(1-v)h} \left(\tau_s \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \rho_s \dot{w} \right) \quad (39)$$

$$(1 - \bar{\mu} \nabla^2) \sigma_{xy}^b = \mu(z) \left(\left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \right) + f_i(z) \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \right) \quad (40)$$

$$(1 - \bar{\mu} \nabla^2) \sigma_{xz}^b = \mu(z) \left(\frac{df_i(z)}{dz} \phi + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (41)$$

$$(1 - \bar{\mu} \nabla^2) \sigma_{yz}^b = \mu(z) \left(\frac{df_i(z)}{dz} \psi + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (42)$$

$$(1 - \bar{\mu} \nabla^2) \sigma_{xx}^s = \tau_s + (\lambda_s + 2\mu_s) \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f_i(z) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + (\lambda_s + \tau_s) \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + f_i(z) \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \quad (43)$$

$$(1 - \bar{\mu} \nabla^2) \sigma_{yy}^s = \tau_s + (\lambda_s + 2\mu_s) \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + f_i(z) \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + (\lambda_s + \tau_s) \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f_i(z) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \quad (44)$$

$$(1 - \bar{\mu} \nabla^2) (\sigma_{xy}^s + \sigma_{yx}^s) / 2 = (2\mu_s - \tau_s) \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + f_i(z) \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} + f_i(z) \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \right) \quad (45)$$

$$(1 - \bar{\mu} \nabla^2) \sigma_{xz}^s = \tau_s \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (46)$$

$$(1 - \bar{\mu} \nabla^2) \sigma_{yz}^s = \tau_s \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (47)$$

۴-۲- به دست آوردن معادلات حرکت با استفاده از اصل همیلتون

در این قسمت از اصل همیلتون برای استخراج معادلات حرکت حاکم بر نانو ورق تابعی مدرج مستطیلی استفاده شده است. اصل همیلتون طبق رابطه ۴۸ بیان می‌شود:

$$\int_0^t (\delta T + \delta W - \delta U) dt = 0 \quad (48)$$

در رابطه ۴۸، U بیانگر انرژی کرنشی، W بیانگر کار انجام شده توسط نیروی خارجی و T نیز بیانگر انرژی جنبشی می‌باشد. اکنون به تعریف انرژی‌های کرنشی و جنبشی می‌پردازیم. انرژی کرنشی برای حجم میانی و سطوح نانو ورق طبق رابطه‌های ۴۹ تا ۵۰ تعریف می‌شود.

$$U = U_p \quad (49)$$

$$U_p = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}^b \delta \varepsilon_{ij} dV + \frac{1}{2} \left(\int_{s^+} \sigma_{ij}^s \delta \varepsilon_{ij} ds^+ + \int_{s^-} \sigma_{ij}^s \delta \varepsilon_{ij} ds^- \right) \quad (50)$$

که در رابطه ۴۹، U_p انرژی کرنشی ناشی از تنش‌های به وجود آمده در قسمت حجم میانی و سطوح می‌باشد و مطابق رابطه ۵۰ بیان می‌گردد. انرژی جنبشی نیز به صورت رابطه ۵۱ تعریف می‌شود:

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{u}_i^2 dV + \frac{1}{2} \left(\int_{s^+} \rho_s \dot{u}_i^2 ds^+ + \int_{s^-} \rho_s \dot{u}_i^2 ds^- \right) \quad (51)$$

اکنون اصل همیلتون را اعمال می‌کنیم. برای این منظور به صورت جداگانه این اصل را برای انرژی کرنشی و جنبشی اعمال می‌کنیم و در نهایت دو رابطه‌ی به دست آمده را ترکیب می‌نماییم تا بتوانیم به معادلات حرکت برسیم ولی از آنجاکه تحلیل کمانش تحلیل استاتیکی می‌باشد از همین رو بخش مربوط به انرژی جنبشی از اصل همیلتون حذف می‌شود. از این رو اصل همیلتون را برای انرژی کرنشی اعمال می‌کنیم.

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV = \int_S \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx}^b \left(\frac{\partial}{\partial x} (\delta u_0) - z \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\delta w) + f_i(z) \frac{\partial}{\partial x} (\delta \phi) \right) + \sigma_{yy}^b \left(\frac{\partial}{\partial y} (\delta v_0) - z \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\delta w) + f_i(z) \frac{\partial}{\partial y} (\delta \psi) \right) \quad (52)$$

$$+ \sigma_{xy}^b \left(\frac{\partial}{\partial y} (\delta u_0) + \frac{\partial}{\partial x} (\delta v_0) + f_i(z) \left(\frac{\partial}{\partial y} (\delta \phi) + \frac{\partial}{\partial x} (\delta \psi) \right) \right) - 2z \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\delta w) + \sigma_{xz}^b \left(\frac{\partial}{\partial z} (\delta u_0) + \frac{df_i(z)}{dz} (\delta \phi) \right) + \sigma_{yz}^b \left(\frac{\partial}{\partial z} (\delta v_0) + \frac{df_i(z)}{dz} (\delta \psi) \right) dz ds$$

$$\int_S \left(-\frac{\partial N_{xx}^b}{\partial x} (\delta u_0) + \frac{\partial^2 M_{xx}^b}{\partial x^2} (\delta w) - \frac{\partial R_{xx}^b}{\partial x} (\delta \phi) \right) + \left(-\frac{\partial N_{yy}^b}{\partial y} (\delta v_0) + \frac{\partial^2 M_{yy}^b}{\partial y^2} (\delta w) - \frac{\partial R_{yy}^b}{\partial y} (\delta \psi) \right) \quad (53)$$

$$+ \left(-\frac{\partial N_{xy}^b}{\partial y} (\delta u_0) - \frac{\partial N_{xy}^b}{\partial x} (\delta v_0) + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} (\delta w) - \frac{\partial R_{xy}^b}{\partial y} (\delta \phi) - \frac{\partial R_{xy}^b}{\partial x} (\delta \psi) \right) + Q_{xx}^b (\delta \phi) + Q_{yy}^b (\delta \psi) ds$$

به طور مشابه برای سطوح بالا و پایین خواهیم داشت:

$$\int_{s^+} \left(-\frac{\partial N_{xx}^{s+}}{\partial x} (\delta u_0) + \frac{\partial^2 M_{xx}^{s+}}{\partial x^2} (\delta w) - \frac{\partial R_{xx}^{s+}}{\partial x} (\delta \phi) \right) + \left(-\frac{\partial N_{yy}^{s+}}{\partial y} (\delta v_0) + \frac{\partial^2 M_{yy}^{s+}}{\partial y^2} (\delta w) - \frac{\partial R_{yy}^{s+}}{\partial y} (\delta \psi) \right) \quad (54)$$

$$+ \left(-\frac{\partial N_{xy}^{s+}}{\partial y} (\delta u_0) - \frac{\partial N_{xy}^{s+}}{\partial x} (\delta v_0) + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^{s+}}{\partial x \partial y} (\delta w) - \frac{\partial R_{xy}^{s+}}{\partial y} (\delta \phi) - \frac{\partial R_{xy}^{s+}}{\partial x} (\delta \psi) \right) + Q_x^{s+} (\delta \phi) + Q_y^{s+} (\delta \psi) ds^+$$

$$\int_{s^-} \left(-\frac{\partial N_{xx}^{s-}}{\partial x} (\delta u_0) + \frac{\partial^2 M_{xx}^{s-}}{\partial x^2} (\delta w) - \frac{\partial R_{xx}^{s-}}{\partial x} (\delta \phi) \right) + \left(-\frac{\partial N_{yy}^{s-}}{\partial y} (\delta v_0) + \frac{\partial^2 M_{yy}^{s-}}{\partial y^2} (\delta w) - \frac{\partial R_{yy}^{s-}}{\partial y} (\delta \psi) \right) \quad (55)$$

$$+ \left(-\frac{\partial N_{xy}^{s-}}{\partial y} (\delta u_0) - \frac{\partial N_{xy}^{s-}}{\partial x} (\delta v_0) + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^{s-}}{\partial x \partial y} (\delta w) - \frac{\partial R_{xy}^{s-}}{\partial y} (\delta \phi) - \frac{\partial R_{xy}^{s-}}{\partial x} (\delta \psi) \right) + Q_x^{s-} (\delta \phi) + Q_y^{s-} (\delta \psi) ds^-$$

که در روابط ۵۳ تا ۵۵ داریم:

$$N_{xx}, N_{yy}, N_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \{ \sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy} \} dz$$

$$R_{xx}, R_{yy}, R_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f_i(z) \{ \sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy} \} dz$$

$$Q_{xx}^b = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \{ \sigma_{xz} \} dz ; Q_{yy}^b = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \{ \sigma_{yz} \} dz \quad (56)$$

با توجه به رابطه‌ی ۵۶، روابط ۳۸ تا ۴۷ به شکل روابط ۵۷ تا ۷۱ بازنویسی می‌شوند:

$$(1 - \bar{\mu}\nabla^2)N_{xx}^b = \left(A_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} - A_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + A_3 \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \left(B_1 \frac{\partial v_0}{\partial y} - B_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + B_3 \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + B_s \left(\tau_s \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \rho_s \ddot{w} \right) \quad (57)$$

$$(1 - \bar{\mu}\nabla^2)N_{yy}^b = \left(A_1 \frac{\partial v_0}{\partial y} - A_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + A_3 \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \left(B_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} - B_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_3 \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + B_s \left(\tau_s \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \rho_s \ddot{w} \right) \quad (58)$$

$$(1 - \bar{\mu}\nabla^2)N_{xy}^b = \left(C_1 \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - C_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \right) + C_3 \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \right) \quad (59)$$

$$(1 - \bar{\mu}\nabla^2)Q_{xx}^b = \left(C_4 \phi + C_1 \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (60)$$

$$(1 - \bar{\mu}\nabla^2)Q_{yy}^b = \left(C_4 \psi + C_1 \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (61)$$

$$(1 - \bar{\mu}\nabla^2)M_{xx}^b = \left(A_2 \frac{\partial u_0}{\partial x} - D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_2 \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \left(B_2 \frac{\partial v_0}{\partial y} - F_1 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + F_2 \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + D_s \left(\tau_s \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \rho_s \ddot{w} \right) \quad (62)$$

$$(1 - \bar{\mu}\nabla^2)M_{yy}^b = \left(A_2 \frac{\partial v_0}{\partial y} - D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_2 \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \left(B_2 \frac{\partial u_0}{\partial x} - F_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + F_2 \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + D_s \left(\tau_s \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \rho_s \ddot{w} \right) \quad (63)$$

