

Dynamic Instability Analysis of Rectangular Plates under Periodic Passage of Oscillating Rigid Bodies

Mehran Ghomeshi Bozorg^{a*}

^a Department of Mechanical Engineering, Jundi shapur University of Technology, Dezful, Postcode 64615-334, Iran

Original Article

Use your device to scan
and read the article online



Citation: Ghomeshi Bozorg M. Dynamic Instability Analysis of Rectangular Plates under Periodic Passage of Oscillating Rigid Bodies. *Mechanics of Advanced and Smart Materials*. 2022; 2(3)235-256.

 <https://10.52547/masm.2.3.235>.

KEYWORDS

Plate,
Oscillating Rigid Body,
Stability Analysis,
Floquet Theory.

ABSTRACT

In this paper, the dynamic stability of a thin rectangular plate under the periodic passage of oscillating rigid bodies is studied. Each of the two ends of a rigid body is connected to a wheel through a suspension system. Using the assumed-mode method, the governing equations are derived. The periodic passing of moving objects along a straight path on the surface of the plate results in a dynamic system with periodic coefficients. The Floquet theory is employed as a numerical method to obtain stable and unstable zones of parameters plane. Considering the point moving object model, the effect of moving object modeling on the stability analysis results is also investigated. The results indicate that the stiffness and damping of the suspension system, the mass ratio of the wheels to the whole rigid body, the rigid body's length and the moving object modeling method are very effective on domains stability and instability of the system. Numerical simulations of the plate middle point verify the accuracy of the obtained results.

Extended Abstract

1. Introduction

Investigating the dynamic stability of a flexible structure carrying a moving mass is an extensive problem embracing a wide variety of engineering applications, e.g., railway tracks and highway bridges under the action of traversing trains or vehicles [1], loads transported along cranes span [2], high-speed machining processes [3]. Time-varying position of moving masses and considering all interval components of the moving masses in the analysis leads to the appearance of time-varying matrices in the coefficients of the governing equation. The passage of continuous series of moving masses along the rectilinear path results in a parametrically excited system with periodic coefficients. In certain conditions, parametric excitations generate instability in the elastic structures under the moving masses. Therefore, the stability analysis of these systems is very important. There are various studies for dynamic instability elastic structures under moving masses that have been considered by many researchers [15-20].

In the present research, an approach based on Floquet theory is followed, contributing to a comprehensive evaluation of the influence of modeling methods on the dynamic stability of the plate vibrations. To the best of the author's knowledge, stability analysis concerning the aforementioned aspects has been done yet. The results are presented as stability maps in mass-velocity diagrams which show that the modeling method and value of the model parameters have a significant effect on the system stability.

2. Mathematical Formulation

Throughout this study the plate is considered to be a simply supported uniform thin rectangular plate with a length of a , width of b , the thickness of h , traversed by moving objects along a rectilinear trajectory parallel to the longitudinal edges of the plate with a constant velocity of v . The material of the plate is set to be undamped, linear isotropic homogeneous.

For the moving object, a moving oscillating rigid body with a two wheels suspension system is considered (Fig. 1).

* Corresponding author. Tel.: 061-42536560

E-mail address: m.ghomeshiboazorg@jsu.ac.ir

DOI: <https://10.52547/masm.2.3.235>.

Received: February 23; Received in revised form: March 12, 2022; Accepted: December 12, 2022.

2022 Published by Arak University Press. All rights reserved.



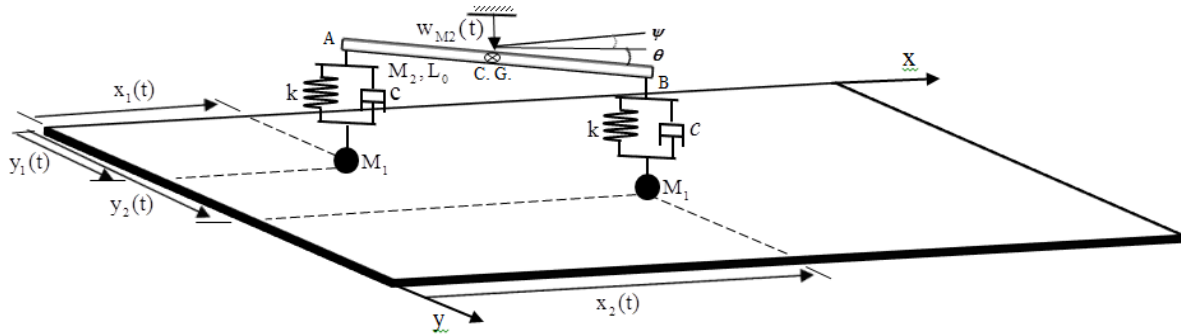


Figure 1. Plate under the effect of a moving oscillating rigid body.

