



A Unique Approach to Investigate the Free Vibrations of Non-uniform and Functionally Graded Euler-Bernoulli Beams

Kamiar Hosseini-Hashemi ^{a*}, Roohollah Talebitooti ^b, Shahriar Hosseini-Hashemi ^c

^{a*} Faculty of Mechanical Engineering, Iran university of Science and Technology, Tehran, Postcode 16842-13114, Iran

^b Department of Mechanical Engineering, Faculty of Mechanical Engineering, Iran university of Science and Technology, Tehran, Postcode 16842-13114, Iran

^c Impact Research Laboratory, Faculty of Mechanical Engineering, Iran university of Science and Technology, Tehran, Postcode 16842-13114, Iran

Original Article

Use your device to scan
and read the article online



Citation: Hosseini-Hashemi K, Talebitooti R, Hosseini-Hashemi SH. A Unique Approach to Investigate the Free Vibrations of Non-uniform and Functionally Graded Euler-Bernoulli Beams. *Mechanics of Advanced and Smart Materials*. 2023; 2(4): 462-487

 <https://10.52547/masm.2.4.463>

KEYWORDS

Euler-Bernoulli beam,
Cauchy's formula,
Free vibration analysis.

ABSTRACT

In this article, the free vibrations of non-uniform and inhomogeneous beams with the general non-classical boundary conditions including offset masses at both ends of beam, mass moment of inertia, and rotational and translational flexible constraints are investigated. A review of related sources shows that unlike many studies and various methods used to investigate the vibrations of non-uniform and inhomogeneous beams, the presented methods do not often lead to a unique solution for the beam with the general boundary conditions. Hence presented solutions cannot be used for the other special cases. Therefore, the purpose of this paper is to present a new method based on the application of the Cauchy's formula for iterative integrals which according to the best of authors knowledge has not been considered so far. By using this method and its related equations, it is possible to analyze the vibrations of different types of homogeneous uniform, homogeneous non-uniform, functionally graded uniform, and functionally graded none-uniform beams. The validation of the obtained results for some of the studied configurations have been compared with the available data reported in related studies and good agreement observed. Also parametric study has been presented in order to investigate the effect of aspect ratio for wedge and tapered beams. To carry out convergence test and other calculations throughout this article a code in Mathematica software has been written.

Extended Abstract

1. Introduction

The variety methods and approaches for computational and analytical analysis of non-uniform beams have been presented. The studies related to them may be categorized to four groups namely: 1: Homogeneous beams with classical boundary conditions, 2: Homogeneous beams with non-classical boundary conditions, 3: FG or inhomogeneous beams with classical boundary conditions and 4: FG or inhomogeneous beams with non-classic boundary conditions. In what follows we carry out literature review according to the mentioned groups. 1st group: Zhou and Cheung [1] studied the transverse vibration of uncompleted taper beams with variable rectangular cross-section using the Rayleigh-Ritz method. Using differential transformation method (DTM) and Frobenius integral, Lee and Lee [2] presented more accurate solution to investigate the free vibration of tapered Euler-Bernoulli beams. Kim et al. [3] have developed a state-vector equation method (SVEM) based spectral element method (SEM) to study axial vibration of non-uniform rods, and transverse vibration of beams modeled according to both Euler-Bernoulli and Timoshenko theories. 2nd group: Lai et al. [4] Lai et al [4] investigated the free

* Corresponding author. Tel. 09201986859

E-mail address: kamiar_hosseini@mecheng.iust.ac.ir

DOI: <https://10.52547/masm.2.4.463>

Received: January 26, 2023; Received in revised form: February 22, 2023; Accepted: March 26, 2023

© Author



vibration of Non-uniform and homogeneous beams with non classical boundary condition by using the modified adomian decomposition method (MADM). Malik and Moeen Fard [5] have investigated the large-amplitude flexural-tensile free vibration for a non-uniform vertical beam carrying a mass with eccentricity and rotational inertia at the free end. The vibration of non-uniform beams with different boundary conditions and flexible ends has studied by Selik [6] using the Chebyshev wavelet collocation method. The free vibration of beams with a non-uniform cross-section and placed on a fixed and linear Winkler bed based on the Euler-Bernoulli beam theory and using the Lager collocation method has been studied by Qanadiasl et al. [7]. 3rd groups: A new approach based on the transformation of the differential equation of transverse vibration of Euler-Bernoulli beams with non-uniform cross-section to Fredholm integral equations has introduced by Huang and Lee [8] Liu et al. [9] have created new simple models for studying the free vibrations of Euler-Bernoulli FG conical beams using the spline finite point method. (SFPM). A simple and new method for modeling and analyzing the free vibrations of axial FG beams by approximating displacements through high-order Chebyshev expansion and also discretizing the governing differential equations by using the Lagrange equation and the modified Chebyshev spectral method is presented by Zhou et al. [10]. Kao et al. [11] have used the asymptotic disturbance method to provide an analytical relationship for investigating the free vibration of non-uniform and non-homogeneous beams with different boundary conditions. The free vibration analysis of FG non-uniform beam with an edge cracked has investigated by Shabani and Cunedoglu [12]. They have used the Timoshenko beam theory for the finite element analysis and modeled the cantilever beam by 50 layers of material using the Spectra-Geometric method. Sahu et al. [13] have introduced a generalized finite element approach to investigate the free vibration of an axially FG non-uniform beam. 4th group: Hein and Feklistova [14] investigated the vibration of non-uniform and functionally graded beams with different boundary conditions and variable cross-sections based on the Euler-Bernoulli beam theory and the Haar wavelet method. In this study, it is assumed that the characteristics of the cross section and the material are variable in the axial direction. Based on the Euler-Bernoulli beam theory, Sari and Al-Dahidi [15] have used the Chebyshev spectral collocation method to study the free vibration behavior of FG non-uniform multiple beams. They assumed that the beams have joined by elastic translational springs, and the properties of the beams vary along the axial direction. Using the Spectra-Geometric Method Li et al. [16] have investigated the free vibrations of an axially functionally graded Timoshenko beam with an arbitrary variable cross-section based on the so-called geometric spectrum method. They presented the cross-sectional area, moment of inertia, modulus of elasticity, specific mass and shear modulus using Fourier cosine expansion and obtained eigenvalues and coefficients of Fourier series by applying Hamilton's principle. In this paper, the free vibrations of non-uniform and FG beams with the general non-classical boundary conditions including end objects with mass moment of inertia, eccentricity, and rotational and translational flexible constraints are investigated. According to the literature review, it is disclosed that unlike many studies and various methods used to investigate the vibrations of non-uniform and FG beams by numerous investigator, their method often does not lead to a unique solution for the beam with the general boundary conditions. Consequently, the implemented solution cannot be used for the other special cases. Therefore, the novelty of this article is the introduction of a new method based on the application of the Cauchy formula for iterative integrals, the solution provided through this method can be used for a variety of boundary conditions, materials and beam geometry.

2. Theoretical formulation

As shown in Figure 1, Consider a non-uniform beam system subjected to distributed external force $p = p(x, t)$ with a non-concentrated end masses M_i and mass moment of inertias J_{O_i} about the ends of the beam. The center of gravity of masse shown by G_i do not coincide with the points of attachment and are located at a distance e_i from the points of attachment. The beam is elastically supported with the translational and rotational spring stiffnesses K_{T_i} and K_{R_i} at both ends respectively. The axial coordinate of the beam, the cross sectional area, modulus of elasticity, cross sectional moment of inertia, mass density, and length of the non-uniform beam are denoted by x , $A(x)$, $E(x)$, $I(x)$, $\rho(x)$ and L , respectively. Using Hamilton's principle, the governing differential equation of transverse motion and the boundary conditions in dimensionless form may be written as:

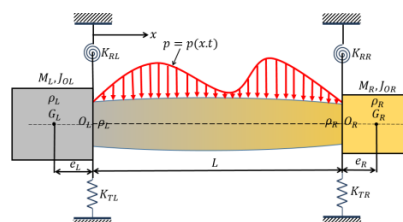


Figure 1. Schematic of non-uniform beam with elastically restrained ends and with off-set tip masses

$$\frac{d^2}{dX^2} \left(\mu(X) \frac{d^2 \widehat{w}(X)}{dX^2} \right) - \beta^4 \eta(X) \widehat{w}(X) - \frac{pL^3}{D(0)} = 0 \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \widehat{w}(0)}{dX^2} + \widehat{G}_{1L} \frac{d\widehat{w}(0)}{dX} + \widehat{G}_{2L} \widehat{w}(0) &= 0, & \frac{d^3 \widehat{w}(0)}{dX^3} + \widehat{G}_{3L} \frac{d\widehat{w}(0)}{dX} + \widehat{G}_{4L} \widehat{w}(0) &= 0, \\ \frac{d^3 \widehat{w}(1)}{dX^3} + \widehat{G}_{3R} \frac{d\widehat{w}(1)}{dX} + \widehat{G}_{4R} \widehat{w}(1) &= 0, & \frac{d^3 \widehat{w}(1)}{dX^3} + \widehat{G}_{3R} \frac{d\widehat{w}(1)}{dX} + \widehat{G}_{4R} \widehat{w}(1) &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

where

$$\begin{aligned} \widehat{G}_{1L} &= \beta^4 \widehat{J}_{OL} - \widehat{K}_{RL}, & \widehat{G}_{2L} &= -\beta^4 \widehat{M}_L \widehat{e}_L, & \widehat{G}_{3L} &= \gamma_0 (\widehat{K}_{RL} - \beta^4 \widehat{J}_{OL}) + \widehat{M}_L \widehat{e}_L \beta^4, \\ \widehat{G}_{4L} &= \beta^4 \widehat{M}_L (\gamma_0 \widehat{e}_L - 1) + \widehat{K}_{TL}, & \widehat{G}_{1R} &= \widehat{K}_{RR} - \lambda \beta^4 \widehat{J}_{OR}, & \widehat{G}_{2R} &= -\lambda \beta^4 \widehat{M}_R \widehat{e}_R, \\ \widehat{G}_{3R} &= \lambda \beta^4 (\gamma \widehat{J}_{OR} + \widehat{M}_R \widehat{e}_R) - \gamma \widehat{K}_{RR}, & \widehat{G}_{4R} &= \lambda \beta^4 \widehat{M}_R (\gamma \widehat{e}_R + 1) - \widehat{K}_{TR} \end{aligned} \tag{3}$$

and

$$X = \frac{x}{L}, \widehat{w}(X) = \frac{\widehat{w}(x)}{L}, \mu(X) = \frac{D(X)}{D(0)}, \eta(X) = \frac{m(X)}{m(0)}, \beta^4 = \frac{\omega^2 L^4 m(0)}{D(0)} \tag{4}$$

$$\widehat{M}_L = \frac{M_L}{m(0)L}, \widehat{e}_L = \frac{e_L}{L}, \widehat{J}_{OL} = \frac{J_{OL}}{m(0)L^3}, \widehat{K}_{RL} = \frac{LK_{RL}}{D(0)}, \widehat{K}_{TL} = \frac{K_{TL}L^3}{D(0)}, \gamma_0 = \frac{D'(0)}{D(0)},$$

$$\widehat{M}_R = \frac{M_R}{m(0)L}, \widehat{e}_R = \frac{e_R}{L}, \widehat{J}_{OR} = \frac{J_{OR}}{m(0)L^3}, \widehat{K}_{RR} = \frac{LK_{RR}}{D(1)}, \widehat{K}_{TR} = \frac{K_{TR}L^3}{D(1)}, \gamma = \frac{D'(1)}{D(1)}, \lambda = \frac{D(0)}{D(1)}$$

In order to solve Eq.1 in absence of external force, Cauchy’s formula for iterative integrals is exploited. According to this formula, if the nth order derivative of $y(X)$ function assumed to be $f(X)$, one may write:

$$y(X) = \int_0^X \frac{(X - \tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau) d\tau \tag{5}$$

Using Cauchy’s formula for iterated integral and integrating both side of Eq.1 with respect to τ four times. We get

$$\frac{d}{dX} \left(\mu(X) \frac{d^2 \widehat{w}(X)}{dX^2} \right) - \beta^4 \int_0^X \eta(\tau) \widehat{w}(\tau) d\tau = C_1, \tag{6}$$

$$\mu(X) \frac{d^2 \widehat{w}(X)}{dX^2} - \beta^4 \int_0^X (X - \tau) \eta(\tau) \widehat{w}(\tau) d\tau = C_1 X + C_2, \tag{7}$$

$$\frac{d}{dX} [\widehat{w}(X) \mu(X)] - 2\dot{\mu}(X) \widehat{w}(X) + \int_0^X \mu''(\tau) \widehat{w}(\tau) d\tau - \frac{\beta^4}{2} \int_0^X (X - \tau)^2 \eta(\tau) \widehat{w}(\tau) d\tau = \frac{C_1}{2} X^2 + C_2 X + C_3, \tag{8}$$

and

$$\begin{aligned} \widehat{w}(X) \mu(X) - 2 \int_0^X \dot{\mu}(\tau) \widehat{w}(\tau) d\tau + \int_0^X (X - \tau) \mu''(\tau) \widehat{w}(\tau) d\tau - \frac{\beta^4}{6} \int_0^X (X - \tau)^3 \eta(\tau) \widehat{w}(\tau) d\tau \\ = \frac{C_1}{6} X^3 + \frac{C_2}{2} X^2 + C_3 X + C_4 \end{aligned} \tag{9}$$

where C_i ($i = 1 \dots 4$) are integration constants which should be determined according to the boundary conditions As a result

$$C_1 = \frac{b_3 A_1 - b_4 A_2}{\zeta}, \quad C_2 = -\frac{b_3 A_3 - b_4 A_4}{\zeta}, \quad C_3 = \frac{b_3 A_5 - b_4 A_6}{\zeta}, \quad C_4 = -\frac{b_3 A_7 - b_4 A_8}{\zeta} \tag{10}$$

In Eq.10 the coefficients A_i ($i = 1 \dots 8$) and ζ may be written as follow:

$$\begin{aligned} A_1 &= \det \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}, & A_2 &= \det \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}, & A_3 &= \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}, \\ A_4 &= \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}, & A_5 &= \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{bmatrix}, & A_6 &= \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{11}$$

$$A_7 = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}, \quad A_8 = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad \zeta = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

where

$$\begin{aligned} a_{11} &= 0, & a_{12} &= 1, & a_{13} &= \hat{G}_{1L}, & a_{14} &= \gamma_0 \hat{G}_{1L} + \hat{G}_{2L}, & a_{21} &= 1, & a_{22} &= -\gamma_0, & a_{23} &= \hat{G}_{3L}, \\ a_{24} &= \gamma_0 \hat{G}_{3L} + \hat{G}_{4L}, & a_{31} &= 6 + \hat{G}_{2R} + (\gamma + 3)\hat{G}_{1R}, & a_{32} &= 3[2 + \hat{G}_{2R} + \hat{G}_{1R}(\gamma + 2)], \\ a_{33} &= 6[\hat{G}_{1R}(\gamma + 1) + \hat{G}_{2R}], & a_{34} &= 6(\gamma \hat{G}_{1R} + \hat{G}_{2R}), & a_{41} &= (\gamma + 3)\hat{G}_{3R} + \hat{G}_{4R} - 6(\gamma - 1), \\ a_{42} &= 3[(\gamma + 2)\hat{G}_{3R} + \hat{G}_{4R} - 2\gamma], & a_{43} &= 3[(\gamma + 2)\hat{G}_{3R} + \hat{G}_{4R} - 2\gamma], & a_{44} &= 6(\gamma \hat{G}_{3R} + \hat{G}_{4R}) \end{aligned} \tag{12}$$