$$(1 - \bar{\mu}\nabla^2)M_{xy}^b = C_2 \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - G_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \right) + G_2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \quad (64)$$

$$(1 - \bar{\mu}\nabla^2)N_{xx}^{s\pm} = \tau_s + (\lambda_s + 2\mu_s) \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} - \left(\pm \frac{h}{2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f_i \left(\pm \frac{h}{2} \right) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + (\lambda_s + \tau_s) \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} - \left(\pm \frac{h}{2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + f_i \left(\pm \frac{h}{2} \right) \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \quad (65)$$

$$(1 - \bar{\mu}\nabla^2)N_{yy}^{s\pm} = \tau_s + (\lambda_s + 2\mu_s) \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} - \left(\pm \frac{h}{2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + f_i \left(\pm \frac{h}{2} \right) \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + (\lambda_s + \tau_s) \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} - \left(\pm \frac{h}{2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f_i \left(\pm \frac{h}{2} \right) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \quad (66)$$

$$(1 - \bar{\mu}\nabla^2) (N_{xy}^{s\pm} + N_{yx}^{s\pm}) / 2 = \frac{1}{2} (2\mu_s - \tau_s) \left(\left(\frac{\partial u_0}{\partial y} - \left(\pm \frac{h}{2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + f_i \left(\pm \frac{h}{2} \right) \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} - \left(\pm \frac{h}{2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} + f_i \left(\pm \frac{h}{2} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \right) \quad (67)$$

$$(1 - \bar{\mu}\nabla^2)Q_{xx}^{s\pm} = \frac{df_i(z)}{dz} \Big|_{z=\pm\frac{h}{2}} \tau_s \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (68)$$

$$(1 - \bar{\mu}\nabla^2)M_{xx}^{s\pm} = \left(\pm \frac{h}{2} \right) \tau_s + (\lambda_s + 2\mu_s) \left(\left(\pm \frac{h}{2} \right) \frac{\partial u_0}{\partial x} - \left(\frac{h^2}{4} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(\pm \frac{h}{2} \right) f_i \left(\pm \frac{h}{2} \right) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + (\lambda_s + \tau_s) \left(\left(\pm \frac{h}{2} \right) \frac{\partial v_0}{\partial y} - \left(\frac{h^2}{4} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left(\pm \frac{h}{2} \right) f_i \left(\pm \frac{h}{2} \right) \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \quad (69)$$

$$(1 - \bar{\mu}\nabla^2)M_{yy}^{s\pm} = \left(\pm \frac{h}{2} \right) \tau_s + (\lambda_s + 2\mu_s) \left(\left(\pm \frac{h}{2} \right) \frac{\partial v_0}{\partial y} - \left(\frac{h^2}{4} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left(\pm \frac{h}{2} \right) f_i \left(\pm \frac{h}{2} \right) \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + (\lambda_s + \tau_s) \left(\left(\pm \frac{h}{2} \right) \frac{\partial u_0}{\partial x} - \left(\frac{h^2}{4} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(\pm \frac{h}{2} \right) f_i \left(\pm \frac{h}{2} \right) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \quad (70)$$

$$\begin{aligned}
 & (1 - \bar{\mu}V^2) (M_{xy}^{s\pm} + M_{yx}^{s\pm})/2 \\
 & = \frac{1}{2} (2\mu_s \\
 & - \tau_s) \left(\left(\pm \frac{h}{2} \right) \frac{\partial u_0}{\partial y} - \left(\frac{h^2}{4} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \left(\pm \frac{h}{2} \right) f_i \left(\pm \frac{h}{2} \right) \frac{\partial \phi}{\partial y} + \left(\left(\pm \frac{h}{2} \right) \frac{\partial v_0}{\partial x} - \left(\frac{h^2}{4} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \right. \quad (71) \\
 & \left. + \left(\pm \frac{h}{2} \right) f_i \left(\pm \frac{h}{2} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)
 \end{aligned}$$

که در روابط ۵۷ تا ۷۱ ثوابت به صورت زیر رابطه‌ی ۷۲ تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned}
 A_1, A_2, A_3 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\lambda(z) + 2\mu(z)) \{1, z, f_i(z)\} dz \\
 B_1, B_2, B_3 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \lambda(z) \{1, z, f_i(z)\} dz \\
 C_1, C_2, C_3, C_4 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mu(z) \{1, z, f_i(z), \left[\frac{df_i(z)}{dz} \right]^2\} dz \\
 D_1, D_2 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\lambda(z) + 2\mu(z)) \{z^2, z f_i(z)\} dz \\
 F_1, F_2 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \lambda(z) \{z^2, z f_i(z)\} dz \\
 G_1, G_2, G_3 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mu(z) \left\{ z^2, z f_i(z), z \frac{df_i(z)}{dz} \right\} dz \quad (72) \\
 D_s &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{2v}{h(1-v)h} z^2 dz \\
 B_s &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{2v}{h(1-v)h} z dz \\
 H_s &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{2v}{h(1-v)h} z f_i(z) dz \\
 H_1, H_2 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\lambda(z) + 2\mu(z)) \{z f(z), f_i^2(z)\} dz \\
 K_1, K_2 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \lambda(z) \{z f(z), f_i^2(z)\} dz \\
 P_1, P_2 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mu(z) \{z f(z), f_i^2(z)\} dz
 \end{aligned}$$

از آنجاکه تحلیل کمانش تحلیل استاتیکی می‌باشد از همین رو بخش مربوط به انرژی جنبشی از اصل همیلتون حذف می‌شود. در نهایت، کار انجام شده توسط نیروهای خارجی به صورت رابطه‌ی ۷۳ نوشته می‌شود.

$$W = - \int_S N_1 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 dS \quad (73)$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\delta W = - \int_S N_1 \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_2 \delta \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 dS = - \int_S N_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) (\delta w) + N_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) (\delta w) dS \quad (74)$$

اکنون با ساده کردن روابط ۵۳ تا ۵۵ و روابط ۷۴ تا ۷۶ روابط تعادل به صورت روابط ۷۸ تا ۸۲ به دست می آیند.

$$\frac{\partial N_{xx}^{eq}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}^{eq}}{\partial y} = 0 \quad (78)$$

$$\frac{\partial N_{yy}^{eq}}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}^{eq}}{\partial x} = 0 \quad (79)$$

$$\frac{\partial^2 M_{xx}^{eq}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yy}^{eq}}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^{eq}}{\partial x \partial y} = +N_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (80)$$

$$\frac{\partial R_{xx}^{eq}}{\partial x} + \frac{\partial R_{xy}^{eq}}{\partial y} - Q_x^{eq} = 0 \quad (81)$$

$$\frac{\partial R_{yy}^{eq}}{\partial y} + \frac{\partial R_{xy}^{eq}}{\partial x} - Q_y^{eq} = 0 \quad (82)$$

که در روابط ۷۸ تا ۸۲ داریم:

$$N_{xx}^{eq} = N_{xx}^b + N_{xx}^{s+} + N_{xx}^{s-}$$

$$N_{yy}^{eq} = N_{yy}^b + N_{yy}^{s+} + N_{yy}^{s-}$$

$$N_{xy}^{eq} = N_{xy}^b + N_{xy}^{s+} + N_{xy}^{s-}$$

$$M_{xx}^{eq} = M_{xx}^b + M_{xx}^{s+} + M_{xx}^{s-}$$

$$M_{yy}^{eq} = M_{yy}^b + M_{yy}^{s+} + M_{yy}^{s-}$$

$$M_{xy}^{eq} = M_{xy}^b + M_{xy}^{s+} + M_{xy}^{s-} \quad (83)$$

$$Q_{xx}^{eq} = Q_{xx}^b + Q_{xx}^{s+} + Q_{xx}^{s-}$$

$$Q_{yy}^{eq} = Q_{yy}^b + Q_{yy}^{s+} + Q_{yy}^{s-}$$

$$R_{xx}^{eq} = R_{xx}^b + R_{xx}^{s+} + R_{xx}^{s-}$$

$$R_{yy}^{eq} = R_{yy}^b + R_{yy}^{s+} + R_{yy}^{s-}$$

$$R_{xy}^{eq} = R_{xy}^b + R_{xy}^{s+} + R_{xy}^{s-}$$

۳-۴- شرایط مرزی حاکم بر نانو ورق

با توجه به اینکه در مقاله حاضر شرایط مرزی چهار طرف تکیه‌گاه ساده برای نانو ورق تابعی مدرج مستطیلی در نظر گرفته شده است، توابع جابجایی و چرخشی که توانایی ارضای شرایط مرزی هندسی مذکور را در همه‌ی لبه‌های ورق دارند در رابطه‌ی ۸۴ ارائه شده است. درواقع جابجایی‌های u ، v و W و همچنین چرخش‌های ϕ و ψ بر اساس این رابطه بسط داده می‌شوند.

$$\begin{aligned} u &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn} \cos(\gamma x) \sin(\beta y) e^{i\omega t} \\ v &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn} \sin(\gamma x) \cos(\beta y) e^{i\omega t} \\ W &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \sin(\gamma x) \sin(\beta y) e^{i\omega t} \\ \phi &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \phi_{mn} \cos(\gamma x) \sin(\beta y) e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (84)$$

$$\psi = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{mn} \sin(\gamma x) \cos(\beta y) e^{i\omega t}$$

که در رابطه‌ی بالا $u_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, \phi_{mn}$ و ψ_{mn} ضرایب سری فوریه می‌باشند. همچنین ω فرکانس طبیعی نانو ورق، $\gamma = n\pi/a$ و $\beta = m\pi/b$ می‌باشند.