In this model, the moving object chassis is considered as a rigid body with length L_0 , mass M_2 and moment of inertia about the center of mass \bar{I} . w_{M_2} is the transverse displacement of the center of mass, and ψ and φ denote the rotations about parallel and vertical axes to the plate, respectively. M_1 is the mass of each wheel, and k and c denote stiffness and damping of each suspension system, respectively. Through the use of the assumed-mode method and Lagrange's equations, the governing equations can be expressed as a set of ordinary differential equations,

$$\begin{bmatrix} \bar{T}(t) & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{A} \\ \ddot{w}_{M_2} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_1(t) & Y_2(t) & Y_3(t) \\ Y_2^T(t) & 2c & 0 \\ Y_3^T(t) & 0 & cL_0^2/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{A} \\ \dot{w}_{M_2} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Lambda_1(t) & \Lambda_2(t) & \Lambda_3(t) \\ K_{21} & 2k & 0 \\ K_{31} & 0 & kL_0/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ w_{M_2} \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{f}(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Where A is the modal coordinates vector and the coefficient matrices $\bar{T}(t)$, $\bar{Y}(t)$, $\bar{\Lambda}(t)$ and vector $f(t)$ are all time-varying. Considering the entrance of a similar object on the plate following the exiting of the precedent mass, the coefficients of Eq. (1) become periodical with the period $T_p = a/v$. By selecting only one shape mode $\varphi(x, y) = \sqrt{2/ab} \sin(\pi x/a) \sin(\pi y/b)$ in assumed-mode method, the governing equations become,

$$m(t)\ddot{\eta} + c(t)\dot{\eta} + k(t)\eta = f(t) \tag{2}$$

Where $\eta = [A, w_{M_2}, \theta]^T$ and for $0 \leq t \leq T_p$:

$$\begin{aligned} m(t) &= \begin{bmatrix} 1 + 2r\alpha Q_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ c(t) &= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & 2\xi\Omega & 0 \\ c_{31} & 0 & 6\xi\Omega \end{bmatrix}, \\ k(t) &= \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & \Omega^2 & 0 \\ k_{31} & 0 & 3\Omega^2 \end{bmatrix}, \\ f(t) &= \begin{bmatrix} \alpha g \sqrt{ab} Q_3(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3}$$

and for $t > T_p$:

$$\begin{aligned} m(t) &= m(t - T_p), c(t) = c(t - T_p), \\ k(t) &= k(t - T_p), f(t) = f(t - T_p) \end{aligned} \tag{4}$$

Where

$$\begin{aligned} c_{11} &= 2r\alpha\bar{\omega}_1 Q_2(t) + 4(1-r)\alpha\xi\Omega Q_1(t), \\ c_{12} &= -2\sqrt{ab}(1-r)\alpha\xi\Omega Q_3(t), \\ c_{13} &= \sqrt{ab}(1-r)\alpha\xi\Omega L_0 Q_4(t), \\ c_{21} &= -\frac{2}{\sqrt{ab}} \xi\Omega Q_3(t), \\ c_{31} &= -\frac{2}{\sqrt{ab}} \xi\Omega Q_4(t) \\ k_{11} &= \omega_1^2 + 2\alpha((1-r)\Omega^2 - r\bar{\omega}_1^2)Q_1(t) \\ &\quad + 2\alpha(1-r)\xi\Omega\bar{\omega}_1 Q_2(t) \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
 k_{12} &= -\alpha(1-r)\Omega^2\sqrt{ab}Q_3(t), \\
 k_{13} &= \frac{L_0\sqrt{ab}}{2}\alpha(1-r)\Omega^2Q_4(t), \\
 k_{21} &= -\frac{1}{\sqrt{ab}}(\Omega^2Q_3(t) + 2\xi\Omega\bar{\omega}_1Q_5(t)), \\
 k_{31} &= \frac{6\Omega}{L_0\sqrt{ab}}(\Omega Q_4(t) + 2\xi\bar{\omega}_1Q_6(t)), \\
 Q_1(t) &= \chi_1 \sin^2(\bar{\omega}_1 t) + \chi_2 \sin^2(\bar{\omega}_1 t - \bar{L}), \\
 Q_2(t) &= \chi_1 \sin(2\bar{\omega}_1 t) + \chi_2 \sin(2(\bar{\omega}_1 t - \bar{L})), \\
 Q_3(t) &= \chi_1 \sin(\bar{\omega}_1 t) + \chi_2 \sin(\bar{\omega}_1 t - \bar{L}), \\
 Q_4(t) &= \chi_2 \sin(\bar{\omega}_1 t - \bar{L}) - \chi_1 \sin^2(\bar{\omega}_1 t), \\
 Q_5(t) &= \chi_1 \cos(\bar{\omega}_1 t) + \chi_2 \cos(\bar{\omega}_1 t - \bar{L}), \\
 Q_6(t) &= \chi_2 \cos(\bar{\omega}_1 t - \bar{L}) - \chi_1 \cos(\bar{\omega}_1 t)
 \end{aligned}$$

The other parameters defined as follows

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \frac{2M_1 + M_2}{\rho h a b}, \quad \gamma = \frac{\pi V}{a \omega_1}, \quad \bar{\omega}_1 = \gamma \omega_1, \\
 r &= \frac{2M_1}{2M_1 + M_2}, \quad \Omega = \sqrt{\frac{2k}{M_2}}, \quad \xi = \frac{2c}{2\Omega M_2}, \quad \bar{L} = \frac{\pi L_0}{a}
 \end{aligned} \tag{6}$$

Where ω_1 is the first natural frequency of the plate.