Also in Eq.10, the coefficients b_i ($i = 1 \dots 4$) are given as:

$$\begin{aligned} b_1 &= 0, & b_2 &= 0, & b_3 &= (\gamma \hat{G}_{1R} + \hat{G}_{2R})(6B_2 - 12B_1 - \beta^4 B_3) - 3[\beta^4(\hat{G}_{1R}B_5 + 2B_6) - 2\hat{G}_{1R}B_4], \\ b_4 &= (\gamma \hat{G}_{3R} + \hat{G}_{4R})(6B_2 - 12B_1 - \beta^4 B_3) - 3[\beta^4(\hat{G}_{3R}B_5 - 2\gamma B_6 + 2B_7) - 2\hat{G}_{3R}B_4] \end{aligned} \tag{13}$$

where

$$\begin{aligned} B_1 &= \int_0^1 \dot{\mu}(\tau) \hat{w}(\tau) d\tau, & B_2 &= \int_0^1 (1 - \tau) \mu''(\tau) \hat{w}(\tau) d\tau, & B_3 &= \int_0^1 (1 - \tau)^3 \eta(\tau) \hat{w}(\tau) d\tau, \\ B_4 &= \int_0^1 \mu''(\tau) \hat{w}(\tau) d\tau, & B_5 &= \int_0^1 (1 - \tau)^2 \eta(\tau) \hat{w}(\tau) d\tau, & B_6 &= \int_0^1 (1 - \tau) \eta(\tau) \hat{w}(\tau) d\tau, & B_7 &= \int_0^1 \eta(\tau) \hat{w}(\tau) d\tau \end{aligned} \tag{14}$$

Rewriting Eq.9 in terms of three functions namely $R_1(X, \tau)$, $R_2(X, \tau)$ and $R_3(X, \tau)$ as follow:

$$\hat{w}(X) \mu(X) - \int_0^1 R_1(X, \tau) \hat{w}(\tau) d\tau + \int_0^X R_2(X, \tau) \hat{w}(\tau) d\tau + \int_0^X R_3(X, \tau) \hat{w}(\tau) d\tau = 0 \tag{15}$$

where

$$\begin{aligned} R_1(X, \tau) &= \frac{1}{12} \{ [12\dot{\mu}(\tau) - 6(1 - \tau)\mu''(\tau) + \beta^4(1 - \tau)^3 \eta(\tau)] h_1(X) + 12h_4(X) \eta(\tau) \\ &\quad + [12\mu''(\tau) - 6\beta^4(1 - \tau)^2 \eta(\tau)] h_2(X) + 12h_3(X)(1 - \tau) \eta(\tau) \}, \\ R_2(X, \tau) &= [(X - \tau) \mu'''(\tau) - 2\dot{\mu}(\tau)], & R_3(X, \tau) &= -\frac{\beta^4}{6} (X - \tau)^3 \eta(\tau) \end{aligned} \tag{16}$$

In Eq.16 functions $h_1(X)$ to $h_4(X)$ are given as:

$$\begin{aligned} h_1(X) &= \frac{2}{\zeta} \{ [(\gamma \hat{G}_{3R} + \hat{G}_{4R})A_2 - (\gamma \hat{G}_{1R} + \hat{G}_{2R})A_1] X^3 + 3[(\gamma \hat{G}_{1R} + \hat{G}_{2R})A_3 - (\gamma \hat{G}_{3R} + \hat{G}_{4R})A_4] X^2 \\ &\quad + 6[(\gamma \hat{G}_{3R} + \hat{G}_{4R})A_6 - (\gamma \hat{G}_{1R} + \hat{G}_{2R})A_5] X + 6[(\gamma \hat{G}_{1R} + \hat{G}_{2R})A_7 - (\gamma \hat{G}_{3R} + \hat{G}_{4R})A_8] \}, \\ h_2(X) &= \frac{1}{\zeta} \{ [(\hat{G}_{1R}A_1 - \hat{G}_{3R}A_2) X^3 + 3(\hat{G}_{3R}A_4 - \hat{G}_{1R}A_3) X^2 + 6(\hat{G}_{1R}A_5 - \hat{G}_{3R}A_6) X + 6(\hat{G}_{3R}A_8 - \hat{G}_{1R}A_7)] \}, \\ h_3(X) &= \frac{\beta^4}{\zeta} \{ -(A_1 + A_2\gamma) X^3 + 3(A_3 + A_4\gamma) X^2 - 6(A_5 + A_6\gamma) X + 6(A_7 + \gamma A_8) \}, \\ h_4(X) &= \frac{\beta^4}{\zeta} (A_2 X^3 - 3A_4 X^2 + 6A_6 X - 6A_8) \end{aligned} \tag{17}$$

In order to find the numerical solution for Eq.15 we expand $\hat{w}(X)$ as power series. Thus, it could be written as:

$$\hat{w}(X) = \sum_{n=1}^{NN} g_{n-1} X^{n-1} \tag{18}$$

where g_{n-1} are unknown coefficients and NN is an integer. Substituting Eq.18 into Eq.15 leads to

$$\sum_{n=1}^{NN} g_{n-1} \left(\mu(X) X^{n-1} - \int_0^1 R_1(X, \tau) \tau^{n-1} d\tau + \int_0^X R_2(X, \tau) \tau^{n-1} d\tau + \int_0^X R_3(X, \tau) \tau^{n-1} d\tau \right) = 0 \tag{19}$$

Multiplying both sides of Eq.19 by X^m and integrating from $X = 0$ to $X = 1$, gives rise to:

$$\int_0^1 X^m dX \left[\sum_{n=1}^{NN} g_{n-1} \left(\mu(X) X^{n-1} - \int_0^1 R_1(X, \tau) \tau^{n-1} d\tau + \int_0^X R_2(X, \tau) \tau^{n-1} d\tau + \int_0^X R_3(X, \tau) \tau^{n-1} d\tau \right) \right] = 0 \tag{20}$$

A system of NN linear algebraic equations can be obtained by setting $M = 1$ to $M = NN - 1$ into Eq.20. The matrix form of these equations may be written as:

$$\begin{bmatrix} S_{00} & S_{01} & \cdots & S_{0n} \\ S_{10} & S_{11} & \cdots & S_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{Mn-1} & S_{Mn-1} & \vdots & S_{Mn-1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{21}$$

where

$$S_{Mn-1} = \sum_{M=0}^{NN-1} \sum_{n=1}^{NN} \mathcal{A}_{Mn-1} + \mathcal{Q}_{Mn-1} + \mathcal{U}_{Mn-1} + \mathcal{K}_{Mn-1} \tag{22}$$

and

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{Mn-1} &= \int_0^1 \mu(X) X^{n-1+M} dX, \quad \mathcal{Q}_{Mn-1} = - \int_0^1 X^M dX \int_0^1 R_1(X, \tau) \tau^{n-1} d\tau = - \int_0^1 \mathcal{B}_{n-1} X^M dX, \\ \mathcal{U}_{Mn-1} &= \int_0^1 X^M dX \int_0^X R_2(X, \tau) \tau^{n-1} d\tau = \int_0^1 \mathcal{D}_{n-1} X^M dX, \\ \mathcal{K}_{Mn-1} &= \int_0^1 X^M dX \left(-\frac{\beta^4}{6} \right) \int_0^X R_3(X, \tau) \tau^{n-1} d\tau = \int_0^1 \mathcal{F}_{n-1} X^M dX \end{aligned} \tag{23}$$

To seek a non-trivial solution for g_{n-1} , the determinant of coefficient matrix in Eq.21 should vanish. Hence it can be written as:

$$\det \begin{bmatrix} S_{00} & S_{01} & \cdots & S_{0n} \\ S_{10} & S_{11} & \cdots & S_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{Mn-1} & S_{Mn-1} & \vdots & S_{Mn-1} \end{bmatrix} = 0 \tag{24}$$

As a result, the frequency equation in β can be obtained by expanding determinant in Eq.24. Having found a non-trivial solution for g_{n-1} , one may obtain the mode shapes by making use of Eq.18.

3. Validation

Consider a clamped-simply beam with exponentially and sinusoidal varying height and constant depth as shown in Figure 2. Assuming variation of height for exponentially and sinusoidal beams are given as:

$$h(X) = h_0 e^{-0.5X}, \quad h(X) = h_0 \cos \frac{\pi}{4} X \tag{24}$$

Thus, the area and the moment of inertia of the section for beam with exponentially varying height may be expressed as:

$$A(X) = b_0 h(X) = A_0 e^{-0.5X}, \quad I(X) = I_0 e^{-1.5X} \tag{25}$$

Similarly, the area and the moment of inertia of the section for beam with sinusoidal varying height may be written as:

$$A(X) = b_0 h(X) = A_0 \cos \frac{\pi}{4} X, \quad I(X) = I_0 \left[\cos \frac{\pi}{4} X \right]^3 \tag{26}$$

Where $A_0 = b_0 h_0$ and $I_0 = b_0 h_0^3 / 12$ are the cross sectional area and moment of inertia at $X = 0$. The dimensionless frequency parameters with exponentially and sinusoidally varying height for a clamped-simply beam is given in Table 1 and compared with [3]. As it is clear, a very good agreement could be observed.

Table 1. Dimensionless frequency parameters of a clamped-simply beam

Varying height	Method	β_1^2	β_2^2	β_3^2
Exponential	Present	12.8368	39.6592	81.7513
	[3]	12.8400	39.6600	81.7500
Sinusoidal	Present	14.2489	44.9941	93.4804
	[3]	14.2500	44.9900	93.4800

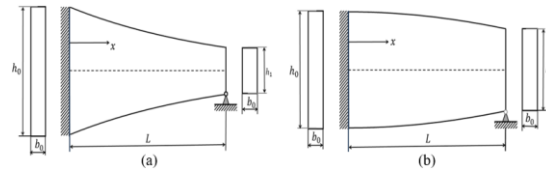


Figure 2. Non uniform beam (a) exponentially varying height and (b) sinusoidal varying height

4. Conclusion

In this study, a new approach has been presented to solve free vibration of axially FG tapered Euler-Bernoulli beams with the aid of Cauchy's formula for iterated integrals. The solution of the transverse displacement was assumed in the form of power series, through which the resulting Cauchy's iterated integrals were solved. The accuracy and computational efficiency of the proposed method is confirmed by comparing our numerical results with those available in the literature, including the case of Functionally graded none-uniform beams according to exponential low, double-parabolic truncated taper beam and beams with exponentially and sinusoidal varying height. Our suggested approach is capable of treating arbitrarily axial gradient and varying cross-section with any classical or non-classical boundary conditions including offset mass with mass moment of inertia and with the translational and rotational flexible ends.



ارایه یک معادله یکتا جهت بررسی ارتعاشات آزاد تیرهای اویلر-برنولی غیریکنواخت و مدرج تابعی محوری

کامیارحسینی هاشمی الف*، روح‌الله طالبی توتی ب، شهریار حسینی هاشمی ج

الف* کارشناسی، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران، kamiar_hosseini@mecheng.iust.ac.ir

ب دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران، rtalebi@iust.ac.ir

ج کارشناسی ارشد، آزمایشگاه مکانیک ضربه، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران،

hosseinhashemi1373@gmail.com

چکیده	واژگان کلیدی
در این مقاله، ارتعاشات آزاد تیرهای غیریکنواخت و غیر همگن با شرایط مرزی غیر کلاسیک کلی شامل اجرام انتهایی با ممان اینرسی جرمی، خروج از مرکز و قیود انعطاف‌پذیر چرخشی و انتقالی مورد مطالعه قرار گرفته است. بررسی مروری بر منابع حاوی این پیام است که بر خلاف مطالعات متعدد و روش‌های گوناگونی که جهت بررسی ارتعاشات تیرهای غیریکنواخت و غیر همگن به کار گرفته شده غالباً روش ارائه‌شده قابلیت بررسی ارتعاشات تیرهای حامل اجرام انتهایی با ممان اینرسی جرمی، خروج از مرکز و قیود انعطاف‌پذیر چرخشی و انتقالی را یکجا ندارد. لذا هدف از این بررسی ارائه یک روند جدید بر مبنای به‌کارگیری فرمول کوشی برای انتگرال‌گیری‌های مکرر است که با توجه به اطلاعات نویسندگان تاکنون مورد توجه قرار نگرفته است. با استفاده از این روند استفاده از این روند و معادلات مربوط به آن می‌توان ارتعاشات انواع متنوع و گوناگونی از تیرهای غیریکنواخت مدرج تابعی، غیریکنواخت همگن، یکنواخت مدرج تابعی و یکنواخت همگن را مورد تحلیل قرار داد. اعتبار سنجی نتایج به‌دست‌آمده برای بعضی از پیکربندی‌های مورد بررسی از طریق مقایسه با داده‌های موجود و گزارش‌شده در مطالعات مرتبط مورد رسیدگی قرار گرفته است. همچنین مطالعات پارامتری در راستای بررسی اثر نسبت منظری بر روی پارامترهای فرکانسی و شکل مودها برای تیرهای گوه‌ای و مخروطی انجام و ارائه شده است. جهت انجام آزمون همگرایی و سایر محاسبات در این مقاله از کد نویسی در نرم‌افزار Mathematica استفاده شده است.	تیر اویلر-برنولی، فرمول کوشی، ارتعاشات آزاد. تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۱۱/۰۶ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۱/۱۱/۲۴ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۱۲/۲۸

۱- مقدمه

تیرها به‌عنوان عناصر ساختاری نقش مهمی در بسیاری از شاخه‌های فناوری مدرن مربوط به هوافضا، مکانیک، دریایی، هسته‌ای و مهندسی عمران را ایفا می‌کنند؛ زیرا که می‌توان تمام یا قسمتی از یک سازه مهندسی مانند بدنه کشتی، بازوهای ربات، پره‌های توربین، تیرک میکروسکوپ‌های نیروی اتمی و غیره را کم‌وبیش به‌صورت تیر مدل کرد؛ بنابراین تیرها نقش مهمی در خلق سیستم‌های مکانیکی، الکترومکانیکی و ساختمانی دارند. ارتعاشات تیرها برای مهندسی که این سیستم‌ها را طراحی می‌کنند از اهمیت فوق‌العاده برخوردار است زیرا که غالب این سیستم‌ها تحت تحریک دینامیکی قرار دارند. لذا تعیین فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای ارتعاشی برای تیرهای الاستیک با شرایط مرزی مختلف از جمله موارد پراهمیت در طراحی این‌گونه