۴-۴ روش حل گلرکین برای تحلیل کمانش نانو ورق تابعی مدرج

یکی از روش‌های تقریبی برای حل معادلات و به دست آوردن نتایج، روش حل گلرکین می‌باشد که در این روش مشابه سایر روش‌های انرژی مانند روش انرژی ریلی-ریتز از توابع تقریب جهت تخمین رفتار دینامیکی سیستم استفاده شده است که این توابع تقریب باید شرایط مرزی حاکم بر ورق را ارضا نمایند. توابع تقریب شامل جملات سری می‌باشند که با افزایش جملات سری می‌توانیم به تخمین مناسب برای رفتار دینامیکی سیستم‌ها دست یابیم. در این مقاله شرایط مرزی چهار طرف تکیه‌گاه ساده برای نانو ورق تابعی مدرج در نظر گرفته شده و توابع تقریب به صورت رابطه‌ی ۸۴ ارائه شده‌اند.

$$([K] - N_{cr}[K_g])\{\Delta\} = \{0\} \quad (85)$$

در رابطه‌ی ۸۵، N_{cr} بار بحرانی کمانش، $[K_g]$ ماتریس نیروهای درون صفحه‌ای و $[K]$ ماتریس سفتی نانو ورق می‌باشند. همچنین $\{\Delta\}$ بردار ضرایب مجهول می‌باشد که به صورت رابطه ۸۶ نوشته می‌شود و به ازای هر m و n موجود در توابع تقریب یک بار بحرانی کمانش وجود دارد.

$$\Delta = \{u_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, \phi_{mn}, \psi_{mn}\}^T \quad (86)$$

۵- نتایج عددی

در این بخش ابتدا به اعتبارسنجی نتایج به دست آمده در تحقیق حاضر با مراجع معتبر پرداخته شده است و سپس به نتایج جدید ارائه شده در این پژوهش پرداخته شده است که شامل بررسی اثرات پارامترهای مختلف سطح مانند تنش باقیمانده سطح، ثوابت الاستیسیته‌ی سطح و چگالی سطح بر بار بحرانی کمانش نانو ورق تابعی مدرج می‌باشد. نانو ورق تابعی مدرج مورد مطالعه در این مقاله دارای جنس‌های مختلف مانند (Al/Al_2O_3) و (Al/Si) می‌باشد که خواص آن‌ها در جدول ۲ نمایش داده شده است.

جدول ۲ خواص مواد

خواص						ماده
μ_s (N/M)	λ_s (N/M)	τ_s (N/M)	ρ_s (Kg/m ³)	ν	ρ (Kg/m ³)	E (GPa)
۰/۳۷۶	۶/۸۴۲	۰/۹۱۰۸	۵/۴۶×۱۰ ^{-۷}	۰/۳	۲۷۰۷	۷۰
...	۰/۳	۳۸۰۰	۳۸۰
-۲/۷۷۴	-۴/۴۸۸	۰/۶۰۴۸	۳/۱۷×۱۰ ^{-۷}	۰/۳	۲۳۳۱	۲۱۰

۵-۱- اعتبار سنجی نتایج به دست آمده

در این قسمت جهت اعتبارسنجی نتایج در جداول ۲ و ۳ بار بحرانی کمانش با مراجع [۴۳]، [۷] و [۴۴] مقایسه شده است. در این جداول نتایج به ازای مقادیر مختلف نسبت طول به عرض (a/b) و نسبت طول به ضخامت (a/h) و اندیس توانی ارائه شده است. تئوری‌های استفاده شده در مراجع [۴۴]، [۴۳] و [۷] به ترتیب تئوری‌های اصلاح شده ورق^{۲۰}، تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا^{۲۱} و تئوری تغییر شکل برشی نمایی می‌باشند که از آن‌ها جهت به دست آوردن بار بحرانی کمانش استفاده شده است. نتایج ارائه شده در جدول ۳ و ۴ به ترتیب تحت بارگذاری تک‌محوره $(\beta_1 = -1, \beta_2 = 0)$ و دو‌محوره $(\beta_1 = -1, \beta_2 = -1)$ می‌باشند.

²⁰ Refined Plate Theory (RPT)

²¹ Higher order shear deformation theory (HSDT)

جدول ۳ مقایسه بار بحرانی کمانش بی‌بعد ($\bar{N}_{cr} = N_{cr}(a^2/E_m h^3)$) برای نانو ورق با شرط مرزی چهار طرف تکیه‌گاه ساده (SSSS) تحت بارگذاری تک محوره ($\beta_1 = -1, \beta_2 = 0$)

اندیس توانی (g)					a/h	a/b
۱۰	۵	۲	۱	۰		
۱/۹۲۱۳	۲/۱۴۸۴	۲/۶۴۵۱	۳/۴۱۴۶	۶/۷۲۰۳	[۴۴] RPT	۵ / ۰/۵
۱/۹۰	۲/۱۲۴	۲/۶۱	۳/۳۹	۶/۷۱۴	[۴۳] HSDT	
۱/۹۲۰۹	۲/۱۴۴۶	۲/۶۴۵۷	۳/۴۱۸۸	۶/۷۲۵۹	[۷] ESDT	
۱/۹۲۰۸۹	۲/۱۴۴۶۴	۲/۶۴۵۷	۳/۴۱۸۸۱	۶/۷۲۵۹۴	ESDT (حاضر)	
۲/۱۸	۲/۴۱	۲/۸۸	۳/۷۱	۷/۴۰۵	[۴۴] RPT	۱۰
۲/۱۸	۲/۴۰	۲/۸۷	۳/۷۰	۷/۳۹۷	[۴۳] HSDT	
۲/۱۸۹۴	۲/۴۱۵۲	۲/۸۸۹۸	۳/۷۱۱۸	۷/۴۰۶۹	[۷] ESDT	
۲/۱۸۹۳۸	۲/۴۱۵۱۶	۲/۸۸۹۷۷	۳/۷۱۱۷۵	۷/۴۰۶۸۸	ESDT (حاضر)	
۴/۴۸	۵/۰۵	۶/۳۴	۸/۲۲	۱۶/۰۲	[۴۴] RPT	۵ / ۱
۴/۴۴	۴/۹۷	۶/۲۳	۸/۱۴۶	۱۶/۰۰	[۴۳] HSDT	
۴/۴۸۰۱	۵/۰۴۰۸	۶/۳۴۵۹	۸/۲۳۴۰	۱۶/۰۴۲۵	[۷] ESDT	
۴/۴۸۰۰۹	۵/۰۴۰۷۹	۶/۳۴۵۸۸	۸/۲۳۴۰۴	۱۶/۰۴۲۵	ESDT (حاضر)	
۵/۴۵	۶/۰۳	۷/۲۶	۹/۳۳	۱۸/۵۷	[۴۴] RPT	۱۰
۵/۴۲	۵/۹۹	۷/۲۱	۹/۲۹۹	۱۸/۵۴	[۴۳] HSDT	
۵/۴۵۲۱	۶/۰۳۰۴	۷/۲۶۳۶	۹/۳۴۱۸	۱۸/۵۸۴۷	[۷] ESDT	
۵/۴۵۲۰۸	۶/۰۳۰۳۶	۷/۲۶۳۵۶	۹/۳۴۱۷۶	۱۸/۵۸۴۷	ESDT (حاضر)	

با توجه به جداول ۳ تا ۴ مشاهده می‌شود بین نتایج ارائه‌شده در این مقاله برای تحلیل کمانش نانو ورق تابعی مدرج با مراجع مطابقت مناسبی برقرار وجود دارد.

جدول ۴ مقایسه بار بحرانی کمانش بی‌بعد ($\bar{N}_{cr} = N_{cr}(a^2/E_m h^3)$) برای نانو ورق تابعی مدرج مستطیلی با شرط مرزی چهار طرف تکیه‌گاه ساده (SSSS) تحت بارگذاری دومحوره ($\beta_1 = -1, \beta_2 = -1$)

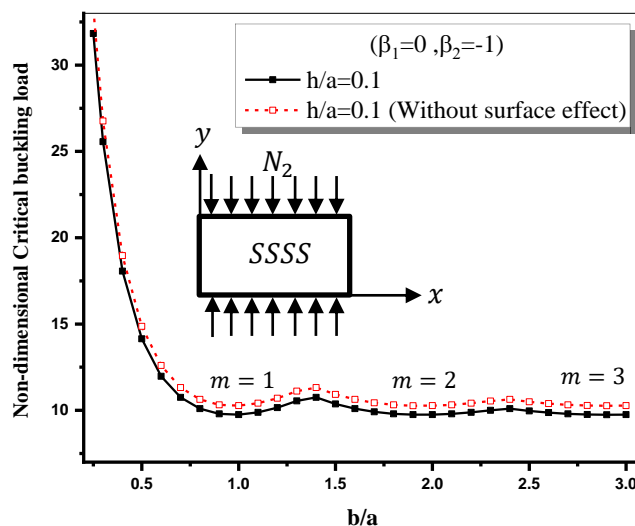
اندیس توانی (g)					a/h	a/b
۱۰	۵	۲	۱	۰		
۱/۵۳۷	۱/۷۱۹	۲/۱۱۶	۲/۷۳۳	۵/۳۷۶	[۴۴] RPT	۵ / ۰/۵
۱/۵۲۷	۱/۷۰۰	۲/۰۹۲	۲/۷۱۵	۵/۳۷۱	[۴۳] HSDT	
۱/۵۳۶۷	۱/۷۱۵۷	۲/۱۱۶۶	۲/۷۳۵۰	۵/۳۸۰۷	[۷] ESDT	
۱/۵۳۶۷۱	۱/۷۱۵۷۲	۲/۱۱۶۵۶	۲/۷۳۵۰۵	۵/۳۸۰۷۵	ESDT (حاضر)	
۱/۷۵۲	۱/۹۳۳	۲/۳۱۲	۲/۹۶۹	۵/۹۲۶	[۴۴] RPT	۱۰
۱/۷۴۷	۱/۹۲۵	۲/۳۰۲	۲/۹۶۱	۵/۹۱۸	[۴۳] HSDT	
۱/۷۵۱۵	۱/۹۳۲۱	۲/۳۱۱۸	۲/۹۶۹۴	۵/۹۲۵۵	[۷] ESDT	
۱/۷۵۱۵۱	۱/۹۳۲۱۳	۲/۳۱۱۸۲	۲/۹۶۹۴	۵/۹۲۵۵۱	ESDT (حاضر)	
۲/۲۴۰	۲/۵۲۵	۳/۱۷۲	۴/۱۱۲	۸/۰۱۱	[۴۴] RPT	۵ / ۱
۲/۲۲۱	۲/۴۸۷	۳/۱۲۰	۴/۰۷۳	۸/۰۰۱	[۴۳] HSDT	
۲/۲۴۰۰	۲/۵۲۰۴	۳/۱۷۲۹	۴/۱۱۷۰	۸/۰۲۱۲	[۷] ESDT	
۲/۲۴۰۰۴	۲/۵۲۰۴	۳/۱۷۲۹۴	۴/۱۱۷۰۲	۸/۰۲۱۲۵	ESDT (حاضر)	
۲/۷۲۶	۳/۰۱۸	۳/۶۳۲	۴/۶۷۰	۹/۲۸۹	[۴۴] RPT	۱۰
۲/۷۱۵	۲/۹۹۸	۳/۶۰۸	۴/۶۵۰	۹/۲۷۳	[۴۳] HSDT	