3. Floquet Theory

Floquet theory is a general theory for linear differential equations with periodic coefficients. This theory can be performed on any equation in form

$$\dot{q} = R(t)q, \quad R(t + T_p) = R(t) \tag{7}$$

According to the periodicity of $R(t)$, it can be deduced that $R(t + T_p)$ also forms a fundamental set of solutions and the following relation can be established

$$q(t + T_p) = Cq(t) \tag{8}$$

Where C is a fundamental matrix solution of the periodic system (7). According to Floquet theory, computing the eigenvalues of the fundamental matrix determines the stability conditions as $\|\lambda_C\| \leq 1$.

4. Results and Discussion

Throughout this study, the mechanical and geometrical properties of plate are Young's modulus $E=200\text{Gpa}$, density $\rho = 7800 \text{ kg / m}^3$, Poisson's ratio $\nu=0.3$, $a=5\text{m}$, $b=1\text{m}$, and thickness $h=0.01\text{m}$.

The effects of varying ξ , Ω , r and L_0 on the stability map are evaluated. The results are presented in Figs. 2, 3, 4 and 5.

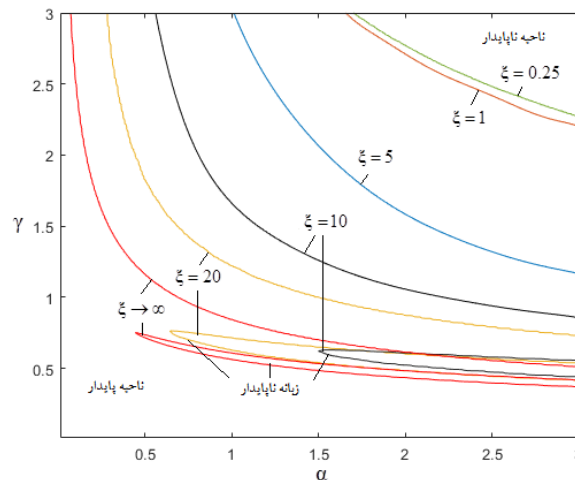


Figure 2. The effect of varying the damping ratio ξ for $r = 0.04, \Omega = 10, L_0 = 1\text{m}$ on stability map.

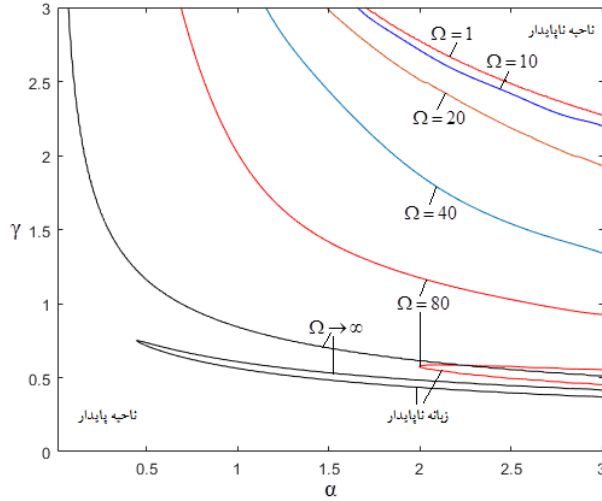


Figure 3. The effect of varying the frequency Ω for $r = 0.04, \xi = 1, L_0 = 1m$ on stability map.

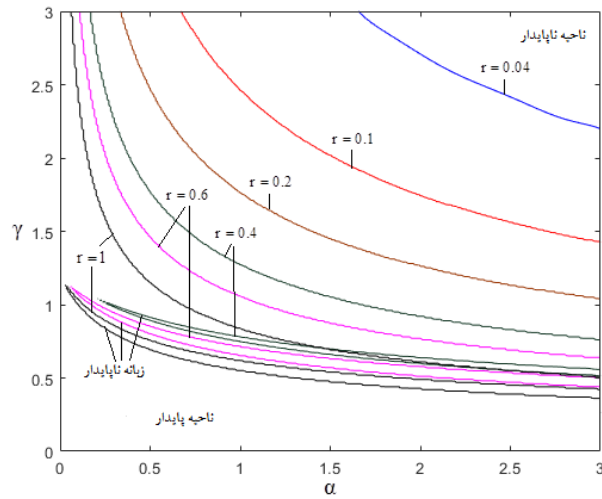


Figure 4. The effect of varying the damping ratio r for $\xi=1, \Omega=10, L_0=1m$ on stability map.

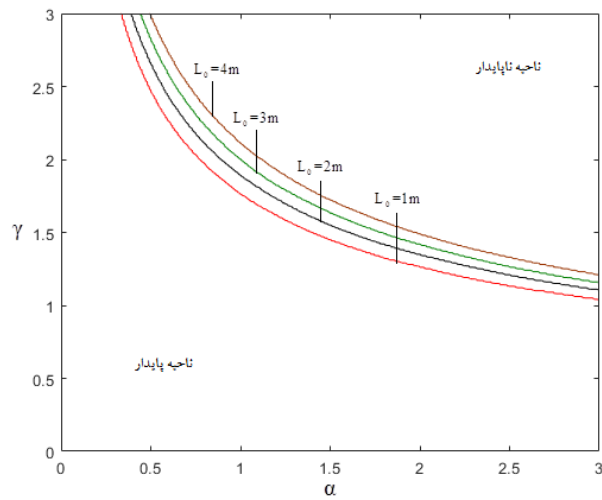


Figure 5. The effect of varying the length L_0 for $r=0.2, \xi=1, \Omega=10$ on stability map.