سیستم‌ها تلقی می‌گردد. انواع روش‌ها و رویکردهای محاسباتی و تحلیلی برای تیرهای غیریکنواخت ارائه شده است. مطالعات مربوط به آن‌ها را می‌توان در چهار گروه طبقه‌بندی کرد: ۱: تیرهای هموزن با شرایط مرزی کلاسیک، ۲: تیرهای هموزن با شرایط مرزی غیر کلاسیک، ۳: تیرهای مدرج تابعی یا ناهمگن با شرایط مرزی کلاسیک، ۴: تیرهای مدرج تابعی یا ناهمگن با شرایط مرزی غیر کلاسیک. در ادامه به بررسی ادبیات موضوع با توجه به گروه‌های مذکور پرداخته می‌شود. گروه اول: ژو و چونگ [۱] ارتعاشات عرضی تیرهای مخروطی ناقص با سطح مقطع متغیر مستطیلی شکل را با استفاده از روش انرژی رایلی-ریتز^۱ و به‌کارگیری توابع استاتیکی به‌عنوان توابع قابل قبول در روش رایلی-ریتز مورد مطالعه قرار داده‌اند. لی و لی [۲] با استفاده از روش‌های تبدیل دیفرانسیل و انتگرال فروبینیوس^۲ راه‌حل دقیقی در ارتباط با تحلیل ارتعاشات آزاد تیرهای مخروطی اویلر-برنولی ارائه کرده‌اند. آن‌ها جداول فرکانسی برای بعضی از مثال‌های مرتبط را بر اساس استفاده از نظریه تیر اویلر-برنولی و تئوری تیر تیموشنکو ارائه داده و با نتایج مراجع موجود مقایسه کرده‌اند ارتعاشات طولی میله‌ها و عرضی تیرهای غیریکنواخت که با هر دو نظریه اویلر-برنولی و تیموشنکو مدل‌سازی شده‌اند نیز توسط کیم و همکاران [۳] با استفاده از روش معادله بردار حالت^۳ بررسی شده است. گروه دوم: لی و همکاران [۴] ارتعاشات آزاد تیر اویلر-برنولی غیریکنواخت و همگن با شرایط مرزی کلی غیر کلاسیک را با استفاده از روش تجزیه اصلاح‌شده آدومیان^۴ مورد بررسی قرار داده‌اند مالک و معین فرد [۵] ارتعاش آزاد خمشی-کششی دامنه بزرگ را برای یک تیر یکسر گیردار عمودی غیریکنواخت حامل جرم با خروج از مرکز و اینرسی چرخشی در انتهای آزاد بررسی کرده‌اند ارتعاش تیرهای غیریکنواخت با شرایط مرزی مختلف و انتهای انعطاف‌پذیر با استفاده از روش هماهنگی موجک چبیشف^۵ توسط سلیک [۶] مورد مطالعه قرار گرفته است. نتایجی که در این تحقیق توسط وی گزارش شده است شامل جداول فرکانسی برای بعضی از مثال‌های مورد بررسی است که درستی آن‌ها از طریق مقایسه با نتایج موجود در مراجع مختلف صحه‌گذاری شده است. ارتعاش آزاد تیرها با سطح مقطع غیریکنواخت و مستقر بر بستر ثابت و خطی وینکلر بر اساس تئوری تیر اویلر-برنولی و با استفاده از روش لاگر کالوکشن^۶ توسط قنادی اصل و همکاران [۷] مورد رسیدگی قرار گرفته است. گروه سوم: هوآنگ و لی [۸] رویکرد جدیدی را مبتنی بر تبدیل معادله دیفرانسیل حرکت ارتعاش عرضی تیرهای اویلر-برنولی با سطح مقطع غیریکنواخت به معادله انتگرالی فریدهلم^۷ ارائه کرده‌اند. لیو و همکاران [۹] مدل‌های ساده جدیدی برای مطالعه ارتعاشات آزاد تیرهای مخروطی مدرج تابعی اویلر-برنولی با استفاده از روش اسپلاین نقطه‌ای محدود^۸ ایجاد کرده‌اند. یک روش ساده و جدید برای مدل‌سازی و تحلیل ارتعاشات آزاد تیرهای مدرج تابعی محوری با تقریب جابجایی‌ها از طریق بسط چبیشف مرتبه بالا و همچنین گسسته‌سازی معادلات دیفرانسیل حاکم با به‌کارگیری معادله لاگرانژ و روش طیفی چبیشف اصلاح شده^۹ توسط ژو و همکاران [۱۰] ارائه شده است. کاو و همکاران [۱۱] جهت ارائه یک رابطه تحلیلی برای بررسی ارتعاش آزاد تیرهای غیریکنواخت و غیر همگن با شرایط مرزی مختلف از روش آشفتگی مجانبی^{۱۰} استفاده کرده‌اند. ارتعاش آزاد یک تیر متقارن غیریکنواخت و مدرج تابعی محوری با لبه ترک‌دار به‌وسیله شعبانی و کندیوقلو [۱۲] مورد مطالعه قرار گرفته است. آن‌ها جهت تحلیل المان محدود تیر ساندویچی چندلایه از تئوری تیر تیموشنکو استفاده کرده و یک تیر یک سر گیردار را توسط ۵۰ لایه ماده مدل‌سازی کرده‌اند. دو نوع تیر غیریکنواخت با ارتفاع ثابت و پهنای متغیر نمایی و خطی در طول تیر مورد بررسی قرار گرفته است. یک رویکرد المان محدود تعمیم‌یافته، برای تجزیه و تحلیل ارتعاش آزاد یک تیر مدرج تابعی محوری با ارتفاع متغیر تابع نمایی و پهنای ثابت توسط ساهو و همکاران [۱۳] ارائه شده است. در این رویکرد آن‌ها المان تیر غیریکنواخت را دو گره‌ای و با دو درجه آزادی در هر گره در نظر گرفته و با مونتاژ این المان‌ها مدل اجزای محدود را به یک مدل تعمیم‌یافته تبدیل کرده‌اند. گروه چهارم: هین و فکلینس توا [۱۴] ارتعاش تیرهای غیریکنواخت و مدرج تابعی با شرایط مرزی مختلف و سطوح مقطع متغیر را بر اساس تئوری تیر اویلر-برنولی و روش موجک هار^{۱۱} مورد بررسی قرار داده‌اند. در این بررسی فرض شده است که ویژگی‌های سطح مقطع و ماده در جهت محوری متغیرند. ساری و الداهیدی [۱۵] بر اساس نظریه تیر اویلر-برنولی، رفتار ارتعاشی تیرهای چندگانه غیریکنواخت و مدرج تابعی محوری را که به‌وسیله فنرهای انتقالی الاستیک به هم متصل شده‌اند مورد رسیدگی قرار داده‌اند در این مطالعه جهت تبدیل معادلات دیفرانسیل حاکم به سیستم معادلات جبری و حل پارامترهای فرکانسی بدون بعد از روش تجمیع طیفی

¹ Rayleigh -Ritz Method

² Frobenius Integral

³ State Vector Equation Method

⁴ Modified Adomian Decomposition Method

⁵ Chebyshev Wavelet Collocation Method

⁶ Laguerre Collocation Method

⁷ Fredholm Integral Equation

⁸ Spline Finite Point Method

⁹ Chebyshev spectral collocation Method

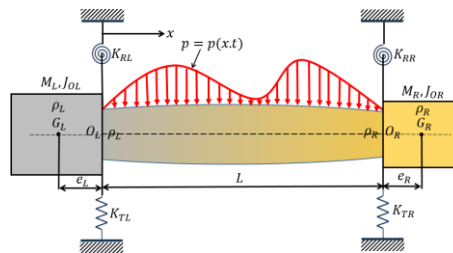
¹⁰ Asymptotic perturbation Method

¹¹ Haar Wavelet Method

چیبشف^۱ استفاده شده است. لی و همکاران [۱۶] ارتعاشات آزاد تیر تیموشنکو مدرج تابعی محوری با مقطع متغیر دلخواه را بر اساس روش موسوم به طیف هندسی^۲ بررسی کرده‌اند. آن‌ها سطح مقطع، ممان اینرسی، مدول الاستیسیته، جرم مخصوص و مدول برشی را با استفاده از بسط کسینوس فوریه ارائه کرده و با به‌کارگیری اصل هامیلتون مقادیر ویژه و ضرایب سری فوریه را به دست آورده‌اند. در این پژوهش ارتعاشات آزاد تیرهای غیریکنواخت و مدرج تابعی با شرایط مرزی غیر کلاسیک کلی شامل اجرام با ممان اینرسی جرمی، خروج از مرکز و قیود انعطاف‌پذیر انتقالی و چرخشی مورد رسیدگی قرار گرفته است. مرور مطالعاتی بر ادبیات موضوع نشانگر این مطلب است که برخلاف روش‌های متعدد به کار گرفته‌شده جهت بررسی ارتعاشات تیرهای غیریکنواخت و مدرج تابعی به‌وسیله شمار زیادی از محققین، روش آن‌ها غالباً منجر به حل یکتا برای تیر با شرایط مرزی کلی نمی‌گردد در نتیجه حل ارائه‌شده برای دیگر حالات خاص قابل استفاده نیست. لذا نوآوری پژوهش حاضر معرفی روشی جدید بر مبنای کاربرد فرمول کوشی برای انتگرال‌های مکرراست که حل ارائه‌شده از این طریق برای انواع شرایط مرزی، جنس و هندسه تیر قابل استفاده می‌باشد.

۲- استنتاج معادله دیفرانسیل حرکت و شرایط مرزی

تیر غیریکنواخت با شرایط مرزی غیر کلاسیک آزاد-آزاد مطابق شکل ۱ را در نظر می‌گیریم که در آن $p = p(x, t)$ نیروی خارجی بر واحد طول تیر، K_{Ri} ثابت فنرهای چرخشی، K_{Ti} ثابت فنرهای خطی، M_i اجرام انتهایی، J_{oi} ممان اینرسی جرمی اجرام انتهایی حول نقاط O_i ، e_i خروج از مرکز اجرام انتهایی، G_i مراکز جرم اجرام انتهایی و L طول تیر هستند. همچنین زیرنویس‌های L و R به ترتیب بر سمت چپ و راست تیر اشاره دارند. چنانچه تیر غیریکنواخت، غیر هموزن و به‌طور محوری از جنس مدرج تابعی فرض شود. با انتخاب محور x در امتداد محور تیر می‌توان سطح مقطع متغیر تیر، مدول الاستیسیته، ممان اینرسی سطح مقطع و جرم مخصوص آن را به ترتیب با $A(x)$ ، $E(x)$ ، $I(x)$ و $\rho(x)$ نمایش داد.



شکل ۱ مدل تیر غیریکنواخت مدرج تابعی با شرایط مرزی متشکل از جرم، فنرهای خطی و چرخشی

مؤلفه‌های میدان جابجایی برای تیر اولیر- برنولی به‌صورت:

$$u = -z \frac{\partial w(x, t)}{\partial x}, \quad v = 0, \quad w = w(x, t) \quad (1)$$

می‌باشند. در نتیجه بر مبنای قانون هوک مؤلفه محوری تانسور تنش در هر مقطع به فاصله x از انتهای سمت چپ تیر، با به‌کارگیری کرنش محوری ε_{xx} عبارت است از:

$$\sigma_{xx} = E(x) \varepsilon_{xx} = -E(x) z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2)$$

همچنین گشتاور خمشی $M = M(x, t)$ با انتخاب المان dA از سطح مقطع تیر که در فاصله z از تار خنثی قرار دارد برای تیر با سطح مقطع غیریکنواخت به‌صورت:

$$M = - \int_A \sigma_{xx} z dA = E(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \int_A z^2 dA = E(x) I(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = D(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (3)$$

¹ Chebyshev Spectral Collocation Method

² Spectra-Geometric Method

داده می‌شود. با به کارگیری رابطه ۳ نیروی برشی $Q = Q(x, t)$ نیز به وسیله رابطه ۴ قابل ارائه است.

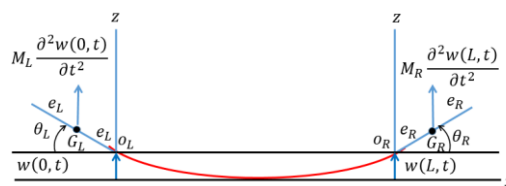
$$Q = \frac{\partial}{\partial x} \left(D(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = \left(D'(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D(x) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) \quad (۴)$$

که در آنها

$$D(x) = E(x)I(x) \quad (۵)$$

صلبیت خمشی است. حال چنانچه مطابق شکل ۲ زاویه چرخش تار خنثی تیر بعد از تغییر شکل در نقاط O_L و O_R به ترتیب θ_L و θ_R فرض شوند داریم.

$$\theta_L = \frac{\partial w(0, t)}{\partial x}, \quad \theta_R = \frac{\partial w(L, t)}{\partial x} \quad (۶)$$



شکل ۲ تار خنثی تیر بعد از تغییر شکل

جهت تعیین معادله دینامیکی حرکت و شرایط مرزی کلی حاکم، با استفاده از اصل هامیلتون داریم:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta U + \delta W_{nc}) dt = 0 \quad (۷)$$

که در آن T انرژی جنبشی، U انرژی پتانسیل یا کرنشی و W_{nc} کار نیروهای غیر پایستار است. لذا با توجه به شکل ۱ می‌توان نوشت:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L m(x) \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} M_L \left[\frac{\partial w(0, t)}{\partial t} \right]^2 + \frac{1}{2} M_R \left[\frac{\partial w(L, t)}{\partial t} \right]^2 + \frac{1}{2} J_{OL} \left(\frac{\partial \theta_L}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} J_{OR} \left(\frac{\partial \theta_R}{\partial t} \right)^2, \quad (۸)$$

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L D(x) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} K_{TL} [w(0, t)]^2 + \frac{1}{2} K_{TR} [w(L, t)]^2 + \frac{1}{2} K_{RL} \theta_L^2 + \frac{1}{2} K_{RR} \theta_R^2$$