۲/۷۲۶۰	۳/۰۱۵۲	۳/۶۳۱۸	۴/۶۷۰۹	۹/۲۹۲۴	[۷] ESDT
۲/۷۲۶۰۴	۳/۰۱۵۱۸	۳/۶۳۱۷۸	۴/۶۷۰۸۸	۹/۲۹۲۳۷	(حاضر) ESDT

۵-۲- نتایج جدید

۵-۲-۱- تاثیر پارامترهای مختلف سطح بر بار بحرانی کمانش

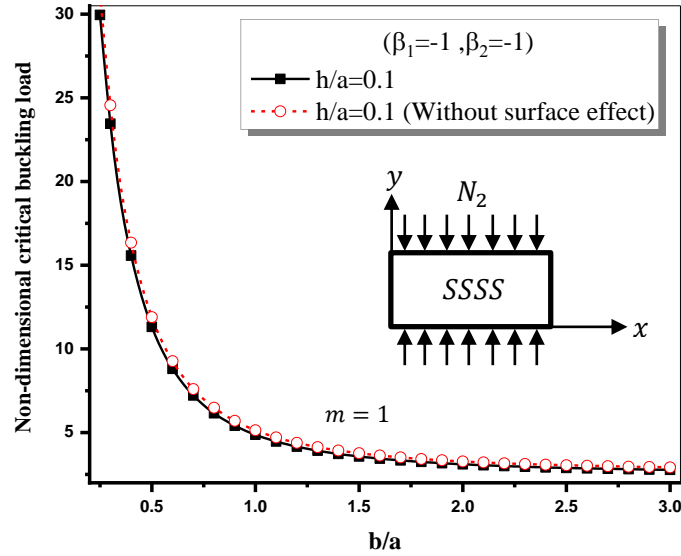
در این قسمت به بررسی تاثیرات ناشی از در نظر گرفتن اثر سطح بر بار بحرانی کمانش نانو ورق تابعی مدرج پرداخته شده است. در جداول ۵ و ۶ و همچنین شکل‌های ۲ و ۳ تفاوت در نظر گرفتن اثر سطح و نادیده گرفتن این اثر به ازای مقادیر مختلف برای نسبت ضخامت به طول، عرض به طول و اندیس توانی برای حالت‌های بارگذاری تک‌محوره در راستای محور x ($\beta_1 = -1, \beta_1 = 0$)، y ($\beta_1 = 0, \beta_1 = -1$) و دومحوره ($\beta_1 = -1, \beta_1 = -1$) بررسی شده است. علاوه بر این، از نتایج ارائه شده در جداول ۵ و ۶ می‌توان دریافت که با افزایش نسبت ضخامت به طول بار بحرانی کمانش برای حالت بارگذاری تک‌محوره و دومحوره افزایش می‌یابد. افزایش نسبت ضخامت به طول هنگامی که طول ورق ثابت در نظر گرفته شده است باعث افزایش صلبیت و سفتی ورق شده و این امر نیز باعث افزایش بار بحرانی کمانش می‌شود.



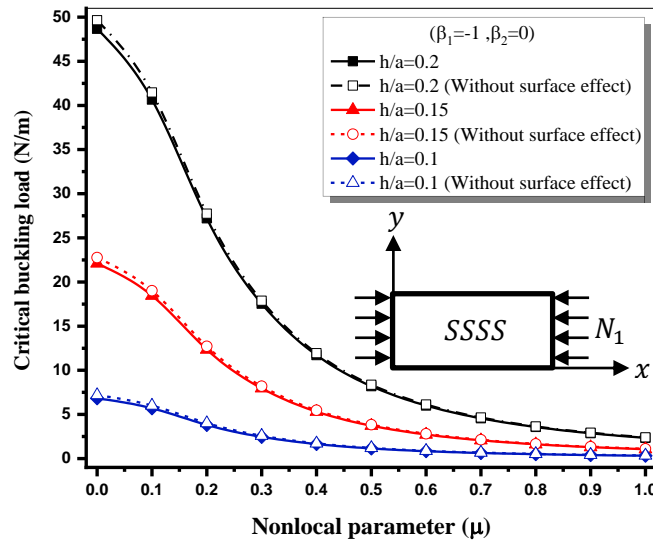
شکل ۲ مقایسه مقادیر بار بحرانی کمانش بی‌بعد (\bar{N}_{cr}) برای نانو ورق تابعی مدرج با در نظر گرفتن اثر سطح و بدون در نظر گرفتن اثر سطح تحت بارگذاری تک‌محوره ($\beta_1 = 0, \beta_2 = -1$)

جدول ۵ مقایسه مقادیر بار بحرانی کمانش (N/m) برای نانو ورق تابعی مدرج با در نظر گرفتن اثر سطح و بدون در نظر گرفتن اثر سطح با شرایط ($\bar{\mu} = 0, g = 0$)

بدون اثر سطح		با اثر سطح		$\frac{h}{a}$	بارگذاری
$b/a = 1$	$b/a = 0.5$	$b/a = 1$	$b/a = 0.5$		
۴۹/۶۴۷۳	۶۱/۰۲۷	۴۸/۶۸۱۶	۵۹/۹۶۵۲	۰/۲	$(\beta_1 = 0, \beta_1 = -1)$
۷/۱۸۹۳۶	۱۰/۴۰۷۵	۶/۸۲۴۷۴	۹/۹۰۰۶	۰/۱	
۰/۹۳۵۸۸۷	۱/۴۳۲۶۵	۰/۸۰۵۱۵۸	۱/۲۳۴۵۸	۰/۰۵	
۲۴/۸۲۳۶	۴۸/۸۲۱۶	۲۴/۳۴۰۸	۴۷/۹۷۲۲	۰/۲	$(\beta_1 = -1, \beta_1 = -1)$
۳/۵۹۴۶۸	۸/۳۲۶	۴/۸۷۴۸۱	۷/۹۲۰۴۸	۰/۱	
۰/۴۶۷۹۴۳	۱/۱۴۶۱۲	۰/۴۰۲۵۷۹	۰/۹۸۷۶۶۵	۰/۰۵	



شکل ۳ مقایسه مقادیر بار بحرانی کمانش بی بعد (\bar{N}_{cr}) برای نانو ورق تابعی مدرج با در نظر گرفتن اثر سطح و بدون در نظر گرفتن اثر سطح تحت بارگذاری دومیحوره ($\beta_1 = -1, \beta_2 = -1$)



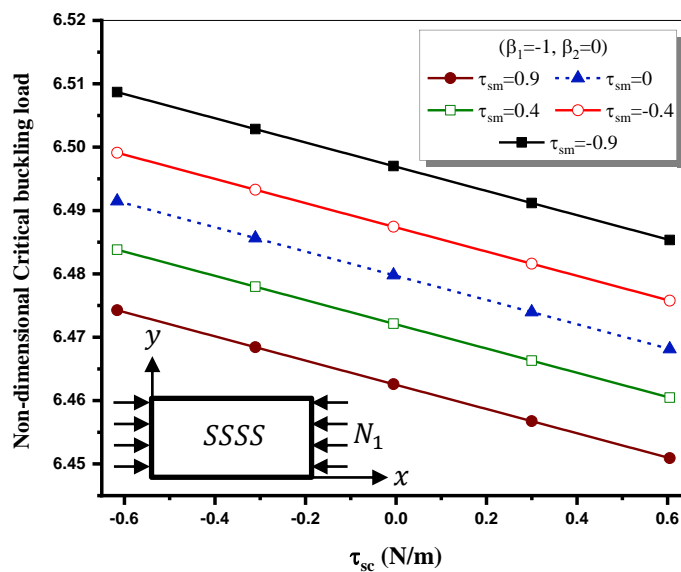
شکل ۴ مقایسه مقادیر بار بحرانی کمانش (N/m) برای نانو ورق تابعی مدرج با در نظر گرفتن اثر سطح و بدون در نظر گرفتن اثر سطح تحت بارگذاری تک محوره ($\beta_1 = -1, \beta_2 = 0$)

جدول ۶ مقایسه مقادیر بار بحرانی کمانش (N/m) برای نانو ورق تابعی مدرج با در نظر گرفتن اثر سطح و بدون در نظر گرفتن اثر سطح با شرایط ($b/a = 1, g = 0$)

بدون اثر سطح		با اثر سطح		$\frac{h}{a}$	بارگذاری
$\bar{\mu} = 0.5$	$\bar{\mu} = 0$	$\bar{\mu} = 0.5$	$\bar{\mu} = 0$		
۸/۳۶۵۴۵	۴۹/۶۴۷۳	۸/۲۰۲۷۳	۴۸/۶۸۱۶	۰/۲	$(\beta_1 = 0, \beta_2 = -1)$
۱/۳۱۱۳۹	۷/۱۸۹۳۶	۱/۱۴۹۹۵	۶/۸۲۴۷۴	۰/۱	
۰/۱۵۷۶۹۵	۰/۹۳۵۸۸۷	۰/۱۳۵۶۶۷	۰/۸۰۵۱۵۸	۰/۰.۵	
۴/۱۸۲۷۲	۲۴/۸۲۳۶	۴/۱۰۱۳۶	۲۴/۳۴۰۸	۰/۲	$(\beta_1 = -1, \beta_2 = -1)$
۳/۶۰۵۶۹۵	۳/۵۹۴۶۸	۰/۵۷۴۹۷۶	۳/۴۱۲۳۷	۰/۱	
۰/۰۷۸۸۴۷۴	۰/۴۶۷۹۴۳	۰/۰۶۷۸۳۳۶	۰/۴۰۲۵۷۹	۰/۰.۵	

با بررسی نتایج ارائه شده در جداول ۵ و ۶ و شکل‌های ۲ و ۳ درمی‌یابیم که در نظر گرفتن اثر سطح باعث کاهش بار بحرانی کمانش سیستم می‌شود. در حقیقت پارامترهای مختلف سطح مانند تنش باقیمانده سطح، ثوابت الاستیسیته‌ی سطح و چگالی سطح هر کدام بنا بر مقادیری که دارند می‌توانند باعث کاهش یا افزایش بار بحرانی شوند به عبارتی دیگر هر کدام از این پارامترها می‌تواند باعث تغییر انرژی کرنشی سیستم شود ولی با توجه به مقادیر لحاظ شده در جدول ۲ برای این پارامترها مشاهده می‌شود که برآیند اثر آن‌ها موجب کاهش انرژی کرنشی سیستم و در نتیجه آن کاهش سختی و صلبیت شده که این امر نیز باعث کاهش بار بحرانی کمانش شده است. در شکل ۴ ملاحظه می‌گردد که اثر سطح در مقادیر کوچک برای پارامتر غیر محلی محسوس‌تر می‌باشد. نکته‌ی قابل ملاحظه دیگر افزایش اثر سطح بر مقدار بار بحرانی کمانش با افزایش نسبت عرض به طول است. در واقع با افزایش عرض ورق در طول ثابت، مساحت سطح افزایش می‌یابد و همین امر سبب می‌شود که پارامترهای سطح نقش بیشتری ایفا کنند و تأثیرشان بر مقدار بار بحرانی کمانش اندکی افزایش یابد. در قسمت‌های بعد به بررسی تک تک پارامترهای سطح مانند تنش باقیمانده سطح، ثوابت الاستیسیته‌ی سطح و چگالی سطح پرداخته شده است.