It is concluded that increasing each of the parameters ξ, Ω, r causes the unstable zone to increase span and the unstable tongue to appear. The trend is revised for the rigid body length L_0 as its increasing enhances stability. The effect of the modelling approach for moving objects on the stable/unstable border line is investigated. The results of the Floquet theory for moving point mass and moving oscillating rigid body are plotted in Fig. 6.

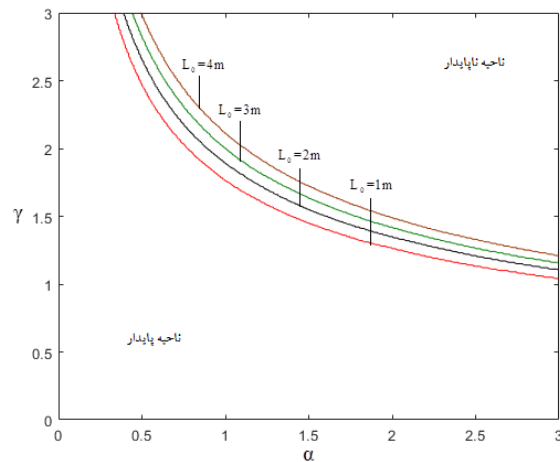


Figure 6. The effect of modeling approach on stability map: moving point mass (solid line), moving oscillating rigid body ($r = 0.04, \Omega = 20, \xi = 1, L_0 = 1m$) (dashed line).

As shown, modeling approach has a significant influence on the results. The results are confirmed through numerical simulations.

5. Conclusion

In this paper, time-domain analysis of a thin rectangular plate subjected to the periodic passage of vehicles has been investigated by Floquet theory. For the moving object, instead of moving point mass, a moving oscillating rigid body with a two wheels suspension system is considered. The results permitted splitting the speed-mass parameter plane into two distinct regions of stability and instability. The results have indicated that the modeling method has a significant influence on the dynamic stability analysis of this system and inappropriate modeling leads to inaccurate results. For the oscillating rigid body, the effects of various parameters on the stability conditions have been discussed in detail.



آنالیز ناپایداری دینامیکی ورق‌های مستطیلی تحت عبور متناوب جسم‌های صلب نوسان کننده

مهران قمشی بزرگ الف*

الف استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی جندی شاپور، دزفول، ایران، m.ghomeshibozorg@jnu.ac.ir

واژگان کلیدی	چکیده
ورق، جسم صلب نوسان کننده، پایداری دینامیکی، تئوری فلاکه.	در این مقاله، پایداری دینامیکی یک ورق نازک مستطیلی تحت عبور متناوب جسم‌های صلب نوسان کننده بررسی شده است. هر دو انتهای جسم صلب از طریق سیستم تعلیق به یک چرخ متصل می‌شوند. با استفاده از روش مودهای فرضی، معادلات حاکم استخراج می‌شوند. عبور متناوب جسم‌های متحرک در امتداد یک مسیر مستقیم بر روی سطح ورق، منجر به یک سیستم دینامیکی با ضرایب متناوب می‌شود. تئوری فلاکه به‌عنوان یک روش عددی برای به دست آوردن نواحی پایدار و ناپایدار در صفحه‌ی پارامترها به کار گرفته می‌شود. با در نظر گرفتن مدل جسم متحرک نقطه‌ای، اثر مدل‌سازی جسم متحرک بر روی نتایج آنالیز پایداری نیز بررسی می‌شود. نتایج نشان می‌دهند که سختی و میرایی سیستم تعلیق، نسبت جرم چرخ‌ها به جرم کل جسم، طول جسم صلب و روش متفاوت در مدل‌سازی جسم متحرک بر روی نواحی پایدار و ناپایدار سیستم کاملاً مؤثر هستند. شبیه‌سازی عددی جابجایی نقطه‌ی میانی ورق، دقت نتایج به‌دست‌آمده را تأیید می‌کند.
تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۱۲/۰۴	
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۰/۱۲/۲۱	
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۰۹/۲۱	

۱- مقدمه

مطالعه‌ی رفتار دینامیکی سازه‌های الاستیک تحت اثر بارهای متحرک یک موضوع مهم با کاربردهای گسترده‌ی صنعتی است که از نتایج حاصل از این مطالعه در مسائلی نظیر طراحی پل‌ها و خطوط ریلی تحت عبور وسایل نقلیه [۱]، سازه‌های جراثیل‌های سقفی و تسمه نقاله‌ها [۲] و ماشین‌های ابزار با قابلیت ماشین‌کاری سریع [۳] استفاده می‌شود. به دلیل تغییر در موقعیت جرم متحرک بر روی سازه، در شرایطی که تمام مؤلفه‌های شتاب جرم متحرک در مطالعه لحاظ می‌شود ضرایب معادلات حاکم بر ارتعاشات این سیستم‌ها با زمان تغییر می‌کنند و بر این اساس این سیستم‌ها جزء سیستم‌های متغیر با زمان دسته‌بندی می‌شوند. این ضرایب وابسته به زمان می‌توانند نقش تحریکی موسوم به تحریک پارامتریک را برای سیستم ایفا کنند. این نوع تحریک در شرایط معینی می‌تواند سبب بروز ناپایداری دینامیکی در سازه‌ی الاستیک تحت بار متحرک شود. بنابراین جهت حفاظت از سیستم تحت بار متحرک، شناخت شرایطی که سبب بروز ناپایداری دینامیکی می‌شود از اهمیت فراوانی برخوردار است.