که در آن $m(x) = \rho(x)A(x)$ جرم بر واحد طول تیر غیریکنواخت و غیر هموزن می‌باشد. در ارتباط با کار نیروهای غیر پایستار می‌باید علاوه بر کار نیروی خارجی $p = p(x, t)$ ، کارهای W_1 و W_2 به واسطه نیروی برشی در سمت چپ و راست تیر را نیز تعیین نمود. لذا با توجه به شکل ۲ می‌توان نشان داد:

$$W_1 = M_L \frac{\partial^2 w(0, t)}{\partial t^2} e_L \theta_L + M_L e_L \frac{\partial^2 \theta_L}{\partial t^2} w(0, t), \quad (۹)$$

$$W_2 = -M_R \frac{\partial^2 w(L, t)}{\partial t^2} e_R \theta_R - M_R e_R \frac{\partial^2 \theta_R}{\partial t^2} w(L, t)$$

در نتیجه کار نیروهای غیر پایستار به صورت:

$$W_{nc} = W_1 + W_2 + \int_0^L p dx \quad (۱۰)$$

ارائه می‌شود. بنابراین با جانشینی روابط ۸ و ۱۰ در رابطه ۷ بعد از محاسبه تغییرات داریم:

$$\begin{aligned} D(0) \frac{\partial^2 w(0, t)}{\partial x^2} - K_{RL} \left[\frac{\partial w(0, t)}{\partial x} \right] - J_{OL} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\frac{\partial w(0, t)}{\partial x} \right] + M_L e_L \frac{\partial^2 w(0, t)}{\partial t^2} &= 0, \\ -\frac{\partial}{\partial x} \left[D(0) \frac{\partial^2 w(0, t)}{\partial x^2} \right] - K_{TL} w(0, t) - M_L \frac{\partial^2 w(0, t)}{\partial t^2} + M_L e_L \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\frac{\partial w(0, t)}{\partial x} \right] &= 0, \\ -D(L) \frac{\partial^2 w(L, t)}{\partial x^2} - K_{RR} \left[\frac{\partial w(L, t)}{\partial x} \right] - J_{OR} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\frac{\partial w(L, t)}{\partial x} \right] - M_R e_R \frac{\partial^2 w(L, t)}{\partial t^2} &= 0, \end{aligned} \quad (۱۱)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[D(L) \frac{\partial^2 w(L, t)}{\partial x^2} \right] - K_{TR} w(L, t) - M_R \frac{\partial^2 w(L, t)}{\partial t^2} - M_R e_R \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\frac{\partial w(L, t)}{\partial x} \right] = 0$$

که شرایط مرزی برای تیر اویلر-برنولی مطابق شکل ۱ را ارائه می‌کند. همچنین

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(D(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + m(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - p = 0 \quad (12)$$

که معادله دینامیکی حرکت را به دست می‌دهد می‌توان با استفاده از روش جداسازی متغیرها و فرض $w(x, t) = \tilde{w}(x) e^{i\omega t}$ اشکال بی‌بعد رابطه دیفرانسیل حرکت و روابط شرایط مرزی را به صورت:

$$\frac{d^2}{dX^2} \left(\mu(X) \frac{d^2 \hat{w}(X)}{dX^2} \right) - \beta^4 \eta(X) \hat{w}(X) - \frac{pL^3}{D(0)} = 0 \quad (13)$$

و

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \hat{w}(0)}{dX^2} - \hat{K}_{RL} \frac{d\hat{w}(0)}{dX} + \beta^4 \hat{J}_{OL} \frac{d\hat{w}(0)}{dX} - \beta^4 \hat{M}_L \hat{e}_L \hat{w}(0) &= 0, \\ \gamma_0 \frac{d^2 \hat{w}(0)}{dX^2} + \frac{d^3 \hat{w}(0)}{dX^3} + \hat{K}_{TL} \hat{w}(0) - \hat{M}_L \beta^4 \hat{w}(0) + \hat{M}_L \hat{e}_L \beta^4 \frac{d\hat{w}(0)}{dX} &= 0, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \hat{w}(1)}{dX^2} + \hat{K}_{RR} \frac{d\hat{w}(1)}{dX} - \beta^4 \hat{J}_{OR} \lambda \frac{d\hat{w}(1)}{dX} - \beta^4 \hat{M}_R \hat{e}_R \lambda \hat{w}(1) &= 0, \\ \gamma \frac{d^2 \hat{w}(1)}{dX^2} + \frac{d^3 \hat{w}(1)}{dX^3} - \hat{K}_{TR} \hat{w}(1) + \hat{M}_R \beta^4 \lambda \hat{w}(1) + \hat{M}_R \hat{e}_R \beta^4 \lambda \frac{d\hat{w}(1)}{dX} &= 0 \end{aligned}$$

نوشته؛ که در آن‌ها پارامترهای بی‌بعد عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned} X = \frac{x}{l}, \quad \hat{w}(X) = \frac{\tilde{w}(x)}{l}, \quad \mu(X) = \frac{D(X)}{D(0)}, \quad \eta(X) = \frac{m(X)}{m(0)}, \quad \beta^4 = \frac{\omega^2 L^4 m(0)}{D(0)}, \\ \hat{M}_L = \frac{M_L}{m(0)L}, \quad \hat{e}_L = \frac{e_L}{L}, \quad \hat{J}_{OL} = \frac{J_{OL}}{m(0)L^3}, \quad \hat{K}_{RL} = \frac{LK_{RL}}{D(0)}, \quad \hat{K}_{TL} = \frac{K_{TL}L^3}{D(0)}, \quad \gamma_0 = \frac{D'(0)}{D(0)}, \\ \hat{M}_R = \frac{M_R}{m(0)L}, \quad \hat{e}_R = \frac{e_R}{L}, \quad \hat{J}_{OR} = \frac{J_{OR}}{m(0)L^3}, \quad \hat{K}_{RR} = \frac{LK_{RR}}{D(1)}, \quad \hat{K}_{TR} = \frac{K_{TR}L^3}{D(1)}, \quad \gamma = \frac{D'(1)}{D(1)}, \quad \lambda = \frac{D(0)}{D(1)} \end{aligned} \quad (15)$$

همچنین گشتاور خمشی و نیروی برشی بی‌بعد به صورت:

$$\hat{M}(X) = \frac{d^2 \hat{w}(X)}{dX^2}, \quad \hat{Q}(X) = \frac{L^2 \tilde{Q}(x)}{D(X)} = \left[\frac{D'(X)}{D(X)} \frac{d^2 \hat{w}(X)}{dX^2} + \frac{d^3 \hat{w}(X)}{dX^3} \right] \quad (16)$$

داده می‌شوند. با فرض:

$$\begin{aligned} \hat{G}_{1L} = \beta^4 \hat{J}_{OL} - \hat{K}_{RL}, \quad \hat{G}_{2L} = -\beta^4 \hat{M}_L \hat{e}_L, \quad \hat{G}_{3L} = \gamma_0 (\hat{K}_{RL} - \beta^4 \hat{J}_{OL}) + \hat{M}_L \hat{e}_L \beta^4, \\ \hat{G}_{4L} = \beta^4 \hat{M}_L (\gamma_0 \hat{e}_L - 1) + \hat{K}_{TL}, \quad \hat{G}_{1R} = \hat{K}_{RR} - \lambda \beta^4 \hat{J}_{OR}, \quad \hat{G}_{2R} = -\lambda \beta^4 \hat{M}_R \hat{e}_R, \\ \hat{G}_{3R} = \lambda \beta^4 (\gamma \hat{J}_{OR} + \hat{M}_R \hat{e}_R) - \gamma \hat{K}_{RR}, \quad \hat{G}_{4R} = \lambda \beta^4 \hat{M}_R (\gamma \hat{e}_R + 1) - \hat{K}_{TR} \end{aligned} \quad (17)$$

می‌توان روابط ۱۱ را به صورت:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \hat{w}(0)}{dX^2} + \hat{G}_{1L} \frac{d\hat{w}(0)}{dX} + \hat{G}_{2L} \hat{w}(0) = 0, \quad \frac{d^3 \hat{w}(0)}{dX^3} + \hat{G}_{3L} \frac{d\hat{w}(0)}{dX} + \hat{G}_{4L} \hat{w}(0) = 0, \\ \frac{d^3 \hat{w}(1)}{dX^3} + \hat{G}_{3R} \frac{d\hat{w}(1)}{dX} + \hat{G}_{4R} \hat{w}(1) = 0, \quad \frac{d^3 \hat{w}(1)}{dX^3} + \hat{G}_{3R} \frac{d\hat{w}(1)}{dX} + \hat{G}_{4R} \hat{w}(1) = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

بازنویسی کرد.

۳- ارتعاشات آزاد و حل معادله دیفرانسیل حاکم

جهت بررسی ارتعاشات آزاد با فرض $p = 0$ رابطه دیفرانسیلی بی‌بعد ۱۳ را به صورت:

$$\frac{d^2}{dX^2} \left(\mu(X) \frac{d^2 \hat{w}(X)}{dX^2} \right) - \beta^4 \eta(X) \hat{w}(X) = 0 \quad (19)$$

می‌نویسیم به منظور حل رابطه دیفرانسیلی ۱۹ از فرمول کوشی برای انتگرال گیری مکرر استفاده می‌کنیم. بر اساس این فرمول چنانچه مشتق مرتبه n ام تابع $y(X)$ ، $f(X)$ باشد می‌توان با انتگرال گیری‌های مکرر تابع $y(X)$ را با استفاده از یک انتگرال یگانه به صورت:

$$y(X) = \int_0^X \frac{(X-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau) d\tau \quad (20)$$

تعیین کرد. بنابراین رابطه ۱۹ بعد از یکبار انتگرال گیری با به کارگیری فرمول کوشی به شکل

$$\frac{d}{dX} \left(\mu(X) \frac{d^2 \hat{w}(X)}{dX^2} \right) - \beta^4 \int_0^X \eta(\tau) \hat{w}(\tau) d\tau = C_1 \quad (21)$$

ارائه می‌شود. با انتگرال گیری مجدد از طرفین رابطه ۲۱ داریم:

$$\mu(X) \frac{d^2 \hat{w}(X)}{dX^2} - \beta^4 \int_0^X (X-\tau) \eta(\tau) \hat{w}(\tau) d\tau = C_1 X + C_2 \quad (22)$$

جمله اول در طرف سمت چپ رابطه ۲۲ را می‌توان به صورت:

$$\mu(X) \frac{d^2 \hat{w}(X)}{dX^2} = \frac{d^2}{dX^2} [\hat{w}(X) \mu(X)] - 2 \frac{d}{dX} [\dot{\mu}(X) \hat{w}(X)] + \mu''(X) \hat{w}(X) \quad (23)$$

نوشت. با جانشین کردن رابطه ۲۳ در رابطه ۲۲ و به کارگیری فرمول کوشی می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dX} [\hat{w}(X) \mu(X)] - 2 \dot{\mu}(X) \hat{w}(X) + \int_0^X \mu''(\tau) \hat{w}(\tau) d\tau - \frac{\beta^4}{2} \int_0^X (X-\tau)^2 \eta(\tau) \hat{w}(\tau) d\tau \\ = \frac{C_1}{2} X^2 + C_2 X + C_3 \end{aligned} \quad (24)$$

در نتیجه با انتگرال گیری مجدد از طرفین رابطه ۲۴ داریم.

$$\begin{aligned} \hat{w}(X) \mu(X) - 2 \int_0^X \dot{\mu}(\tau) \hat{w}(\tau) d\tau + \int_0^X (X-\tau) \mu''(\tau) \hat{w}(\tau) d\tau - \frac{\beta^4}{6} \int_0^X (X-\tau)^3 \eta(\tau) \hat{w}(\tau) d\tau \\ = \frac{C_1}{6} X^3 + \frac{C_2}{2} X^2 + C_3 X + C_4 \end{aligned} \quad (25)$$

در روابط ۲۱، ۲۲، ۲۴ و ۲۵ ثوابت انتگرالی C_i با استفاده از شرایط مرزی تعیین می‌گردند. بدین منظور می‌باید جابجایی، شیب، گشتاور خمشی و نیروی برشی بی‌بعد را در سمت چپ و سمت راست تیر مشخص کرد. در نتیجه با جانشین کردن $X=0$ و $X=1$ در روابط ۲۱، ۲۲، ۲۴ و ۲۵ تعداد هشت رابطه به صورت زیر نتیجه می‌گردد.

$$\begin{aligned} \hat{w}(0) \mu(0) &= C_4, \\ \frac{d}{dX} [\hat{w}(0) \mu(0)] - 2 \dot{\mu}(0) \hat{w}(0) &= C_3, \\ \mu(0) \frac{d^2 \hat{w}(0)}{dX^2} &= C_2, \\ \frac{d}{dX} \left(\mu(0) \frac{d^2 \hat{w}(0)}{dX^2} \right) &= C_1, \\ \hat{w}(1) \mu(1) &= \frac{1}{6} [C_1 + 3C_2 + 6(C_3 + C_4 + 2B_1 - B_2) + \beta^4 B_3], \\ \frac{d}{dX} [\hat{w}(1) \mu(1)] - 2 \dot{\mu}(1) \hat{w}(1) &= \frac{1}{2} [C_1 + 2(C_2 + C_3 - B_4) + \beta^4 B_5], \\ \mu(1) \frac{d^2 \hat{w}(1)}{dX^2} &= C_1 + C_2 + \beta^4 B_6, \\ \frac{d}{dX} \left(\mu(1) \frac{d^2 \hat{w}(1)}{dX^2} \right) &= C_1 + \beta^4 B_7 \end{aligned} \quad (26)$$

که در آن‌ها ضرایب B_1 الی B_7 به صورت انتگرال‌های زیر تعریف شده‌اند.