۵-۲-۲- اثر تنش باقیمانده سطح، ثوابت الاستیسیته‌ی سطح و چگالی سطح بر بار بحرانی کمانش



شکل ۵ تأثیر تنش باقیمانده سطح سرامیکی بر مقادیر بار بحرانی کمانش بی‌بعد (\bar{N}_{cr}) برای حالت بارگذاری تک محوره

($g = 1, \bar{\mu} = 0, h/a = 0.1, b/a = 1$) با شرایط ($\beta_1 = -1, \beta_2 = 0$)

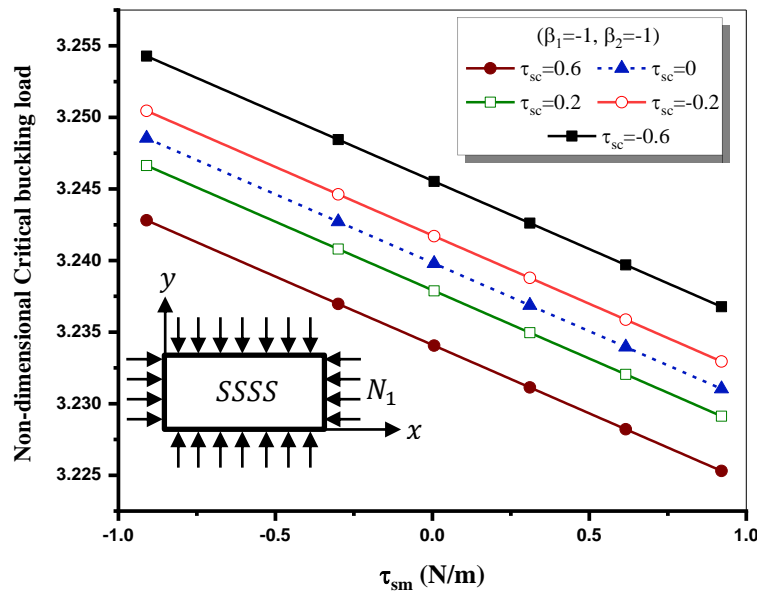
جدول ۷ تأثیر تنش باقیمانده سطح بر مقادیر بار بحرانی کمانش بی‌بعد (\bar{N}_{cr}) برای حالت بارگذاری تک محوره ($\beta_1 = 0, \beta_2 = -1$) با

شرایط ($g = 1, \bar{\mu} = 0, h/a = 0.1$)

τ_{sc}					τ_{sm}	b/a
-۰/۶	-۰/۲	۰	۰/۲	۰/۶		
۹/۴۰۰۸۳	۹/۳۸۹۷۱	۹/۳۸۴۱۵	۹/۳۷۸۸۶	۹/۳۶۷۴۸	۰/۹	۰/۵
۹/۴۲۵۸۳	۹/۴۱۴۷۲	۹/۴۰۹۱۶	۹/۴۰۳۶۱	۹/۳۹۲۴۹	۰	
۹/۴۵۰۸۳	۹/۴۳۹۷۲	۹/۴۳۴۱۷	۹/۴۲۸۶۱	۹/۴۱۷۵	-۰/۹	۱
۶/۴۷۳۹۶	۶/۴۶۶۳۱	۶/۴۶۲۴۸	۶/۴۵۸۶۶	۶/۴۵۱	۰/۹	
۶/۴۹۱۱۷	۶/۴۸۳۵۲	۶/۴۷۹۶۹	۶/۴۷۵۸۷	۶/۴۶۸۲۲	۰	-۰/۹
۶/۵۰۸۳۸	۶/۵۰۰۷۳	۶/۴۹۶۹۱	۶/۴۹۳۰۸	۶/۴۸۵۴۳		

در جداول ۷ و ۸ و شکل‌های ۵ و ۶ به تأثیر تنش باقیمانده سطح بر بار بحرانی کمانش پرداخته شده است. در جدول ۷ تأثیر هم‌زمان تنش باقیمانده سطح بالا و پایین بررسی شده است. در شکل‌های ۵ و ۶ این تغییرات برای درک بهتر ترسیم شده‌اند. و در نهایت در جدول ۸ اثر تفاضل تنش باقیمانده سطح بالا و پایین ($\Delta\tau_s$) مورد بررسی قرار گرفته است. در عبارت $\Delta\tau_s = \frac{\tau_{sm} - \tau_{sc}}{\tau_{sm}^0 - \tau_{sc}^0}$ ، τ_{sm}^0 و τ_{sc}^0 به ترتیب مقادیر اولیه تنش باقیمانده سطح برای سطوح پایین و بالا می‌باشند که مطابق جدول ۲ در نظر گرفته شده‌اند و τ_{sc} و τ_{sm} مقادیر جدید در نظر گرفته شده به ترتیب برای سطوح پایین و بالا جهت بررسی تأثیر این پارامتر بر بار بحرانی

کمانش سیستم می‌باشد. با توجه به جدول ۸ ملاحظه می‌گردد که با افزایش تفاضل تنش باقیمانده سطح بالا و پایین مقادیر بار بحرانی کمانش افزایش می‌یابد. با توجه به نتایج ارائه شده در این قسمت ملاحظه می‌شود که مثبت بودن تنش باقیمانده سطح باعث کاهش بار بحرانی کمانش سیستم می‌شود. در واقع مثبت بودن تنش باقیمانده سطح موجب کاهش انرژی کرنشی و افزایش تحرک پذیری سیستم می‌شود به همین دلیل بار بحرانی کمانش نیز کاهش می‌یابد. برای مقادیر منفی تنش باقیمانده سطح نیز با استدلالی مشابه می‌توان دریافت که منفی بودن این پارامتر باعث افزایش انرژی کرنشی و به دنبال آن افزایش سفتی و مقدار بار بحرانی کمانش می‌شود. تأثیر چگالی سطح در روابط مربوط به انرژی جنبشی چشم‌گیر می‌باشد ولی از آنجاکه تحلیل کمانش یک تحلیل استاتیکی می‌باشد و در آن انرژی جنبشی صفر در نظر گرفته می‌شود چگالی سطح تأثیری در پاسخ‌های به‌دست‌آمده ندارد. با تحلیل نتایج به‌دست‌آمده در این تحقیق نیز مشاهده شد که اثر چگالی سطح بر بار بحرانی کمانش نزدیک به صفر می‌باشد و به همین دلیل در این قسمت از تحلیل این پارامتر صرف‌نظر شده است.



شکل ۶ تأثیر تنش باقیمانده سطح فلزی بر مقادیر بار بحرانی کمانش بی‌بعد (\bar{N}_{cr}) برای حالت بارگذاری دوماحوره ($g = 1, \bar{\mu} = 0, h/a = 0.1, b/a = 1$) با شرایط $(\beta_1 = -1, \beta_2 = -1)$

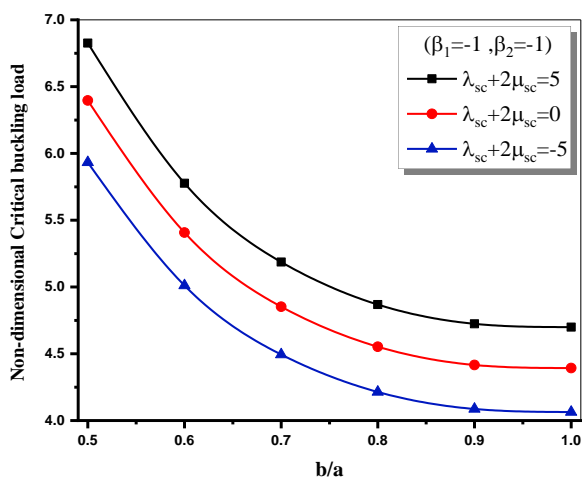
جدول ۸ تأثیر تفاضل تنش باقیمانده سطوح بالا و پایین بر مقادیر بار بحرانی کمانش (N/m) برای حالت بارگذاری تک محوره ($g = 1, \bar{\mu} = 0, h/a = 0.1$) با شرایط $(\beta_1 = 0, \beta_2 = -1)$

$\Delta\tau_s$					h/a	b/a
۵	۴	۳	۲	۱		
۳۹/۰۲۹۲	۳۹/۰۱۱۴	۳۸/۹۹۳۳	۳۸/۹۷۶	۳۸/۹۵۸۳	۰/۲	
۶/۵۸۰۷۴	۶/۵۷۴۷۹	۶/۵۶۸۷	۶/۵۶۲۸۹	۶/۵۵۶۹۳	۰/۱	۰/۵
۰/۸۵۲۵۶۲	۰/۸۵۰۹۲۹	۰/۸۴۹۲۵۸	۰/۸۴۷۶۶۳	۰/۸۴۶۰۳	۰/۰۵	
۳۱/۴۳۱۷	۳۱/۴۱۷۵	۳۱/۴۰۲۹	۳۱/۳۸۸۹	۳۱/۳۷۴۷	۰/۲	
۴/۵۳۱۸۸	۴/۵۲۷۷۹	۴/۵۲۳۵۹	۴/۵۱۹۵۹	۴/۵۱۵۴۹	۰/۱	۱
۰/۵۵۶۳۴۶	۰/۵۵۵۲۸۱	۰/۵۵۴۱۹۱	۰/۵۵۳۱۵۱	۰/۵۵۲۰۸۶	۰/۰۵	