به نظر می‌رسد که برای اولین بار نلسون و کانور [۴] برای تیر اولر- برنولی با تکیه‌گاه ساده و تحت اثر عبور جرم‌های متحرک، نواحی پایدار و ناپایدار را در فضای پارامترهای سیستم تعیین کردند. آلدريم و باز [۵] با استفاده از تئوری تحریک تکانشی، پایداری

تیر تحت اثر حرکت متناوب جرم‌های متحرک را مطالعه کردند. ماکرتیچ [۶] برای مطالعه‌ی پایداری دینامیکی سیستم تیر - جرم متحرک برای هر دو مدل تیر اولر - برنولی و تیموشنکو از روش تئوری فلاکه^۱ استفاده کرد. راتو [۷] از روش مقیاس چندگانه جهت بررسی پایداری دینامیکی تیر اولر - برنولی تحت بار متحرک استفاده کرد. سان [۸] با استفاده از روش تئوری فلاکه پایداری دینامیکی تیرهای اولر - برنولی را تحت عبور جرم‌های متحرک را مورد مطالعه قرار داد. قمشی بزرگ و همکاران [۹] جهت تعیین شرایط پایداری دینامیکی یک تیر با تکیه‌گاه ساده و تحت عبور متناوب جرم‌های متحرک از روش اختلافی هموتوبی استفاده کردند و نتایج را از طریق تعیین نواحی پایدار و ناپایدار در صفحه‌ی پارامترها معرفی کردند. نیکخو و رفوئی [۱۰] بر روی پاسخ دینامیکی ورق‌های مستطیلی تحت عبور جرم‌های متحرک یک مطالعه‌ی پارامتری انجام دادند. آن‌ها برای جرم‌های متحرک مسیر مستقیم و دایره‌ای را در نظر گرفتند و اثر وزن و سرعت جرم متحرک و نیز اثر نسبت طول به عرض ورق را بر روی ماکزیمم پاسخ دینامیکی ورق مطالعه کردند. رفوئی و همکاران [۱۱] از روش المان محدود برای مطالعه‌ی ارتعاشات غیرخطی ورق‌های مستطیلی نازک تحت عبور جرم‌های متحرک استفاده کردند. امیری و همکاران [۱۲] با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول، ارتعاشات ورق‌های الاستیک نسبتاً ضخیم تحت عبور جرم‌های متحرک که در مسیرهای مختلفی از روی ورق عبور می‌کردند را بررسی کردند. آن‌ها نشان دادند که در نظر گرفتن اثر تغییر شکل برشی در آنالیز ارتعاشات ورق‌های نسبتاً ضخیم ضروری است. اسن [۱۳] یک روش المان محدود جدید را برای آنالیز ارتعاشات عرضی و طولی یک ورق مستطیلی نازک تحت عبور جرم‌های متحرک ارائه کرد. با استفاده از روش بسط سری چندجمله‌ای متعامد و روش بسط تابع ویژه، پاسخ دینامیکی ورق مستطیلی نازک تحت عبور جرم متحرک توسط قزوینی و همکاران [۱۴] مورد مطالعه قرار گرفت. ابراهیم‌زاده و همکاران [۱۵] برای یک ورق مستطیلی نازک تحت عبور متوالی جرم‌های متحرک، رفوئی و همکاران [۱۶] برای یک ورق نازک با شرایط مرزی دلخواه تحت عبور جرم متحرک و دارای وصله‌های پیزوالکتریک و نیکخو و همکاران [۱۷] در مطالعه‌ی یک ورق مستطیلی نازک تحت عبور دو دسته جرم که در دو مسیر مخالف بر روی ورق حرکت می‌کردند مقادیر سرعتی از جرم متحرک که سبب بروز تشدید در ورق می‌شوند را معرفی کردند. ترکان و همکاران [۱۸] پایداری دینامیکی ورق مستطیلی نازک با تکیه‌گاه ساده تحت عبور پی‌درپی جرم‌های متحرک را با استفاده از روش پارامترهای فشرده مطالعه کردند. آن‌ها در مطالعه‌ی دیگری [۱۹] با استفاده از روش هارمونیک بالانس نموی برای سه حالت حرکت متوالی جرم‌های متحرک بر روی خط راست، خط مورب و مسیر دایره‌ای بر روی یک ورق نسبتاً ضخیم، نواحی پایدار و ناپایدار را در صفحه‌ی پارامترهای جسم متحرک تعیین کردند. پیرمردیان و همکاران [۲۰] با در نظر گرفتن اثر ترم‌های غیرخطی ناشی جابجایی‌های بزرگ در تیر، پایداری دینامیکی سیستم تیر - جرم متحرک را مطالعه کردند. در تمام این مطالعات جرم متحرک به صورت یک جرم نقطه‌ای و متمرکز مدل شده است. مدلی متفاوت با مدل جرم نقطه‌ای در مطالعه‌ی واقعی امیری و همکاران [۱۲] گزارش شده است. آن‌ها در بررسی ارتعاشات یک ورق مستطیلی نسبتاً ضخیم با شرایط مرزی دلخواه و تحت عبور جرم متحرک، از مدل جرم توزیع شده برای مدل‌سازی جسم متحرک استفاده کردند.