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \int_0^1 \dot{\mu}(\tau)\hat{w}(\tau)d\tau, & B_2 &= \int_0^1 (1-\tau)\mu''(\tau)\hat{w}(\tau)d\tau, & B_3 &= \int_0^1 (1-\tau)^3\eta(\tau)\hat{w}(\tau)d\tau, \\
 B_4 &= \int_0^1 \mu''(\tau)\hat{w}(\tau)d\tau, & B_5 &= \int_0^1 (1-\tau)^2\eta(\tau)\hat{w}(\tau)d\tau, & B_6 &= \int_0^1 (1-\tau)\eta(\tau)\hat{w}(\tau)d\tau, \\
 B_7 &= \int_0^1 \eta(\tau)\hat{w}(\tau)d\tau
 \end{aligned} \tag{۲۷}$$

حال از آنجایی که داریم

$$\begin{aligned}
 \mu(0) &= \frac{D(0)}{D(0)} = 1, & \dot{\mu}(0) &= \frac{\dot{D}(0)}{D(0)} = \gamma_0, & \hat{M}(0) &= \frac{d^2\hat{w}(0)}{dX^2} = \gamma_0 \frac{d^2\hat{w}(0)}{dX^2} + \frac{d^3\hat{w}(0)}{dX^3}, \\
 \mu(1) &= \frac{D(1)}{D(0)}, & \frac{\dot{D}(1)}{D(1)} &= \frac{\dot{\mu}(1)}{\mu(1)} = \gamma, & \lambda &= \frac{D(0)}{D(1)}, & \hat{M}(1) &= \frac{d^2\hat{w}(1)}{dX^2}, \\
 \hat{Q}(1) &= \gamma \frac{d^2\hat{w}(0)}{dX^2} + \frac{d^3\hat{w}(0)}{dX^3}
 \end{aligned} \tag{۲۸}$$

با به‌کارگیری رابطه ۲۸ و بازنویسی روابط ۲۶ می‌توان جابجایی، شیب، گشتاور خمشی و نیروی برشی بی‌بعد را در سمت چپ و سمت راست تیر به‌صورت روابط ۲۹ ارائه کرد.

$$\begin{aligned}
 \hat{w}(0) &= C_4, & \frac{d\hat{w}(0)}{dX} &= \gamma_0\hat{w}(0) + C_3 = \gamma_0C_4 + C_3, & \hat{M}(0) &= \frac{d^2\hat{w}(0)}{dX^2} = C_2, \\
 \hat{Q}(0) &= \frac{d}{dX} \left(\mu(0) \frac{d^2\hat{w}(0)}{dX^2} \right) = \dot{\mu}(0) \frac{d^2\hat{w}(0)}{dX^2} + \mu(0) \frac{d^3\hat{w}(0)}{dX^3} = \gamma_0 \frac{d^2\hat{w}(0)}{dX^2} + \frac{d^3\hat{w}(0)}{dX^3} = C_1, \\
 \hat{w}(1) &= \frac{\lambda}{6} [C_1 + 3C_2 + 6(C_3 + C_4 + 2B_1 - B_2) + \beta^4 B_3], \\
 \frac{d\hat{w}(1)}{dX} &= \frac{\lambda}{6} [(\gamma + 3)C_1 + 3(\gamma + 2)C_2 + 6(\gamma + 1)C_3 + 6\gamma C_4 + 12\gamma B_1 - 6(\gamma B_2 + B_4) \\
 &\quad + \beta^4(\gamma B_3 + 3B_5)], \\
 \frac{d^2\hat{w}(1)}{dX^2} &= \lambda(C_1 + C_2 + \beta^4 B_6), \\
 \hat{Q}(1) &= \frac{\dot{\mu}(1)}{\mu(1)} \frac{d^2\hat{w}(1)}{dX^2} + \frac{d^3\hat{w}(1)}{dX^3} = \gamma \frac{d^2\hat{w}(1)}{dX^2} + \frac{d^3\hat{w}(1)}{dX^3} = \lambda(C_1 + \beta^4 B_7)
 \end{aligned} \tag{۲۹}$$

با جانشین کردن جابجایی، شیب، گشتاور خمشی و نیروی برشی از روابط ۲۹ در روابط ۱۸ معادله ماتریسی زیر

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{Bmatrix} \tag{۳۰}$$

حاصل می‌گردد که در آن مؤلفه‌های a_{ij} و ضرایب b_i عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= 0, & a_{12} &= 1, & a_{13} &= \hat{G}_{1L}, & a_{14} &= \gamma_0\hat{G}_{1L} + \hat{G}_{2L}, & a_{21} &= 1, & a_{22} &= -\gamma_0, & a_{23} &= \hat{G}_{3L}, \\
 a_{24} &= \gamma_0\hat{G}_{3L} + \hat{G}_{4L}, & a_{31} &= 6 + \hat{G}_{2R} + (\gamma + 3)\hat{G}_{1R}, & a_{32} &= 3[2 + \hat{G}_{2R} + \hat{G}_{1R}(\gamma + 2)], \\
 a_{33} &= 6[\hat{G}_{1R}(\gamma + 1) + \hat{G}_{2R}], & a_{34} &= 6(\gamma\hat{G}_{1R} + \hat{G}_{2R}), & a_{41} &= (\gamma + 3)\hat{G}_{3R} + \hat{G}_{4R} - 6(\gamma - 1), \\
 a_{42} &= 3[(\gamma + 2)\hat{G}_{3R} + \hat{G}_{4R} - 2\gamma], & a_{43} &= 3[(\gamma + 2)\hat{G}_{3R} + \hat{G}_{4R} - 2\gamma], & a_{44} &= 6(\gamma\hat{G}_{3R} + \hat{G}_{4R}) \\
 b_1 &= 0, & b_2 &= 0, & b_3 &= \gamma(\hat{G}_{1R} + \hat{G}_{2R})(6B_2 - 12B_1 - \beta^4 B_3) - 3[\beta^4(\hat{G}_{1R}B_5 + 2B_6) - 2\hat{G}_{1R}B_4], \\
 b_4 &= (\gamma\hat{G}_{3R} + \hat{G}_{4R})(6B_2 - 12B_1 - \beta^4 B_3) - 3[\beta^4(\hat{G}_{3R}B_5 - 2\gamma B_6 + 2B_7) - 2\hat{G}_{3R}B_4]
 \end{aligned} \tag{۳۱}$$

در نتیجه با به‌کارگیری دستور کرامر داریم:

$$C_1 = \frac{1}{\zeta}(b_3A_1 - b_4A_2), \quad C_2 = -\frac{b_3A_3 - b_4A_4}{\zeta}, \quad C_3 = \frac{b_3A_5 - b_4A_6}{\zeta}, \quad C_4 = -\frac{b_3A_7 - b_4A_8}{\zeta} \tag{۳۲}$$

که در آن‌ها

$$\zeta = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \tag{۳۳}$$

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \det \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}, & A_2 &= \det \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}, & A_3 &= \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}, \\
 A_4 &= \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}, & A_5 &= \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{bmatrix}, & A_6 &= \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \end{bmatrix}, \\
 A_7 &= \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}, & A_8 &= \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{۳۴}$$

است. با جانشینی ضرایب C_1 الی C_4 از رابطه ۳۲ در عبارت سمت راست رابطه انتگرالی ۲۵ می‌توان نوشت:

$$\widehat{w}(X)\mu(X) - 2 \int_0^X \dot{\mu}(\tau)\widehat{w}(\tau)d\tau + \int_0^X (X-\tau)\mu''(\tau)\widehat{w}(\tau)d\tau - \frac{\beta^4}{6} \int_0^X (X-\tau)^3 \eta(\tau)\widehat{w}(\tau)d\tau = V
 \tag{۳۵}$$

که در آن V عبارت است از:

$$V = \frac{1}{12} [(12B_1 - 6B_2 + \beta^4 B_3)h_1(X) + (12B_4 - 6\beta^4 B_5)h_2(X) + 12h_3(X)B_6 + 12h_4(X)B_7]
 \tag{۳۶}$$

همچنین در رابطه ۳۶ ضرایب $h_1(X)$ الی $h_4(X)$ به صورت زیر داده می‌شوند.

$$\begin{aligned}
 h_1(X) &= \frac{2}{\zeta} \{ [(\gamma\widehat{G}_{3R} + \widehat{G}_{4R})A_2 - (\gamma\widehat{G}_{1R} + \widehat{G}_{2R})A_1]X^3 + 3[(\gamma\widehat{G}_{1R} + \widehat{G}_{2R})A_3 - (\gamma\widehat{G}_{3R} + \widehat{G}_{4R})A_4]X^2 \\
 &\quad + 6[(\gamma\widehat{G}_{3R} + \widehat{G}_{4R})A_6 - (\gamma\widehat{G}_{1R} + \widehat{G}_{2R})A_5]X \\
 &\quad + 6[(\gamma\widehat{G}_{1R} + \widehat{G}_{2R})A_7 - (\gamma\widehat{G}_{3R} + \widehat{G}_{4R})A_8] \}, \\
 h_2(X) &= \frac{1}{\zeta} \{ [(\widehat{G}_{1R}A_1 - \widehat{G}_{3R}A_2)X^3 + 3(\widehat{G}_{3R}A_4 - \widehat{G}_{1R}A_3)X^2 + 6(\widehat{G}_{1R}A_5 - \widehat{G}_{3R}A_6)X \\
 &\quad + 6(\widehat{G}_{3R}A_8 - \widehat{G}_{1R}A_7)] \}, \\
 h_3(X) &= \frac{\beta^4}{\zeta} [- (A_1 + A_2\gamma)X^3 + 3(A_3 + A_4\gamma)X^2 - 6(A_5 + A_6\gamma)X + 6(A_7 + \gamma A_8)], \\
 h_4(X) &= \frac{\beta^4}{\zeta} (A_2X^3 - 3A_4X^2 + 6A_6X - 6A_8)
 \end{aligned}
 \tag{۳۷}$$

در نتیجه با جانشین کردن انتگرال‌های B_1 الی B_7 از رابطه ۲۷ در رابطه ۳۶ داریم:

$$V = \int_0^1 R_1(X, \tau) \widehat{w}(\tau) d\tau
 \tag{۳۸}$$

که در آن توابع $R_1(X, \tau)$ برای هر نوع شرایط مرزی کلاسیک و غیر کلاسیک انتهایی به صورت تحلیلی بسته از رابطه ۳۹ قابل حصول می‌باشند.

$$\begin{aligned}
 R_1(X, \tau) &= \frac{1}{12} \{ [12\dot{\mu}(\tau) - 6(1-\tau)\mu''(\tau) + \beta^4(1-\tau)^3\eta(\tau)]h_1(X) + 12h_4(X)\eta(\tau) \\
 &\quad + [12\mu''(\tau) - 6\beta^4(1-\tau)^2\eta(\tau)]h_2(X) + 12h_3(X)(1-\tau)\eta(\tau) \}
 \end{aligned}
 \tag{۳۹}$$

به عنوان مثال برای تیر غیر همگن، یکنواخت و یا غیریکنواخت گیردار در $X=0$ و آزاد در $X=1$ داریم.

$$R_1(X, \tau) = \frac{X^2\beta^4(3\tau - X)}{6} \eta(\tau)
 \tag{۴۰}$$

بدیهی است با فرض $\eta(\tau) = 1$ رابطه ۴۰، تابع $R_1(X, \tau)$ برای تیر یکنواخت و یا غیریکنواخت همگن را نیز به دست می‌دهد. حال رابطه ۳۵ را به صورت:

$$\widehat{w}(X)\mu(X) - \int_0^1 R_1(X, \tau) \widehat{w}(\tau) d\tau + \int_0^X R_2(X, \tau) \widehat{w}(\tau) d\tau + \int_0^X R_3(X, \tau) \widehat{w}(\tau) d\tau = 0
 \tag{۴۱}$$

می‌نویسیم که در آن

$$R_2(X, \tau) = [(X-\tau)\mu''(\tau) - 2\dot{\mu}(\tau)], \quad R_3(X, \tau) = -\frac{\beta^4}{6}(X-\tau)^3 \eta(\tau)
 \tag{۴۲}$$

است. به منظور ارائه حل عددی برای رابطه ۴۱ از بسط $\widehat{w}(X)$ به صورت سری توانی استفاده می‌کنیم از این رو می‌توان نوشت:

$$\widehat{w}(X) = \sum_{n=1}^{NN} g_{n-1} X^{n-1} \quad (43)$$

که در آن g_{n-1} ضرایب نامشخصی هستند که می‌باید تعیین گردند. همچنین NN یک عدد صحیح می‌باشد. با جانشین کردن رابطه ۴۳ در رابطه ۴۱ داریم.

$$\sum_{n=1}^{NN} g_{n-1} \left(\mu(X) X^{n-1} - \int_0^1 R_1(X, \tau) \tau^{n-1} d\tau + \int_0^X R_2(X, \tau) \tau^{n-1} d\tau + \int_0^X R_3(X, \tau) \tau^{n-1} d\tau \right) = 0 \quad (44)$$

رابطه ۴۴ را در $X^M dX$ ضرب کرده و در فاصله $X = 0$ تا $X = 1$ انتگرال می‌گیریم. بنابراین

$$\int_0^1 X^M dX \left[\sum_{n=1}^{NN} g_{n-1} \left(\mu(X) X^{n-1} - \int_0^1 R_1(X, \tau) \tau^{n-1} d\tau + \int_0^X R_2(X, \tau) \tau^{n-1} d\tau + \int_0^X R_3(X, \tau) \tau^{n-1} d\tau \right) \right] = 0 \quad (45)$$

با به کارگیری رابطه ۴۵ برای مقادیر صحیح $M = 1$ الی $M = NN - 1$ ، تعداد NN رابطه جبری خطی استنتاج می‌گردد که شکل ماتریسی این روابط به صورت:

$$\begin{bmatrix} S_{00} & S_{01} & \dots & S_{0n} \\ S_{10} & S_{11} & \dots & S_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ S_{Mn-1} & S_{Mn-1} & \vdots & S_{Mn-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_{n-1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (46)$$

می‌باشد در رابطه ماتریسی ۴۶ ضرایب S_{Mn-1} عبارت‌اند از:

$$S_{Mn-1} = \sum_{M=0}^{NN-1} \sum_{n=1}^{NN} \mathcal{A}_{Mn-1} + \mathcal{Q}_{Mn-1} + \mathcal{U}_{Mn-1} + \mathcal{K}_{Mn-1} \quad (47)$$

که در آن

$$\mathcal{A}_{Mn-1} = \int_0^1 \mu(X) X^{n-1+M} dX, \quad \mathcal{Q}_{Mn-1} = - \int_0^1 X^M dX \int_0^1 R_1(X, \tau) \tau^{n-1} d\tau = - \int_0^1 \mathcal{B}_{n-1} X^M dX, \quad (48)$$

$$\mathcal{U}_{Mn-1} = \int_0^1 X^M dX \int_0^X R_2(X, \tau) \tau^{n-1} d\tau = \int_0^1 \mathcal{D}_{n-1} X^M dX,$$

$$\mathcal{K}_{Mn-1} = \int_0^1 X^M dX \left(-\frac{\beta^4}{6} \right) \int_0^X R_3(X, \tau) \tau^{n-1} d\tau = \int_0^1 \mathcal{F}_{n-1} X^M dX$$

است. جهت تعیین جواب‌های غیر صفر برای ضرایب g_{n-1} ، $n = 1$ الی $n = NN$ در رابطه ۴۶، دترمینان ماتریس ضرایب را برابر صفر قرار می‌دهیم از این رو می‌توان نوشت

$$\det \begin{bmatrix} S_{00} & S_{01} & \dots & S_{0n} \\ S_{10} & S_{11} & \dots & S_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ S_{Mn-1} & S_{Mn-1} & \vdots & S_{Mn-1} \end{bmatrix} = 0 \quad (49)$$

در نتیجه رابطه مشخصه فرکانسی بر حسب فرکانس بی‌بعد β با بسط دترمینان نتیجه می‌گردد. همچنین با تعیین ضرایب g_{n-1} ، $n = 2$ الی $n = NN$ بر حسب g_0 شکل مودهای ارتعاشی نیز از رابطه ۴۳ استنتاج می‌شوند.