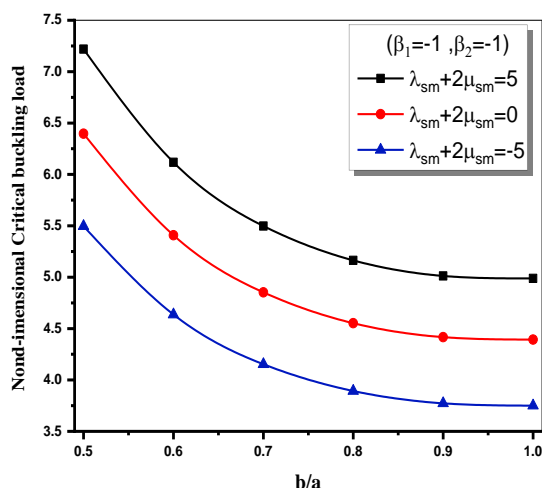
$$\Delta\tau_s = \frac{\tau_{sm} - \tau_{sc}}{\tau_{sm}^0 - \tau_{sc}^0}$$

در این قسمت تأثیر پارامترهای سطح مانند تنش باقیمانده سطح، ثوابت الاستیسیته‌ی سطح و چگالی سطح بر کمانش نانو ورق تابعی مدرج بررسی شده است. مقادیر بار بحرانی کمانش در این قسمت با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی نمایی به‌دست‌آمده‌اند. در جدول ۹ و شکل‌های ۷ و ۸ تأثیر ثوابت الاستیسیته‌ی سطح بررسی شده است. در این شکل‌ها و جداول اثر

ثوابت الاستیسیته‌ی سطح به ازای مقادیر مختلف برای نسبت طول به عرض و اندیس توانی نشان داده شده است. هنگامی که عبارت $\lambda_s + 2\mu_s$ برای سطح بالا دارای مقادیر $-5, 0, 5$ می‌باشد این عبارت برای سطح پایین صفر در نظر گرفته شده است و بالعکس. همان‌طور که ملاحظه می‌شود بار بحرانی کمانش به ازای مقادیر مثبت برای $\lambda_s + 2\mu_s$ افزایش می‌یابد و برعکس با در نظر گرفتن مقادیر منفی برای $\lambda_s + 2\mu_s$ کاهش می‌یابد. در حقیقت انرژی کرنشی سیستم به ازای مقادیر مثبت برای ثوابت الاستیسیته‌ی سطح افزایش می‌یابد و در نتیجه تحرک پذیری ورق کمتر می‌شود که در نهایت این امر منجر به افزایش بار بحرانی کمانش سیستم می‌شود. دقیقاً برعکس این حالت زمانی رخ می‌دهد که برای ثوابت الاستیسیته‌ی سطح مقادیر منفی در نظر گرفته می‌شود و انرژی کرنشی کاهش یابد که به طبع آن سفتی و بار بحرانی کمانش سیستم کاهش می‌یابد.



شکل ۸ تأثیر ثوابت الاستیسیته‌ی سطح سرامیکی بر مقادیر بار بحرانی کمانش بی‌بعد (\bar{N}_{cr}) برای حالت بارگذاری دو محوره ($\beta_1 = -1, \beta_2 = -1$) با شرایط ($g = 1, \bar{\mu} = 0, h/a = 0.1, b/a = 1$)



شکل ۷ تأثیر ثوابت الاستیسیته‌ی سطح فلزی بر مقادیر بار بحرانی کمانش بی‌بعد (\bar{N}_{cr}) برای حالت بارگذاری دو محوره ($\beta_1 = -1, \beta_2 = -1$) با شرایط ($g = 1, \bar{\mu} = 0, h/a = 0.1, b/a = 1$)

جدول ۹ تأثیر ثوابت الاستیسیته‌ی سطح بر مقادیر بار بحرانی کمانش بی‌بعد (\bar{N}_{cr}) برای حالت بارگذاری تک محوره ($\bar{\mu} = 0, h/a = 0.1$) با شرایط ($\beta_1 = 0, \beta_2 = -1$)

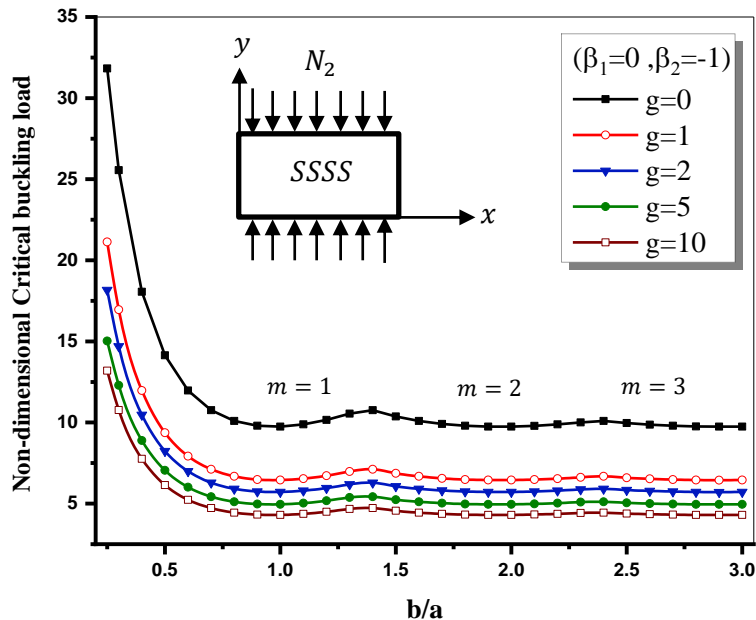
اندیس توانی (g)				$\lambda_{sm} + 2\mu_{sm}$	b/a
۵	۲	۱	.		
۸/۰۴۰۷۴	۹/۰۹۰۲۳	۱۱/۳۱۳۵	۱۵/۶۹۶	۵	۰/۵
۶/۹۳۸۴۳	۷/۸۸۴۴۱	۹/۱۳۷۴۶	۱۴/۸۲۶	۰	
۵/۶۷۴۲۱	۶/۵۳۹۰۷	۷/۸۵۳	۱۳/۹۰۷۹	-۵	
۵/۶۹۰۰۴	۶/۳۳۲۵۵	۷/۱۲۶۱۱	۱۰/۸۷۲۲	۵	۱
۴/۸۶۰۹۳	۵/۴۴۷۶۷	۶/۲۷۵۲۵	۱۰/۲۴۱۶	۰	
۳/۹۳۰۸۸	۴/۴۷۷۸۸	۵/۳۵۸۱۴	۹/۵۸۰۱	-۵	
اندیس توانی (g)				$\lambda_{sc} + 2\mu_{sc}$	b/a
۵	۲	۱	.		
۷/۴۹۰۰۳	۸/۴۳۷۲۶	۹/۷۵۱۰۶	۱۵/۶۹۶	۵	۰/۵
۶/۹۳۸۴۳	۷/۸۸۴۴۱	۹/۱۳۷۴۶	۱۴/۸۲۶	۰	
۶/۳۲۰۱	۷/۲۷۹۷۷	۸/۴۷۶	۱۳/۹۰۷۹	-۵	
۵/۲۶۸۷۴	۵/۸۴۶۰۷	۷/۷۱۳۴	۱۰/۸۷۲۲	۵	۱
۴/۸۶۰۹۳	۵/۴۴۷۶۷	۶/۲۷۵۲۵	۱۰/۲۴۱۶	۰	
۴/۴۰۸۰۳	۵/۰۱۴۸	۵/۸۰۵۶۳	۹/۵۸۰۱	-۵	

۵-۲-۳- اثر اندیس توانی و پارامتر غیر محلی بر بار بحرانی کمانش

جدول ۱۰ اثر اندیس توانی بر بار بحرانی کمانش بی‌بعد $\bar{N}_{cr} = N_{cr}(a^2/Em h^3)$ نانو ورق تابعی مدرج را نشان می‌دهد. در این جدول $b/a = 1$ ، $h/a = 0.1$ و $\bar{\mu} = 0$ فرض شده و بار بحرانی کمانش برای شرایط بارگذاری تک‌محوره $(\beta_1 = -1, \beta_2 = 0)$ و بارگذاری دو‌محوره $(\beta_1 = -1, \beta_2 = -1)$ برای اندیس توانی ۱، ۲، ۵ و ۱۰ ارائه شده است. در شکل ۹ نیز تغییرات بار بحرانی کمانش بی‌بعد $\bar{N}_{cr} = N_{cr}(a^2/Em h^3)$ به ازای تغییرات هم‌زمان نسبت عرض به طول و اندیس توانی برای بارگذاری تک‌محوره ترسیم شده است. با توجه به جداول و شکل‌ها ملاحظه می‌شود که افزایش اندیس توانی باعث کاهش بار بحرانی کمانش می‌شود. زیرا با افزایش مقدار اندیس توانی خواص ورق به خواص فلز نزدیک‌تر می‌شود و سفتی کاهش می‌یابد که این امر سبب کاهش بار بحرانی کمانش می‌شود.

جدول ۱۰ تأثیر اندیس توانی بر بار بحرانی کمانش بی‌بعد (\bar{N}_{cr}) برای نانو ورق تابعی مدرج با در نظر گرفتن اثر سطح با شرایط $(b/a = 1, h/a = 0.1, \bar{\mu} = 0)$

اندیس توانی (g)					$(\beta_1 = -1, \beta_2 = 0)$
۱۰	۵	۲	۱	.	
۴/۳۰۶۱۵	۴/۹۵۶۶	۵/۷۱۷۸۲	۶/۴۵۰۷۱	۹/۷۴۹۶۲	تئوری نمایی
۴/۳۰۵۴۲	۴/۹۵۶۷۶	۵/۷۱۷۱۱	۶/۴۴۹۳۹	۹/۷۴۷۸۲	تئوری مثلثاتی
۴/۳۰۵۷۶	۴/۹۵۸۲۲	۵/۷۱۷۵۴	۶/۴۴۹۱۱	۹/۷۴۷۶۴	تئوری هایپربولیکی
۴/۳۰۵۶۹	۴/۹۵۸۰۵	۵/۷۱۷۴۶	۶/۴۴۹۰۹	۹/۷۴۷۵۹	تئوری پارابولیکی
اندیس توانی (g)					$(\beta_1 = -1, \beta_2 = -1)$
۱۰	۵	۲	۱	.	
۲/۱۵۳۰۸	۲/۴۷۸۳	۲/۸۵۸۹۱	۳/۲۲۵۳۵	۴/۸۷۴۸۱	تئوری نمایی
۲/۱۵۲۷۱	۲/۴۷۸۳۸	۲/۸۵۸۵۵	۳/۲۲۴۶۹	۴/۸۷۳۹۱	تئوری مثلثاتی
۲/۱۵۲۸۸	۲/۴۷۹۱۱	۲/۸۵۸۷۷	۳/۲۲۴۵۵	۴/۸۷۳۸۲	تئوری هایپربولیکی
۲/۱۵۲۸۵	۲/۴۷۹۰۳	۲/۸۵۸۷۳	۳/۲۲۴۵۴	۴/۸۷۳۷۹	تئوری پارابولیکی