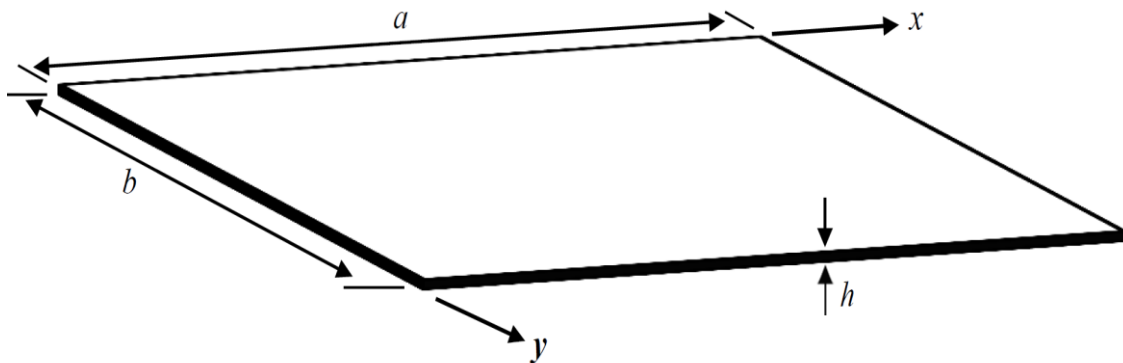
بررسی مطالعات انجام شده در زمینه‌ی آنالیز پایداری دینامیکی سیستم‌های الاستیک تحت عبور جسم متحرک نشان می‌دهد که در مدل‌های در نظر گرفته شده برای جسم متحرک اغلب به اثر دو پارامتر جرم و سرعت جسم متحرک بر روی نتایج آنالیز پایداری دینامیکی توجه شده و به تأثیر پارامترهایی نظیر سختی و میرایی سیستم تعلیق، نسبت جرم چرخ به جرم کل جسم و طول جسم متحرک، که در یک مدل مناسب برای یک وسایل نقلیه می‌تواند مطرح باشد، توجه لازم انجام نشده است. در این مطالعه به منظور بررسی دقیق‌تر شرایط پایداری یک پل تحت عبور وسایل نقلیه، مدل کامل تری برای وسیله‌ی نقلیه در نظر گرفته شده است. به این ترتیب که وسیله‌ی نقلیه به صورت جسم صلبی که در هر یک از دو انتها از طریق یک سیستم تعلیق به چرخ متصل شده و بر روی یک ورق حرکت می‌کند مدل شده است و سعی شده تا در یک بررسی جامع، علاوه بر مورد توجه قرار دادن جرم و سرعت جسم متحرک، اثر پارامترهای سختی و میرایی سیستم تعلیق، نسبت جرم چرخ به جرم کل جسم و طول وسایل نقلیه بر روی نتایج آنالیز پایداری دینامیکی سیستم مورد مطالعه قرار گرفته و از این جنبه مطالعات گذشته تکمیل شود. به منظور

¹ Floquet Theory

نشان دادن اهمیت انتخاب مدل مناسب، نتیجه‌ی به دست آمده با نتیجه‌ی حاصل از انتخاب مدل جرم نقطه‌ای برای جسم متحرک، مقایسه شده است. بررسی انجام شده مبین اهمیت انتخاب مدل مناسب و مقدار پارامترهای فیزیکی مدل بر روی شرایط پایداری دینامیکی سیستم است. نتایج از طریق شبیه‌سازی‌های عددی مورد تأیید قرار گرفته‌اند.

۲- مدل سازی دینامیکی

در این پژوهش، مطابق شکل ۱، بستر جسم متحرک به صورت یک ورق مستطیلی شکل نازک، با شرایط تکیه‌گاهی ساده و با طول a ، عرض b و ضخامت h در نظر گرفته می‌شود.