۴- همگرایی

به منظور بررسی همگرایی روش پیشنهادی، پارامترهای فرکانسی برای ارتعاشات تیر همگن و یکنواخت یکسر گیردار با در نظر گرفتن مقادیر مختلف NN و با استفاده از رابطه ۴۹ محاسبه شده است. نتایج به دست آمده برای چهار پارامتر فرکانسی اول همراه با پارامترهای فرکانسی حل تحلیلی در جدول ۱ به نمایش گذاشته شده‌اند. بررسی این جدول نشانگر این مطلب است که

نتایج عددی همگرایی سریع دارند. با افزایش NN از ۳ به ۷، نتایج عددی دو فرکانس اول با نتایج حل تحلیلی تا چهار رقم اعشار تطابق دارند؛ که نشان می‌دهد رویکرد حاضر بسیار کارآمد است. باین‌حال، دقت نتایج با افزایش شماره مودهای ارتعاش کاهش می‌یابد. برای فرکانس چهارم، نتیجه عددی با $NN = 7$ حدود 0.09 درصد از مقدار حل تحلیلی انحراف دارد. باین‌حال، چنانچه $NN = 11$ انتخاب شود، می‌توان مشاهده کرد که نتایج عددی و حل تحلیلی تا چهار رقم اعشار مطابقت دارند. در نتیجه، دقت بالاتری را می‌توان از طریق افزایش NN به دست آورد.

جدول ۱ همگرایی پنج پارامتر فرکانسی اول برحسب NN برای تیر همگن یکنواخت با شرایط مرزی یکسر گیردار

شماره مود	حل تحلیلی	$NN = 3$	$NN = 5$	$NN = 7$	$NN = 11$
1	1.87510	1.87539	1.87510	1.87510	1.87510
2	4.69409	4.71523	4.69416	4.69409	4.69409
3	7.85476	10.8694	7.95234	7.85590	7.85476
4	10.9955	-	11.3366	11.0054	10.9955

۵- تحلیل آباکوس

به‌منظور بررسی مزیت روش مطالعه حاضر در مقایسه با سایر روش‌های حل، مناسب دیده شد که این نتایج با نتایج حاصل از المان محدود مقایسه شوند. بدین منظور تحلیل پارامترهای فرکانسی از طریق شبیه‌سازی در نرم‌افزار آباکوس موردتوجه قرار گرفت. برای تیر یکنواخت و همگن با شرایط مرزی گیردار-گیردار و گیردار آزاد پنج پارامتر فرکانسی اول بر اساس روش مطالعه حاضر در جدول ۲ ارائه و با نتایج المان محدود مقایسه شده‌اند. همان‌طور که مشاهده می‌شود نتایج از توافق بسیار خوبی برخوردارند. با افزایش شماره مودهای ارتعاش از یک الی چهار، خطاهای مابین نتایج محاسبه‌شده از طریق المان محدود و نتایج حاصل از به‌کارگیری روش مطالعه حاضر افزایش می‌یابد. به‌عنوان مثال برای تیر با شرایط مرزی گیردار-گیردار خطاهای حاصل از مقایسه نتایج حاصل از دو روش به ترتیب برای مودهای اول تا چهارم عبارت‌اند از 0.31، 0.42، 0.56 و 0.75 بنابراین از آنجایی که نتایج حاصل از روش مطالعه حاضر با نتایج حل دقیق تا چهار رقم اعشار مطابقت دارند می‌توان بار دیگر نتیجه‌گیری کرد که روش پیشنهادی در این مقاله از دقت بسیار بالا برخوردار بوده و بر سایر روش‌ها از جمله المان محدود نیز مزیت دارد.

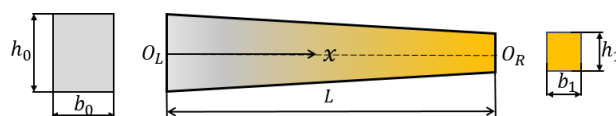
جدول ۲ مقایسه نتایج مطالعه حاضر و المان محدود برای تیر همگن یکنواخت

شرایط مرزی	روش	β_1	β_2	β_3	β_4
گیردار-گیردار	مطالعه حاضر	4.73004	7.85320	10.9956	14.1372
	آباکوس	4.71538	7.82029	10.9334	14.0312
	حل تحلیلی	4.73004	7.85320	10.9956	14.1372
گیردار-آزاد	مطالعه حاضر	1.87510	4.69409	7.85476	10.9955
	آباکوس	1.87046	4.67976	7.82348	10.9369
	حل تحلیلی	1.87510	4.69409	7.85476	10.9955

۶- نتایج

۶-۱- بررسی پارامترهای فرکانسی بی‌بعد برای چهار نوع تیر مدرج تابعی

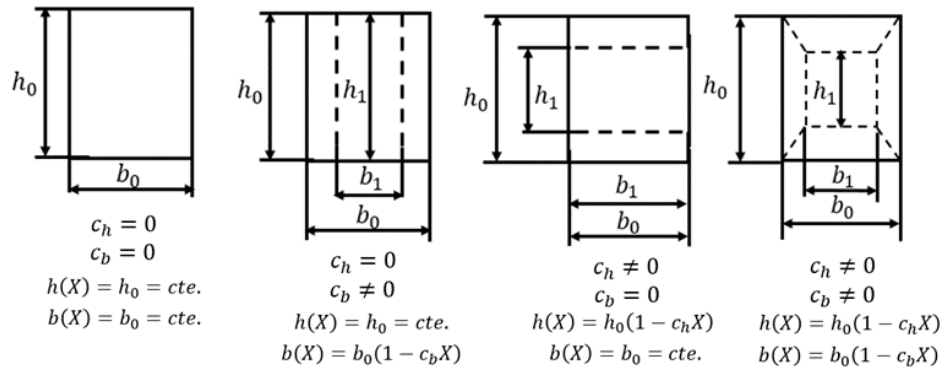
تیر غیریکنواخت مخروطی با مقطع مستطیلی مطابق شکل ۳ را در نظر گرفته و فرض می‌کنیم سطح مقطع و ممان اینرسی سطح برای این تیر توسط رابطه ۵۰ داده شوند. چنانچه ابعاد سطوح مقطع این تیر در $x = 0$ و $x = L$ مطابق شکل ۳ باشند می‌توان چهار حالت مختلف برای مقادیر c_b و c_h که هندسه تیر را تعریف می‌کنند به شرح مندرج در شکل ۴ لحاظ نمود.



شکل ۳ مدل تیر غیریکنواخت و مدرج تابعی محوری

$$A(X) = b(X)h(X) = b_0(1 - c_b X)h_0(1 - c_h X) = A_0(1 - c_b X)(1 - c_h X) \quad (50)$$

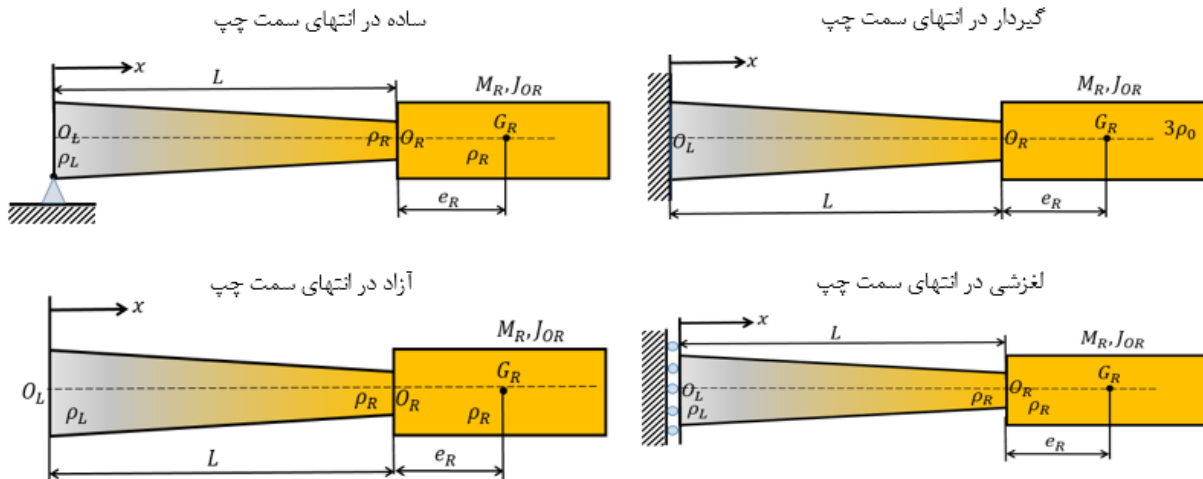
$$I(X) = \left(\frac{1}{12}\right) b(X)[h(X)]^3 = \left(\frac{1}{12}\right) b_0 h_0^3 (1 - c_b X)(1 - c_h X)^3 = I_0 (1 - c_b X)(1 - c_h X)^3$$



شکل ۴ نما از پهلو برای مدل تیر مدرج تابعی محوری در چهار حالت مختلف مقادیر c_b و c_h

به منظور استنتاج پارامترهای فرکانسی بی‌بعد برای این چهار حالت، تیرهای مدرج تابعی محوری با شرایط مرزی متفاوت انتهایی سمت چپ مطابق شکل ۵ را در نظر گرفته و توزیع مدول الاستیسیته و جرم مخصوص آن‌ها را در راستای محور تیر مطابق رابطه ۵۱ در نظر می‌گیریم. همچنین مشخصات جرم بی‌بعد انتهایی سمت راست تیر را به صورت $\bar{M}_R = 0.1$ و خروج از مرکز بی‌بعد آن را $\hat{e}_R = 0.0125$ اختیار می‌کنیم. جهت پرهیز از هرگونه ابهامی توجه داده می‌شود که $X = x/L$ می‌باشد.

$$E(X) = E_0(1 + X)\rho(X), \quad \rho(X) = \rho_0(1 + X + X^2) \quad (51)$$



شکل ۵ تیرهای مدرج تابعی محوری غیریکنواخت با شرایط مرزی گیردار، ساده، لغزشی و آزاد در انتهای سمت چپ و حامل جرم با خروج از مرکز و ممان اینرسی جرمی در انتهای سمت راست

در این صورت پنج فرکانس اول بی‌بعد تیرهای نشان داده شده در شکل ۵ مطابق جداول ۳ الی ۶ داده می‌شوند. بررسی جداول ۳ الی ۶ بیان‌کننده این مطلب است که برای هر چهار حالت مختلف c_b و c_h بیشترین مقادیر پارامترهای فرکانسی مربوط به جدول ۳ و کمترین مقادیر، مربوط به جدول ۶ می‌باشد. به عبارت دیگر با بیشتر مقید شدن تکیه‌گاه سمت چپ پارامترهای فرکانسی افزایش می‌یابند. از این رو تکیه‌گاه گیردار در درجه اول، ساده در درجه دوم، لغزشی در درجه سوم و آزاد در درجه چهارم به ترتیب بیشترین و کمترین مقادیر پارامترهای فرکانسی را به دست می‌دهند. در جداول ۴ و ۵ مقادیر درج شده در ستون اول حاکی از وجود مود صلب برای تیر مورد بررسی می‌باشد. همچنین در جدول ۶ نیز مقادیر درج شده در ستون‌های اول و دوم بر وجود دو مود صلب برای تیر با شرایط مرزی آزاد در انتهای سمت چپ دلالت دارند. با به کارگیری این مقادیر می‌توان علاوه بر نمایش شکل موده‌های الاستیک، شکل موده‌های صلب را نیز نمایش داد.

جدول ۳ پنج فرکانس اول بی بعد تیر غیریکنواخت و مدرج تابعی محوری با تکیه‌گاه گیردار در سمت چپ

c_h	c_b	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5
0	0	1.49962	4.16801	7.18768	10.1343	13.0683
0	0.2	1.54309	4.18548	7.16950	10.0997	13.0232
0.2	0	1.51188	3.99537	6.79256	9.55321	12.3109
0.2	0.8	1.75073	4.00653	6.62214	9.32166	12.0456

جدول ۴ پنج فرکانس اول بی بعد تیر غیریکنواخت و مدرج تابعی محوری با تکیه‌گاه ساده در سمت چپ

c_h	c_b	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5
0	0	0.000183298	3.53952	6.51616	9.44807	12.3729
0	0.2	0.000190298	3.54456	6.48971	9.40719	12.3228
0.2	0	0.000190298	3.37604	6.14144	8.89248	11.6441
0.2	0.8	0.000231078	3.33686	5.93454	8.62952	11.3545

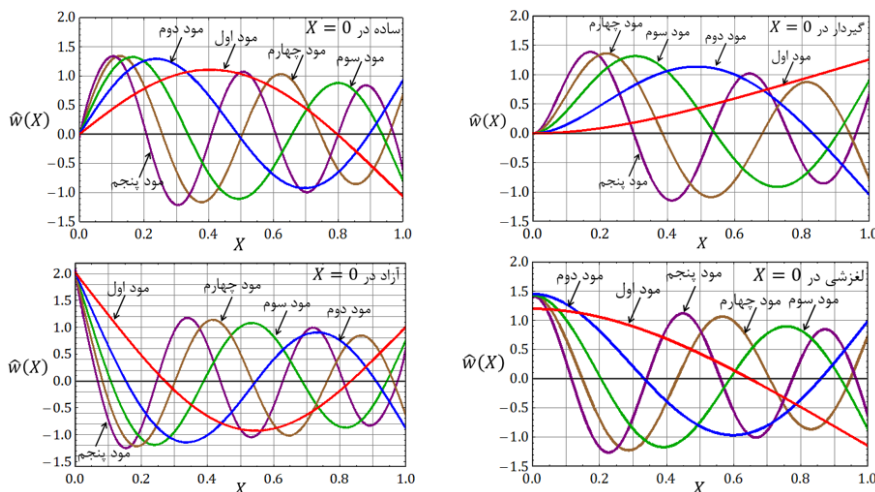
جدول ۵ پنج فرکانس اول بی بعد تیر غیریکنواخت و مدرج تابعی محوری با تکیه‌گاه لغزشی در سمت چپ

c_h	c_b	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5
0	0	0.000150808	2.05344	5.05240	7.98750	10.9131
0	0.2	0.000155356	2.07674	5.03377	7.95162	10.8664
0.2	0	0.000155356	2.02279	4.77835	7.52454	10.2733
0.2	0.8	0.000178942	2.13919	4.62815	7.28212	9.99516

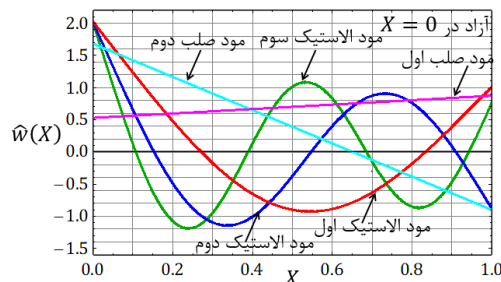
جدول ۶ پنج فرکانس اول بی بعد تیر غیریکنواخت و مدرج تابعی محوری با تکیه‌گاه آزاد در سمت چپ

c_h	c_b	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5
0	0	0.000138665	0.000305766	4.41968	7.31291	10.2251
0	0.2	0.000143279	0.000311381	4.38706	7.26831	10.1719
0.2	0	0.000143279	0.000311381	4.14245	6.86358	9.60607
0.2	0.8	0.000168096	0.000341437	3.92792	6.57991	9.29515

پنج مود الاستیک اول نرمالایز شده برای تیرهای مورد بررسی در حالت $c_b = c_h = 0$ در شکل ۶ به نمایش گذاشته شده‌اند. همچنین به‌عنوان نمونه برای تیر با شرایط تکیه‌گاهی آزاد در سمت چپ، شکل سه مود الاستیک اول همراه با دو مود صلب انتقالی و دورانی در شکل ۷ نشان داده شده است.