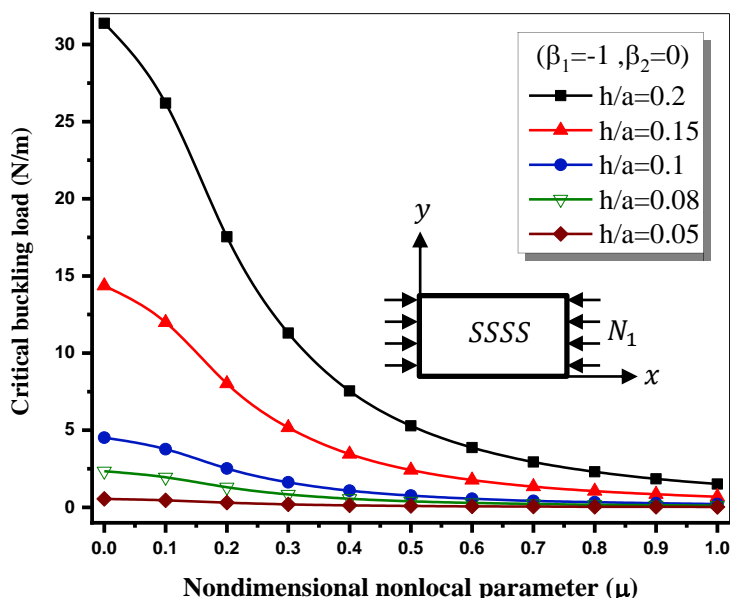


شکل ۹ تأثیر اندیس توانی بر بار بحرانی کمانش بی‌بعد (\bar{N}_{cr}) برای نانو ورق تابعی مدرج با در نظر گرفتن اثر سطح تحت بارگذاری تک‌محوره $(\beta_1 = 0, \beta_2 = -1)$ و تحت شرایط $(h/a = 0.1, \bar{\mu} = 0)$

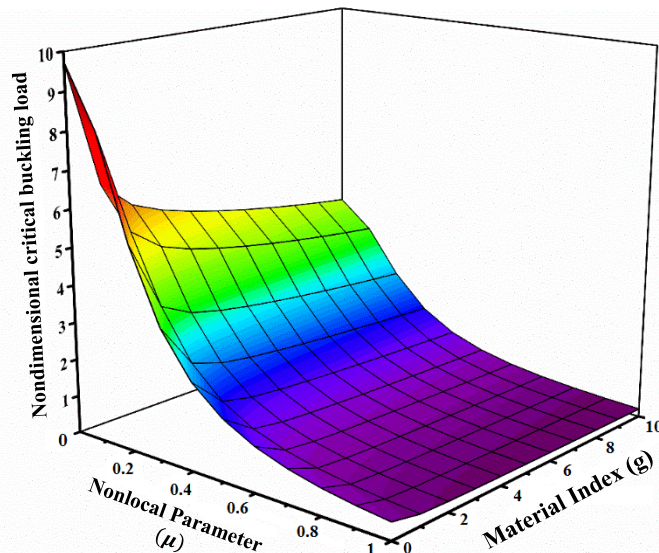
در جدول ۱۱ نتایج بار بحرانی کمانش بی بعد (\bar{N}_{cr}) نانو ورق تابعی مدرج در اثر تغییرات پارامتر غیر محلی برای حالت بارگذاری تک محوره و دومحوره ارائه شده است. با توجه به این نتایج ملاحظه می شود که همانند فرکانس طبیعی، بار بحرانی کمانش نیز با افزایش پارامتر غیر محلی کاهش می یابد. همان گونه که در تحلیل ارتعاش آزاد نیز بیان شد با افزایش پارامتر غیر محلی انرژی کرنشی سیستم کاهش پیدا می کند که با این کاهش صلبیت سیستم کم می شود و ورق تحرک پذیری بیشتری خواهد داشت که در نهایت این امر باعث کاهش بار بحرانی کمانش می شود. در شکل های ۱۰ و ۱۱ نیز تغییرات بار بحرانی کمانش در اثر تغییرات پارامتر غیر محلی ترسیم شده است. در این شکل ها مشاهده می گردد که به ازای مقادیر کوچک برای پارامتر غیر محلی شیب تغییرات بار بحرانی کمانش محسوس می باشد ولی با افزایش مقدار پارامتر غیر محلی شیب تغییرات ملایم می شود. به علاوه ملاحظه می شود که پارامتر غیر محلی در کاهش بار بحرانی کمانش نسبت به اندیس توانی تأثیر بیشتری دارد.

جدول ۱۱ تأثیر پارامتر غیر محلی بر بار بحرانی کمانش بی بعد (\bar{N}_{cr}) برای نانو ورق تابعی مدرج با در نظر گرفتن اثر سطح تحت شرایط ($b/a = 1, h/a = 0.1, g = 0$)

$\bar{\mu}$					$(\beta_1 = -1, \beta_2 = 0)$
۰/۴	۰/۳	۰/۲	۰/۱	.	
۱/۵۵۱۲۹	۲/۳۲۳۳	۳/۶۰۴۶۲	۵/۳۸۷۳	۶/۴۵۰۷۱	تئوری نمایی
۱/۵۵۰۹۸	۲/۳۲۲۸۲	۳/۶۰۳۸۸	۵/۳۸۶۲	۶/۴۴۹۳۹	تئوری مثلثاتی
۱/۵۵۰۹۱	۲/۳۲۲۷۲	۳/۶۰۳۷۲	۵/۳۸۵۹۶	۶/۴۴۹۱۱	تئوری هایپربولیکی
۱/۵۵۰۹۱	۲/۳۲۲۷۲	۳/۶۰۳۷۱	۵/۳۸۵۹۵	۶/۴۴۹۰۹	تئوری پارابولیکی
$\bar{\mu}$					$(\beta_1 = -1, \beta_2 = -1)$
۰/۴	۰/۳	۰/۲	۰/۱	.	
۰/۷۷۵۶۴۷	۱/۱۶۱۶۵	۱/۸۰۲۳۱	۲/۶۹۳۶۵	۳/۲۲۵۳۵	تئوری نمایی
۰/۷۷۵۴۸۹	۱/۱۶۱۴۱	۱/۸۰۱۹۴	۲/۶۹۳۱	۳/۲۲۴۶۹	تئوری مثلثاتی
۰/۷۷۵۴۵۵	۱/۱۶۱۳۶	۱/۸۰۱۸۶	۲/۶۹۲۹۸	۳/۲۲۴۵۵	تئوری هایپربولیکی
۰/۷۷۵۴۵۳	۱/۱۶۱۳۶	۱/۸۰۱۸۶	۲/۶۹۲۹۷	۳/۲۲۴۵۴	تئوری پارابولیکی



شکل ۱۰ تأثیر پارامتر غیر محلی بر بار بحرانی کمانش (N/m) برای نانو ورق تابعی مدرج با در نظر گرفتن اثر سطح تحت بارگذاری تک محوره ($\beta_1 = -1, \beta_2 = 0$) و تحت شرایط ($b/a = 1, g = 1$)



شکل ۱۱ تأثیر پارامتر غیر محلی و اندیس توانی بر بار بحرانی کمانش بی‌بعد (N_{cr}) برای نانو ورق تابعی مدرج تحت بارگذاری دوماحوره و تحت شرایط ($\beta_1 = -1, \beta_2 = -1$) و $(b/a = 1, h/a = 0.1)$

۶- نتیجه‌گیری

در پژوهش حاضر کمانش نانو ورق تابعی مدرج مستطیلی با در نظر گرفتن اثر سطح بررسی شده است. شرایط مرزی حاکم بر نانو ورق در این تحقیق، شرایط مرزی چهار طرف تکیه‌گاه ساده بوده است و معادلات حرکت با استفاده از اصل همپلتون به‌دست‌آمده است. برای تحلیل اثرات مرتبط با سطوح نانو ورق از تئوری الاستیسیته‌ی سطح گرین-مرداچ بهره گرفته شده است. پارامترهای متغیر در این تحلیل شامل پارامترهای مرتبط با سطح مانند تنش باقیمانده سطح، ثوابت الاستیسیته‌ی سطح و چگالی سطح و همچنین پارامترهای دیگر شامل اندیس توانی، نسبت عرض به طول، نسبت ضخامت به طول، تغییرات دما و پارامتر غیر محلی بوده است. روابط جابجایی با استفاده از تئوری‌های تغییر شکل برشی اصلاح‌شده‌ی نمایی، مثلثاتی، هایپربولیکی و پارابولیکی به‌دست‌آمده است و جهت بررسی اثرات غیر محلی نیز از تئوری الاستیسیته‌ی غیر محلی ارینگن استفاده شده است. بار بحرانی کمانش و شکل مودها با بهره‌گیری از روش حل گلرکین به‌دست‌آمده‌اند.

با توجه به جداول و نمودارهای ارائه شده در فصل این مقاله نتایج زیر قابل استنتاج می‌باشد:

پارامترهای مرتبط با سطح مانند تنش باقیمانده سطح و ثوابت الاستیسیته‌ی سطح هر کدام بر اساس مثبت یا منفی بودن مقادیری که دارند می‌توانند باعث افزایش یا کاهش بار بحرانی کمانش سیستم شوند. با توجه به مقادیری که در این مقاله برای پارامترهای سطح در نظر گرفته شده است مشاهده می‌شود که برآیند اثر آن‌ها سبب کاهش بار بحرانی کمانش سیستم شده است. در واقع برآیند اثر آن‌ها موجب کاهش انرژی کرنشی سیستم و در نتیجه آن کاهش سفتی و صلبیت شده که این امر نیز باعث کاهش بار بحرانی کمانش شده است.

با افزایش تنش باقیمانده سطح بار بحرانی کمانش کاهش می‌یابد در واقع افزایش تنش باقیمانده سطح باعث کاهش انرژی کرنشی می‌شود و به دنبال آن تحرک پذیری ورق افزایش می‌یابد و همین امر سبب کاهش بار بحرانی کمانش می‌شود. در حقیقت مثبت بودن تنش باقیمانده سطح موجب کاهش انرژی کرنشی و افزایش تحرک پذیری سیستم می‌شود به همین دلیل بار بحرانی کمانش نیز کاهش می‌یابد. برای مقادیر منفی تنش باقیمانده سطح نیز با استدلالی مشابه می‌توان دریافت که منفی بودن این پارامتر باعث افزایش انرژی کرنشی و به دنبال آن افزایش سفتی و مقدار بار بحرانی کمانش می‌شود.