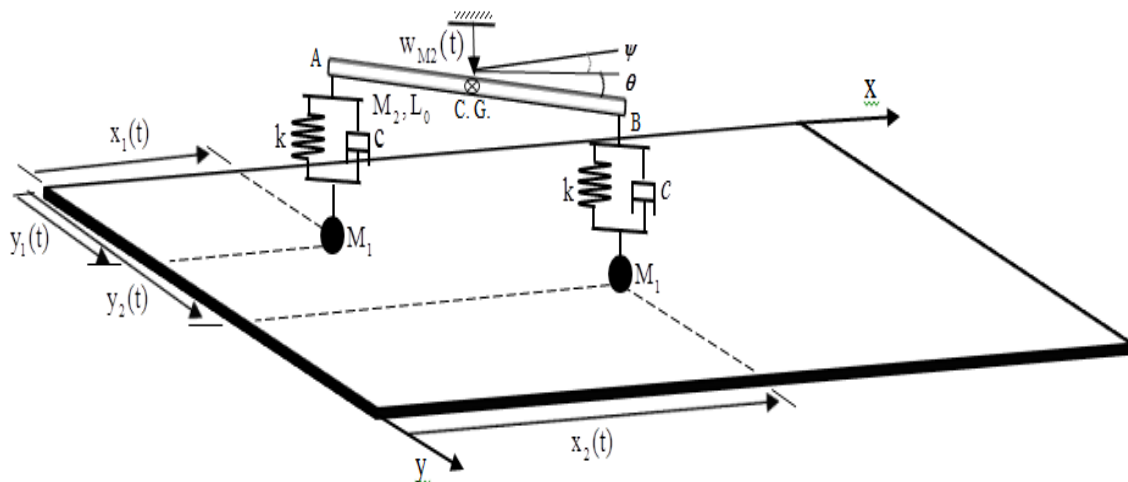


شکل ۱ ورق مستطیلی

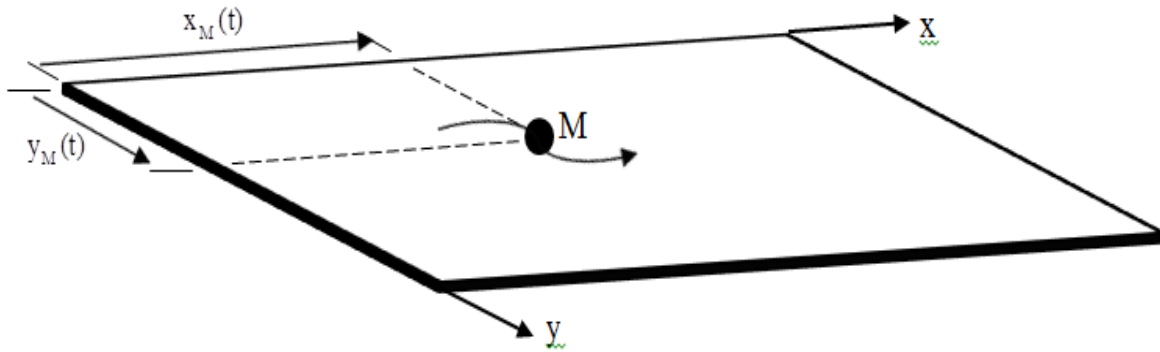
محورهای دستگاه مختصات کارتزین x و y به ترتیب در امتداد طول و عرض ورق در نظر گرفته شده‌اند و $w(x, y, t)$ نشان دهنده‌ی جابجایی عرضی نقطه‌ای از ورق به مختصات (x, y) در لحظه t است. ماده‌ی ورق خطی، همگن و ایزوتروپیک با مدول الاستیسیته‌ی E ، چگالی ρ ، مدول برشی G ، ضریب پواسون ν و سختی خمشی D است که به صورت زیر قابل تعیین است [۲۱].

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (1)$$

برای جسم متحرک دو مدل جسم صلب نوسان کننده‌ی متحرک و جرم نقطه‌ای متحرک در نظر گرفته شده است. شماتیک این دو مدل به ترتیب در شکل ۲ و ۳ نشان داده شده‌اند.



شکل ۲ ورق مستطیلی تحت اثر عبور جسم صلب نوسان کننده‌ی متحرک



شکل ۳ ورق مستطیلی تحت اثر عبور جرم نقطه‌ای متحرک

در مدل جرم نقطه‌ای متحرک در شکل ۳، جسم متحرک به صورت یک جرم متمرکز به جرم M در نظر گرفته می‌شود که موقعیت آن بر روی ورق در هر لحظه توسط مختصات (x_M, y_M, w_M) بیان می‌شود. اما مدل جسم صلب نوسان کننده‌ی متحرک در شکل ۲، نسبت به مدل جرم نقطه‌ای یک مدل واقعی‌تر برای وسیله‌ی نقلیه در آنالیز ارتعاشات یک پل تحت عبور وسیله‌ی نقلیه است و انتظار می‌رود که در شرایطی که طول جسم متحرک قابل ملاحظه باشد، با انتخاب این مدل بتوان رفتار دینامیکی سیستم را به طور دقیق‌تر پیش‌بینی کرد. در این مدل، شاسی جسم متحرک به صورت یک جسم صلب به جرم M_2 و طول L_0 و گشتاور اینرسی حول مرکز جرم \bar{I} در نظر گرفته شده است که از هر دو انتها از طریق یک سیستم تعلیق یکسان به چرخ‌های جرم M_1 متصل شده است. هر سیستم تعلیق متشکل از فنر به ضریب k و دمپر با ضریب میرایی لزجی c است. موقعیت چرخ جلو و عقب بر روی سطح ورق در هر لحظه به ترتیب با مختصات (x_1, y_1, w_1) و (x_2, y_2, w_2) نشان داده شده است. هر دو مختص w_1 و w_2 از سطح ورق سنجیده می‌شوند. موقعیت مرکز جرم جسم صلب در هر لحظه توسط مختصات $(x_{M_2}, y_{M_2}, w_{M_2})$ مشخص می‌شود که w_{M_2} از موقعیت تعادل استاتیکی اندازه‌گیری می‌شود. ψ زاویه‌ی چرخش جسم صلب متحرک حول محور عمود بر صفحه‌ی ورق و زاویه‌ی θ میزان چرخش جسم صلب حول محور موازی با سطح ورق و عمود بر امتداد طولی جسم صلب است.