شکل ۶ نمایش پنج مود اول الاستیک نرمالایز شده برای تیرهای یکنواخت و مدرج تابعی محوری با شرایط مرزی کلاسیک



شکل ۷ نمایش سه مود الاستیک اول و دو مود صلب انتقالی و دورانی

۶-۲- بررسی اثر تغییرات نسبت منظری

تیر غیریکنواخت با مقطع مستطیلی مطابق شکل ۸ را در نظر گرفته و فرض می‌کنیم که این تیر با پیروی از قانون توانی مدرج تابعی محوری باشد. در این صورت مدول الاستیسیته و جرم مخصوص تیر به صورت:

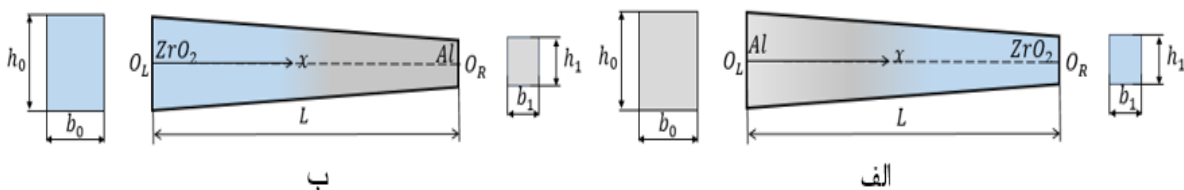
$$E(X) = E_L + (E_R - E_L)X^n, \quad \rho(X) = \rho_L + (\rho_R - \rho_L) X^n \quad (52)$$

نوشته می‌شود؛ که در آن E_L و ρ_L نمایشگر مدول الاستیسیته و جرم مخصوص در انتهای سمت چپ و E_R و ρ_R نمایشگر مدول الاستیسیته و جرم مخصوص در انتهای سمت راست می‌باشند. همچنین فرض می‌کنیم سطح مقطع و ممان اینرسی تیر به صورت رابطه ۵۰ داده شوند. چنانچه دو ماده تشکیل‌دهنده این تیر آلومینیم و زیرکنیم فرض شوند خواص این دو ماده که توسط مرجع [۸] ارائه شده است مطابق جدول ۷ داده می‌شود.

جدول ۷ خواص دو ماده تشکیل‌دهنده تیر مدرج تابعی محوری

ماده	جرم مخصوص	مدول الاستیسیته
آلومینیم	$\rho_{Al} = 2702 \text{ kg/m}^3$	$E_{Al} = 70 \text{ GPa}$
زیرکنیم	$\rho_{Zr} = 5700 \text{ kg/m}^3$	$E_{Zr} = 200 \text{ GPa}$

برای این تیر دو حالت الف و ب مطابق شکل ۸ موجود است. آلومینیم غنی در سمت چپ و زیرکنیم غنی در سمت راست و بالعکس زیرکنیم غنی در سمت چپ و آلومینیم غنی در سمت راست.



شکل ۸ مدل تیر مدرج تابعی محوری الف: آلومینیم غنی در سمت چپ و زیرکنیم غنی در سمت راست ب: زیرکنیم غنی در سمت چپ و آلومینیم غنی در سمت راست

با معرفی پارامترهای بی‌بعد δ_h و δ_b به صورت $\delta_h = h_1/h_0 = 1 - c_h$ و $\delta_b = b_1/b_0 = 1 - c_b$ با اشاره به شکل ۴ چنانچه $c_h \neq 0$ و $c_b = 0$ باشد تیر مورد بررسی به تیر مخروطی با مقطع چهارگوش در صورتی که $c_h \neq 0$ و $c_b = 0$ باشد تیر مورد نظر به تیر گوه‌ای شکل تبدیل می‌گردد. در این صورت می‌توان پارامترهای فرکانسی برای تیر گوه‌ای و مخروطی را در حالت الف و ب طبق جداول ۸ الی ۱۱ ارائه کرد. همچنین نمودار تغییرات پارامترهای فرکانسی برحسب نسبت منظری برای هر دو حالت الف و ب نیز در شکل‌های ۹ و ۱۰ داده شده‌اند.

جدول ۸ پنج پارامتر فرکانسی اول برحسب نسبت منظری δ_h برای تیر گوه‌ای $\delta_b = 1$ حالت الف

δ_h	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5
0.2	1.94224	4.01866	6.28446	8.60935	10.9624
0.4	1.84142	4.22602	6.86513	9.53136	12.2121
0.6	1.78170	4.41216	7.34387	10.2683	13.1966
0.8	1.74079	4.57799	7.76048	10.9009	14.0360
1	1.71044	4.72798	8.13445	11.4641	14.7805

جدول ۹ پنج پارامتر فرکانسی اول برحسب نسبت منظری $\delta_h = \delta_b$ برای تیر مخروطی حالت الف

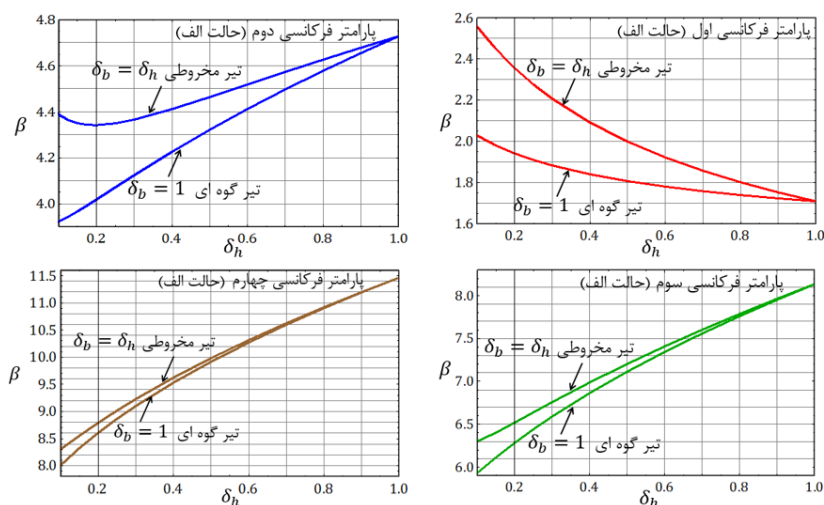
δ_h	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5
0.2	2.35598	4.34200	6.52030	8.79293	11.1119
0.4	2.09207	4.41119	6.98797	9.62336	12.2854
0.6	1.92322	4.51861	7.40840	10.3152	13.2333
0.8	1.80264	4.62630	7.78727	10.9199	14.0507
1	1.71044	4.72798	8.13445	11.4641	14.7805

جدول ۱۰ پنج پارامتر فرکانسی اول برحسب نسبت منظری δ_h برای تیر گوه ای $\delta_b = 1$ حالت ب

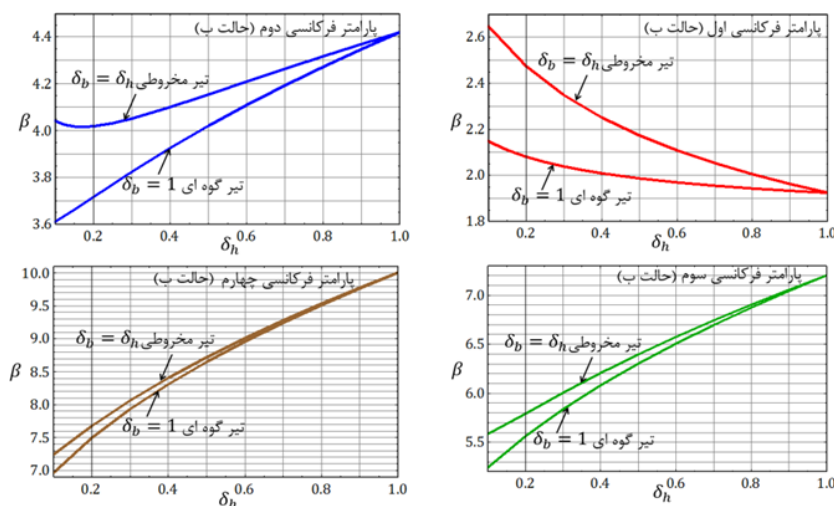
δ_h	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5
0.2	2.08074	3.71666	5.56337	7.49523	9.46803
0.4	2.00908	3.92582	6.08264	8.30987	10.5690
0.6	1.96927	4.10964	6.50666	8.95790	11.4338
0.8	1.94315	4.27280	6.87401	9.51290	12.1703
1	1.92439	4.42042	7.20285	10.0064	12.8229

جدول ۱۱ پنج پارامتر فرکانسی اول برحسب نسبت منظری $\delta_b = \delta_h$ برای تیر مخروطی حالت ب

δ_h	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5
0.2	2.47429	4.01853	5.79160	7.67613	9.61695
0.4	2.25170	4.10042	6.20786	8.40650	10.6472
0.6	2.10881	4.20950	6.57503	9.00962	11.4752
0.8	2.00513	4.31765	6.90336	9.53474	12.1876
1	1.92439	4.42042	7.20285	10.0064	12.8229



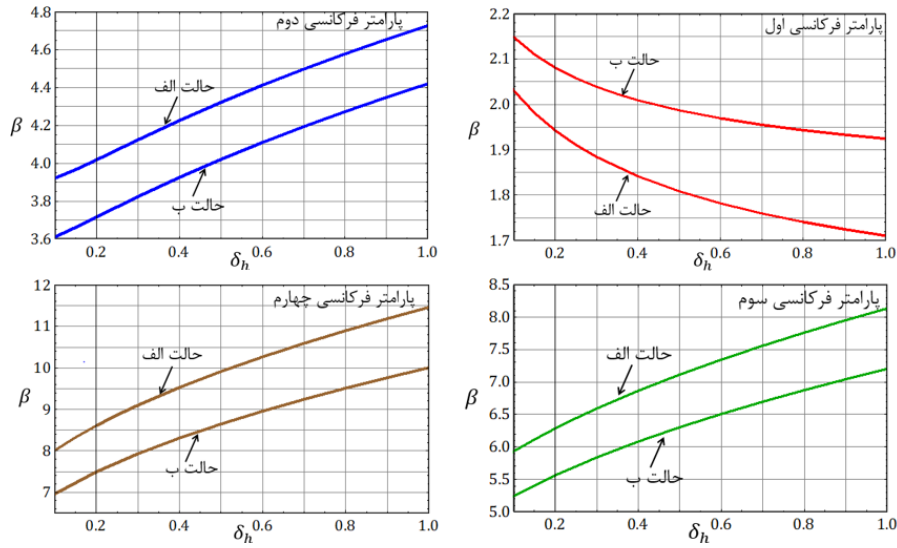
شکل ۹ مقایسه تغییرات چهار پارامتر فرکانسی اول برای تیر گوه ای و مخروطی بر حسب نسبت منظری δ_h حالت الف



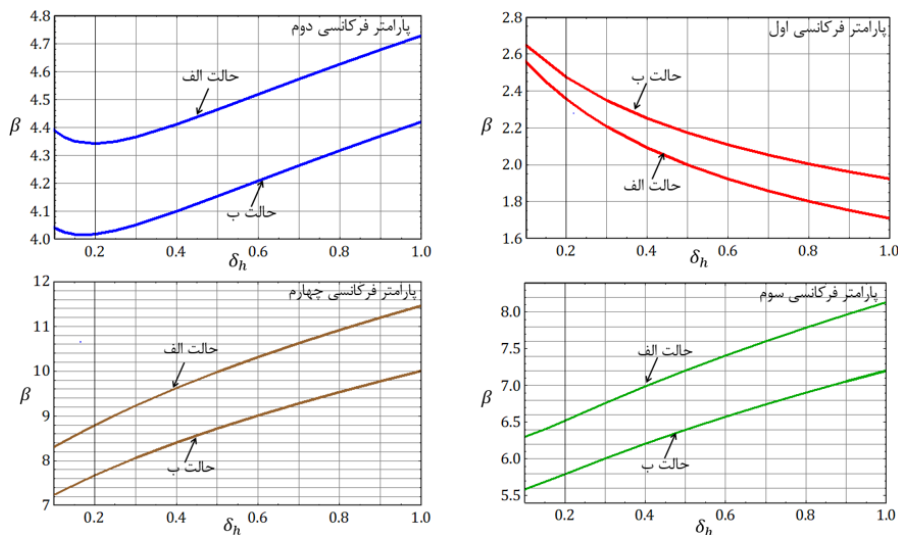
شکل ۱۰ مقایسه تغییرات چهار پارامتر فرکانسی اول برای تیر گوه ای و مخروطی بر حسب نسبت منظری δ_h حالت ب

همانطور که در شکل های ۹ و ۱۰ مشاهده می شود برای یک مقدار معین δ_h پارامترهای فرکانسی تیر مخروطی بزرگ تر از پارامترهای فرکانسی تیر گوه ای هستند به عبارت دیگر با افزایش نسبت منظری تیر سفت تر شده و پارامترهای فرکانسی افزایش می یابند. این روند تغییرات برای هر دو حالت الف و ب صادق است. وند تغییرات پارامترهای فرکانسی در دو حالت ل و ب برای تیر گوه ای و مخروطی برحسب نسبت منظری به ترتیب در شکل های ۱۱ و ۱۲ با یکدیگر مقایسه شده اند. ملاحظه می شود

به‌استثنای مود اول برای یک مقدار معین δ_h پارامترهای فرکانسی مربوط به حالت الف بزرگ‌تر از پارامترهای فرکانسی مربوط به حالت ب هستند. به عبارت دیگر برای مودهای دوم و بالاتر سفتی تیر افزایش می‌یابد.