تأثیر ثوابت الاستیسیته‌ی سطح برعکس تأثیر تنش باقیمانده سطح می‌باشد به گونه‌ای که در نظر گرفتن مقادیر مثبت برای این پارامترها باعث بالا رفتن انرژی کرنشی و سفتی بیشتر سیستم می‌شود و در نتیجه افزایش بار بحرانی کمانش را در پی دارد و

بالعکس در نظر گرفتن مقادیر منفی برای ثوابت الاستیسیته‌ی سطح باعث کاهش بار بحرانی کماتش می‌شود. در حقیقت انرژی کرنشی سیستم به ازای مقادیر مثبت برای ثوابت الاستیسیته‌ی سطح افزایش می‌یابد و در نتیجه تحرک پذیری ورق کمتر می‌شود که در نهایت این امر منجر به افزایش بار بحرانی کماتش سیستم می‌شود. دقیقاً برعکس این حالت زمانی رخ می‌دهد که برای ثوابت الاستیسیته‌ی سطح مقادیر منفی در نظر گرفته می‌شود و انرژی کرنشی کاهش یابد که به طبع آن سفتی و بار بحرانی کماتش سیستم کاهش می‌یابد.

در انتها به دلیل اینکه تحلیل کماتش یک تحلیل استاتیکی است بنابراین انرژی جنبشی در تحلیل کماتش سیستم صفر در نظر گرفته می‌شود و متعاقباً چگالی سطح نمی‌تواند تأثیری بر بار بحرانی کماتش سیستم بگذارد.

که با افزایش نسبت عرض به طول (در طول ثابت) بار بحرانی کماتش کاهش می‌یابد؛ زیرا با افزایش عرض ورق درجه آزادی افزایش می‌یابد و به همین دلیل سفتی ورق کم می‌شود و منجر به کاهش بار بحرانی کماتش می‌شود. علاوه بر این، از نتایج ارائه شده می‌توان دریافت که با افزایش نسبت ضخامت به طول بار بحرانی کماتش برای حالت بارگذاری تک‌محوره و دومحوره افزایش می‌یابد. افزایش نسبت ضخامت به طول هنگامی که طول ورق ثابت در نظر گرفته شده است باعث افزایش صلبیت و سفتی ورق شده و این امر نیز باعث افزایش بار بحرانی کماتش می‌شود.

بار بحرانی کماتش نیز با افزایش پارامتر غیر محلی کاهش می‌یابد. در واقع با افزایش پارامتر غیر محلی انرژی کرنشی سیستم کاهش پیدا می‌کند که با این کاهش صلبیت سیستم کم می‌شود و ورق تحرک پذیری بیشتری خواهد داشت که در نهایت این امر باعث کاهش بار بحرانی کماتش می‌شود.

افزایش اندیس توانی باعث کاهش بار بحرانی کماتش می‌شود؛ زیرا با افزایش مقدار اندیس توانی خواص ورق به خواص فلز نزدیک‌تر می‌شود و سفتی کاهش می‌یابد که این امر سبب کاهش بار بحرانی کماتش می‌شود.

۷- مراجع

- [1] Khorshidi K, Taheri M, Ghasemi M. Sensitivity Analysis of Vibrating Laminated Composite Rectangular Plates in Interaction with Inviscid Fluid Using EFAST Method. *Mechanics of Advanced Composite Structures*. 2020;7:219-31.
- [2] Rojas EF, Faroughi S, Abdelkefi A, Park YH. Investigations on the performance of piezoelectric-flexoelectric energy harvesters. *Applied Energy*. 2021;288:116611.
- [3] Rojas EF, Faroughi S, Abdelkefi A, Park YH. Nonlinear size dependent modeling and performance analysis of flexoelectric energy harvesters. *Microsystem Technologies*. 2019;25:3899-921.
- [4] Rahmani A, Faroughi S, Friswell MI, Babaei A. Eringen's nonlocal and modified couple stress theories applied to vibrating rotating nanobeams with temperature effects. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2022;29:4813-38.
- [5] Faroughi S, Sari MS, Abdelkefi A. Nonlocal Timoshenko representation and analysis of multi-layered functionally graded nanobeams. *Microsystem Technologies*. 2021;27:893-911.
- [6] Alijani F, Bakhtiari-Nejad F, Amabili M. Nonlinear vibrations of FGM rectangular plates in thermal environments. *Nonlinear Dynamics*. 2011;66:251-70.
- [7] Khorshidi K, Fallah A. Buckling analysis of functionally graded rectangular nano-plate based on nonlocal exponential shear deformation theory. *International journal of mechanical sciences*. 2016;113:94-104.
- [8] Khorshidi K, Ghasemi M, Fallah A. Buckling analysis of functionally graded rectangular microplate in thermal environment based on exponential shear deformation theory using the modified couple stress theory. *Journal of Solid and Fluid Mechanics*. 2018;8:179-96. (In Persian)
- [9] Khorshidi K, Bakhsheshy A. Free vibration analysis of a functionally graded rectangular plate in contact with a bounded fluid. *Acta Mechanica*. 2015;226:3401-23.

- [10] Kirchhoff G. Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*. 1850;1850:51-88.
- [11] Mindlin RD. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. 1951.
- [12] Reddy JN. A simple higher-order theory for laminated composite plates. 1984.
- [13] Sayyad AS, Ghugal YM. Bending and free vibration analysis of thick isotropic plates by using exponential shear deformation theory. *Applied and Computational mechanics*. 2012;6.
- [14] Ghugal YM, Sayyad AS. Free vibration of thick orthotropic plates using trigonometric shear deformation theory. *Latin American Journal of Solids and Structures*. 2011;8:229-43.
- [15] Soldatos KP. A transverse shear deformation theory for homogeneous monoclinic plates. *Acta Mechanica*. 1992;94:195-220.
- [16] Panc V. *Theories of elastic plates: Springer Science & Business Media*, 1975.
- [17] Javaheri R, Eslami MR. Thermal buckling of functionally graded plates based on higher order theory. *Journal of thermal stresses*. 2002;25:603-25.
- [18] Javaheri R, Eslami M. Buckling of functionally graded plates under in-plane compressive loading. *ZAMM- Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik: Applied Mathematics and Mechanics*. 2002;82:277-83.
- [19] Hosseini-Hashemi S, Khorshidi K, Amabili M. Exact solution for linear buckling of rectangular Mindlin plates. *Journal of sound and vibration*. 2008;315:318-42.
- [20] Zhang LW, Zhu P, Liew KM. Thermal buckling of functionally graded plates using a local Kriging meshless method. *Composite Structures*. 2014;108:472-92.
- [21] Thai H-T, Kim S-E. Closed-form solution for buckling analysis of thick functionally graded plates on elastic foundation. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2013;75:34-44.
- [22] El Meiche N, Tounsi A, Ziane N, Mechab I. A new hyperbolic shear deformation theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2011;53:237-47.
- [23] Mozafari H, Ayob A. Effect of thickness variation on the mechanical buckling load in plates made of functionally graded materials. *Procedia Technology*. 2012;1:496-504.
- [24] Aifantis EC. Strain gradient interpretation of size effects. *Fracture scaling: Springer*; 1999. p. 299-314.
- [25] Toupin R. Elastic materials with couple-stresses. *Archive for rational mechanics and analysis*. 1962;11:385-414.
- [26] Eringen AC, Edelen DGB. On nonlocal elasticity. *International journal of engineering science*. 1972;10:233-48.
- [27] Eringen AC. On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves. *Journal of applied physics*. 1983;54:4703-10.
- [28] Eringen AC. *Nonlocal continuum field theories* springer, berlin. 2002.
- [29] Khorshidi K, Fallah A. Effect of exponential stress resultant on buckling response of functionally graded rectangular plates. *Journal of Stress Analysis*. 2017;2:27-33.
- [30] Gurtin ME, Ian Murdoch A. A continuum theory of elastic material surfaces. *Archive for rational mechanics and analysis*. 1975;57:291-323.

- [31] Gurtin ME, Murdoch AI. Surface stress in solids. *International journal of Solids and Structures*. 1978;14:431-40.
- [32] Lu P, He LH, Lee HP, Lu C. Thin plate theory including surface effects. *International journal of Solids and Structures*. 2006;43:4631-47.
- [33] Ansari R, Sahmani S. Surface stress effects on the free vibration behavior of nanoplates. *International journal of engineering science*. 2011;49:1204-15.
- [34] Assadi A. Size dependent forced vibration of nanoplates with consideration of surface effects. *Applied Mathematical Modelling*. 2013;37:3575-88.
- [35] Wang KF, Wang BL. A finite element model for the bending and vibration of nanoscale plates with surface effect. *Finite Elements in Analysis and Design*. 2013;74:22-9.
- [36] Raghu P, Preethi K, Rajagopal A, Reddy JN. Nonlocal third-order shear deformation theory for analysis of laminated plates considering surface stress effects. *Composite Structures*. 2016;139:13-29.
- [37] Karimi M, Shahidi AR. Nonlocal, refined plate, and surface effects theories used to analyze free vibration of magnetoelectroelastic nanoplates under thermo-mechanical and shear loadings. *Applied Physics A*. 2017;123:1-17.
- [38] Attia MA. On the mechanics of functionally graded nanobeams with the account of surface elasticity. *International journal of engineering science*. 2017;115:73-101.
- [39] Wang KF, Wang BL, Xu MH, Yu AB. Influences of surface and interface energies on the nonlinear vibration of laminated nanoscale plates. *Composite Structures*. 2018;183:423-33.
- [40] Zhu C-S, Fang X-Q, Liu J-X. Surface energy effect on buckling behavior of the functionally graded nano-shell covered with piezoelectric nano-layers under torque. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2017;133:662-73.
- [41] Lu L, Guo X, Zhao J. On the mechanics of Kirchhoff and Mindlin plates incorporating surface energy. *International journal of engineering science*. 2018;124:24-40.
- [42] Mori T, Tanaka K. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta metallurgica*. 1973;21:571-4.
- [43] Reddy BS, Kumar JS, Reddy CE, Reddy K. Buckling analysis of functionally graded material plates using higher order shear deformation theory. *Journal of composites*. 2013;2013.
- [44] Thai H-T, Choi D-H. An efficient and simple refined theory for buckling analysis of functionally graded plates. *Applied Mathematical Modelling*. 2012;36:1008-22.