شکل ۱۱ مقایسه تغییرات چهار پارامتر فرکانسی اول در دو حالت الف و ب برای تیر گوه‌ای برحسب نسبت منظری δ_h



شکل ۱۲ مقایسه تغییرات چهار پارامتر فرکانسی اول در دو حالت الف و ب برای تیر مخروطی برحسب نسبت منظری δ_h

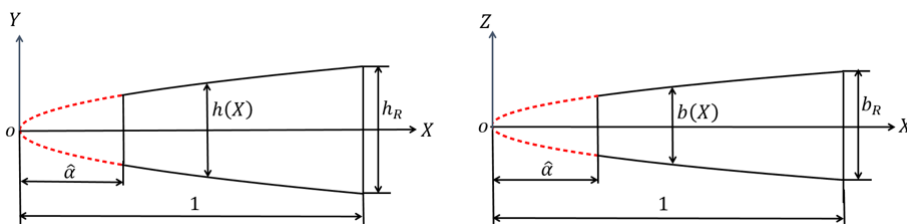
۷- اعتبارسنجی

۷-۱- تیر سهمی‌وار هموزن ناقص

تیر سهمی‌وار همگن ناقص که مقاطع $X - Y$ و $X - Z$ آن در شکل ۱۳ داده شده‌اند را در نظر گرفته و فرض می‌کنیم که ارتفاع و پهنای تیر به‌صورت:

$$h(X) = h_R \sqrt{(1 - \hat{\alpha})X + \hat{\alpha}}, \quad b(X) = b_R \sqrt{(1 - \hat{\alpha})X + \hat{\alpha}} \quad (53)$$

داده شوند. که در آن‌ها $\hat{\alpha}$ فاکتور کوتاه‌شوندگی تیر است. به‌عبارت‌دیگر در صورتی که $\hat{\alpha} = 0$ باشد تیر سهمی‌وار کامل بوده و رأس آن در موقعیت $X = 0$ قرار می‌گیرد. در این حالت $h(X) = b(X) = 0$ بوده و تیر دارای نوک تیز می‌باشد.



شکل ۱۳ مقاطع X - Y و X - Z تیر سهمی وار همگن ناقص

با به کارگیری رابطه ۵۳ سطح مقطع و ممان اینرسی تیر در هر فاصله X از انتهای سمت چپ تیر برحسب فاکتور کوتاه شوندگی $\hat{\alpha}$ به صورت:

$$A(X) = A_R[(1 - \hat{\alpha})X + \hat{\alpha}], \quad I(X) = I_R[(1 - \hat{\alpha})X + \hat{\alpha}]^2 \quad (54)$$

نوشته می شوند. که در آن $A_R = b_R h_R$ و $I_R = b_R h_R^3 / 12$ است. در جدول ۱۲ مجذور سه پارامتر فرکانسی اول بر اساس روش مطالعه حاضر برای تیر سهمی وار هموزن ناقص با شرایط مرزی مختلف محاسبه و با نتایج مرجع [۱] مورد مقایسه قرار گرفته اند. همان طور که مشاهده می شود نتایج از توافق بسیار خوبی بهره مند می باشند.

جدول ۱۲ مقایسه مجذور سه پارامتر فرکانسی اول، برای تیر سهمی وار هموزن ناقص با شرایط مرزی مختلف

شرایط مرزی	مطالعه	$\hat{\alpha} = 0.4$			$\hat{\alpha} = 0.8$		
		β_1^2	β_2^2	β_3^2	β_1^2	β_2^2	β_3^2
C-C	حاضر	18.1748	50.3249	98.8521	21.1860	58.4165	114.533
	[۱]	18.1750	50.3250	98.8550	21.1860	58.4170	114.540
C-S	حاضر	11.4137	39.8314	84.3271	14.2685	47.0234	98.4547
	[۱]	11.4140	39.8310	84.3280	14.2690	47.0230	98.4560
C-F	حاضر	1.8578	15.8985	48.5889	3.00257	20.2309	57.8433
	[۱]	1.8578	15.8990	48.5890	3.00260	20.2310	57.8430
S-C	حاضر	13.7230	42.0757	86.6229	14.9379	47.6560	99.0897
	[۱]	13.7230	42.0760	86.6250	14.9380	47.6560	99.0910
S-S	حاضر	8.01977	32.5610	73.0977	9.34592	37.4190	84.1798
	[۱]	8.01980	32.5610	73.0980	9.34590	37.4190	84.1800
S-F	حاضر	11.6656	40.3318	84.9113	14.2902	47.0608	98.4967
	[۱]	11.6660	40.3320	84.9170	14.2900	47.0610	98.5020
F-C	حاضر	4.2660	20.5917	53.1983	3.68588	21.5471	59.1093
	[۱]	4.2660	20.5920	53.1990	3.68590	21.5470	59.1120
F-S	حاضر	14.1398	42.6747	87.2816	14.9625	47.6946	99.0738
	[۱]	14.1400	42.6750	87.2860	14.9630	47.6950	99.1380
F-F	حاضر	19.0176	51.4703	100.120	21.2444	58.4957	114.620
	[۱]	19.0180	51.4710	100.120	21.2440	58.4960	114.630

۲-۷- تیر با ماده مدرج تابع نمایی محوری

به منظور نمایش قابلیت روش مطالعه حاضر، جهت تعیین پارامترهای فرکانسی تیرهای یکنواخت و غیریکنواخت که به طور محوری بر طبق قانون تابع نمایی مدرج شده اند. مدول الاستیسیته و جرم مخصوص تیر را به صورت:

$$E(X) = E_L + (E_R - E_L) \left(\frac{e^{\hat{\alpha}X} - 1}{e^{\hat{\alpha}} - 1} \right), \quad \rho(X) = \rho_L + (\rho_R - \rho_L) \left(\frac{e^{\hat{\alpha}X} - 1}{e^{\hat{\alpha}} - 1} \right) \quad (54)$$

تعریف می کنیم. که در آن E_L و ρ_L نمایشگر مدول الاستیسیته و جرم مخصوص در انتهای سمت چپ و E_R و ρ_R نمایشگر مدول الاستیسیته و جرم مخصوص در انتهای سمت راست می باشند. همچنین $\hat{\alpha}$ عبارت است از پارامتر توصیف کننده تغییر

کسر حجمی دو ماده تشکیل‌دهنده تیر مدرج تابعی محوری. چنانچه دو ماده تشکیل‌دهنده تیر مدرج تابعی محوری آلومینیم و زیرکنیم فرض شوند خواص این دو ماده مطابق جدول ۷ داده می‌شود. برای این تیر دو حالت الف و ب مطابق شکل ۸ موجود است. برای یک تیر یکنواخت ($c_b = c_h = 0$) و دوسرگیردار مدرج تابعی محوری مجذور سه پارامتر فرکانسی اول برای حالات الف و ب و مقادیر مختلف پارامتر $\bar{\alpha}$ در جداول ۱۳ و ۱۴ ارائه شده‌اند. به طریق مشابه مجذور سه پارامتر فرکانسی اول تیر غیریکنواخت ($c_b = c_h = 0.2$) و مدرج تابعی محوری در جداول ۱۵ و ۱۶ برای تیرهای گیردار-گیردار، ساده-ساده و مقدار $\bar{\alpha} = -10$ آورده شده است.

جدول ۱۳ مقایسه مجذور سه پارامتر فرکانسی اول برحسب پارامتر $\bar{\alpha}$ ، برای تیر دوسرگیردار مدرج تابعی محوری حالت الف *مطالعه

حاضر، مرجع [۹]

$\bar{\alpha}$	β_1^2	%خطا	β_2^2	%خطا	β_3^2	%خطا
-10	24.0662*	0.0008	68.1687*	0.0527	135.4560*	0.0255
	24.0660 ^c		68.1328 ^c		135.4215 ^c	
-3	23.9433*	0.0054	67.7552*	0.0127	134.4390*	0.0316
	23.9446 ^c		67.7638 ^c		134.4815 ^c	
0	24.3754*	0.0008	67.5875*	0.0064	132.8390*	0.0238
	24.3756 ^c		67.5918 ^c		132.8706 ^c	
3	24.9364*	0.0008	67.1041*	0.0060	130.2280*	0.0236
	24.9366 ^c		67.1081 ^c		130.2588 ^c	
10	24.8062*	0.0024	66.2306*	0.0143	127.6640*	0.0181
	24.8068 ^c		66.2401 ^c		127.6871 ^c	

جدول ۱۴ مقایسه مجذور سه پارامتر فرکانسی اول برحسب پارامتر $\bar{\alpha}$ ، برای تیر دوسرگیردار مدرج تابعی محوری حالت ب *مطالعه

حاضر، مرجع [۹]

$\bar{\alpha}$	β_1^2	%خطا	β_2^2	%خطا	β_3^2	%خطا
-10	24.8064*	0.0016	66.2351*	0.0075	127.7420*	0.0430
	24.8068 ^c		66.2401 ^c		127.6871 ^c	
-3	24.9364*	0.0008	67.1041*	0.0060	130.2300*	0.0221
	24.9366 ^c		67.1081 ^c		130.2588 ^c	
0	24.3754*	0.0008	67.5875*	0.0064	132.8390*	0.0238
	24.3756 ^c		67.5918 ^c		132.8706 ^c	
3	23.9433*	0.0054	67.7553*	0.0125	134.4400*	0.0308
	23.9446 ^c		67.7638 ^c		134.4815 ^c	
10	24.0662*	0.0008	68.1686*	0.0525	135.4560*	0.0255
	24.0660 ^c		68.1328 ^c		135.4215 ^c	

جدول ۱۵ مقایسه مجذور سه پارامتر فرکانسی اول، برای تیر مدرج تابعی محوری با شرایط مرزی مندرج در جدول حالت الف *مطالعه

حاضر، مرجع [۹]

شرایط مرزی	β_1^2	%خطا	β_2^2	%خطا	β_3^2	%خطا
C-C	21.5185*	0.0102	61.0548*	0.0159	121.6450*	0.1785
	21.5207 ^c		61.0451 ^c		121.4017 ^c	
S-S	10.2634*	0.0010	41.0828*	0.0051	92.2188*	0.0222
	10.2635 ^c		41.0849 ^c		92.2393 ^c	

جدول ۱۶ مقایسه مجذور سه پارامتر فرکانسی اول، برای تیر مدرج تابعی محوری با شرایط مرزی مندرج در جدول حالت ب *مطالعه

حاضر، مرجع [۹]

شرایط مرزی	β_1^2	%خطا	β_2^2	%خطا	β_3^2	%خطا
C-C	22.3798*	0.0018	59.5959*	0.0906	114.8120*	0.0514
	22.3802 ^c		59.6013 ^c		114.7530 ^c	
S-S	8.84935*	0.0006	35.9355*	0.0028	81.2029*	0.0119
	8.84940 ^c		35.9365 ^c		81.2126 ^c	

۸- جمع بندی

در این پژوهش، رابطه‌ای یکتا جهت بررسی ارتعاشات عرضی تیرهای غیریکنواخت و غیر همگن ارائه شده است. رابطه دیفرانسیلی حاکم بر حرکت با استفاده از فرمول کوشی برای انتگرال گیری‌های مکرر تبدیل به یک معادله انتگرالی می‌شود. جهت حل این معادله انتگرالی از سری توانی استفاده شده است. همگرایی روش و کار آبی آن از طریق تحلیل المان محدود با استفاده از نرم‌افزار آباکوس مورد بررسی قرار گرفته است. مقایسه نتایج نشانگر این مطلب است که روش ارائه‌شده، از دقت بسیار خوبی در مقایسه با سایر روش‌های مورد استفاده توسط پژوهشگران برخوردار است. رابطه یکتای دست آورد این پژوهش قادر به تحلیل ارتعاشات تیرها با طیف وسیعی از شرایط مرزی کلاسیک، غیر کلاسیک، سطح مقطع یکنواخت، غیریکنواخت، همگن و یا مدرج تابعی محوری را داراست. روش ارائه‌شده در این پژوهش می‌تواند به‌عنوان یک مرجع مناسب برای بررسی رفتار ارتعاشات آزاد تیرهای اویلر-برنولی با جنس، سطح مقطع متغیر و شرایط مرزی متفاوت باشد.

۹- مراجع

- [1] Zhou D, Cheung Y K. The free vibration of a type of tapered beams. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2000;188:203-16.
- [2] Lee J W, Lee J Y. Free vibration analysis using the transfer matrix method on a tapered beam, *Computer and Structures*. 2016; 164: 75-82.
- [3] Kim T, Lee B, Lee U, State vector equation method for the frequency domain spectral element modelling of non-uniform one-dimensional structures. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2019; 157: 75-86.
- [4] Lai H Y, Hsu J C, Chen C K. Free Vibration of Non-Uniform Euler-Bernoulli Beams by the Adomian modified decomposition method. *Computers Modeling in Engineering and Sciences*. 2008; 34(1): 87-113.
- [5] Malaek H, Moeenfar H. Analytical modeling of large amplitude free vibration of non-uniform beams carrying a both transversely and axially eccentric tip mass. *Journal of Sound and Vibration*. 2016; 366: 211-29.
- [6] Celik I. Free vibration of non-uniform Euler-Bernoulli beam under various supporting conditions using Chebyshev wavelet collocation method. *Applied Mathematical Modelling*. 2018; 54: 268-80.
- [7] Ghannadiasl A, Zamiri A, Borhanifar A. Free vibrations of non-uniform beams on a non-uniform Winkler foundation using the Laguerre collocation method, *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*. 2020; 42(5) 242: 1-12.
- [8] Huang Y, Li X F. A new approach for free vibration of axially functionally graded beams with non-uniform cross-section. *Journal of Sound and Vibration*. 2010; 329: 2291-303.
- [9] Liu P, Lin K, Liu H, Qin R., Free transverse vibration analysis of axially functionally graded tapered Euler-Bernoulli beams through spline finite point method. *Shock and Vibration*. 2016; 1-23.
- [10] Zhao Y, Huang Y, Guo M. A novel approach for free vibration of axially functionally graded beams with non-uniform cross-section based on Chebyshev polynomials theory. *Composite Structures* 2017; 277-84.
- [11] Cao D, Cao Y, Wang J, Yao M, Zhang W. Analytical analysis of free vibration of non-uniform and homogenous beams: asymptotic perturbation approach. *Applied Mathematical Modelling*. 2019; 65: 526-34.
- [12] Shabani S, Cunedioğlu Y. Free vibration analysis of cracked functionally graded non-uniform beams. *Materials Research Express*. 2020; 7 015707: 1-15.
- [13] Sahu R P, Sutar M K, Pattnaik S. A generalized finite element approach towards the free vibration analysis of non-uniform axially functionally graded beam, *Scientia Iranica*, 2022; 29 (2): 556-71.
- [14] Hein H, Feklistova L. Free vibrations of non-uniform and axially functionally graded beams using Haar wavelets. *Engineering Structures*. 2011; 33: 3696-701.

[15] Sari M S, Al-Dahidi S. Vibration characteristic of multiple functionally graded non uniform beams. Journal of vibration control. 2020; 10: 2205-218.

[16] Li G, Wang G, Ni J, Li L. The vibration analysis of the elastically restrained functionally graded Timoshenko beam with arbitrary cross sections, Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control, 2021; 40,4: 1853-875.