۳- معادلات حاکم بر دینامیک سیستم ورق - جسم صلب نوسان کننده‌ی متحرک

جهت استخراج معادلات حاکم از روش مودهای فرضی استفاده می‌شود. برای استفاده از این روش، ابتدا عبارت انرژی جنبشی و پتانسیل سیستم ورق - جسم صلب نوسان کننده‌ی متحرک نمایش داده در شکل ۲ نوشته می‌شوند.

$$\begin{aligned}
 KE &= \frac{1}{2} \iint_A \rho h \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dy + \frac{1}{2} M_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \chi_1 \dot{w}_1^2) + \frac{1}{2} M_1 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \chi_1 \dot{w}_2^2) \\
 &+ \frac{1}{2} M_1 (\dot{x}_{M_2}^2 + \dot{y}_{M_2}^2 + \chi_1 \dot{w}_{M_2}^2) + \frac{1}{2} \bar{I} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \bar{I} \dot{\psi}^2 \\
 PE &= \frac{D}{2} \iint_A \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) \right] dx dy \\
 &+ \frac{1}{2} k \left(\left(w_{M_2} + \delta_0 + \frac{L_0}{2} \sin(\theta) \right) - \chi_1 w_1 \right)^2 + \frac{1}{2} k \left(\left(w_{M_2} + \delta_0 - \frac{L_0}{2} \sin(\theta) \right) - \chi_2 w_2 \right)^2 \\
 &- \chi_1 M_1 g w_1 - \chi_2 M_1 g w_2 - M_2 g w_{M_2}
 \end{aligned} \tag{۲}$$

Where: $\chi_1 = H(t - \hat{t}_1) - H(t - \hat{t}_2)$, $\chi_2 = H(t - \hat{t}_3) - H(t - \hat{t}_4)$

که در آن $H(t - \hat{t}_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$ نماد تابع هیویساید^۲ است و به صورت زیر تعریف می‌شود.

² Heaviside function

$$H(t - \hat{t}_i) = \begin{cases} 0 & t < \hat{t}_i \\ 1 & t \geq \hat{t}_i \end{cases} \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (3)$$

\hat{t}_1 و \hat{t}_3 به ترتیب لحظه‌ی ورود چرخ جلو و عقب بر روی ورق و \hat{t}_2 و \hat{t}_4 به ترتیب لحظه‌ی خروج چرخ جلو و عقب از روی ورق هستند. δ_0 تغییر شکل استاتیکی ایجاد شده در فنر سیستم تعلیق تحت اثر نیروی وزن جرم M_2 است که به صورت $\delta_0 = M_2 g / 2k$ محاسبه می‌شود. w_1 و \dot{w}_1 به ترتیب موقعیت قائم و سرعت قائم جرم M_1 چرخ جلو و w_2 و \dot{w}_2 نیز به ترتیب موقعیت قائم و سرعت قائم جرم M_1 چرخ عقب را نشان می‌دهند. در روش موده‌های فرضی، جابجایی عرضی ورق $w(x, y, t)$ به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$w(x, y, t) = \sum_{k=1}^n \varphi_k(x, y) A_k(t) \quad (4)$$

که در آن n تعداد شکل موده‌های در نظر گرفته شده، $\varphi_k(x, t)$ k امین تابع شکل مود و $A_k(t)$ ضریب تأثیر متناظر برای تابع شکل k ام است که مختص مودال نامیده می‌شود. با توجه به رابطه‌ی ۴ برای جابجایی عرضی ورق $w(x, y, t)$ ، جابجایی و سرعت قائم جرم M_1 چرخ جلو و عقب به صورت زیر قابل بیان هستند.

$$w_j(t) = w_j(x_j, y_j, t) = \sum_{k=1}^n \varphi_k(x_j, y_j) A_k(t) \quad (5)$$

$$\dot{w}_j(t) = \dot{w}_j(x_j, y_j, t) = \sum_{k=1}^n (\varphi_{k,x}(x_j, y_j) \dot{x}_1 + \varphi_{k,y}(x_j, y_j) \dot{y}_1) A_k(t) + \sum_{k=1}^n \varphi_k(x_j, y_j) \dot{A}_k(t)$$

که در آن $j = 1, 2$ است. کار مجازی $\delta w_{n.c.}$ انجام شده به وسیله‌ی نیروی غیرکنسرواتيو میرایی هر دو دمپر به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\delta w_{n.c.} = c(\dot{w}_A - \chi_2 \dot{w}_2)(-\delta w_A + \chi_2 \delta w_2) + c(\dot{w}_B - \chi_1 \dot{w}_1)(-\delta w_B + \chi_1 \delta w_1) \quad (6)$$

که در آن w_A و w_B جابجایی قائم دو انتهای جسم صلب هستند که به سیستم تعلیق چرخ عقب و جلو متصل شده‌اند و به صورت زیر به جابجایی قائم مرکز جرم و زاویه‌ی چرخش جسم صلب مرتبط می‌شوند.

$$w_A = w_{M_2} - \frac{L_0}{2} \sin(\theta) \quad (7)$$

$$w_B = w_{M_2} + \frac{L_0}{2} \sin(\theta)$$

و δw_1 و δw_B جابجایی مجازی دو انتهای دمپر چرخ جلو و δw_A و δw_2 جابجایی مجازی دو انتهای دمپر چرخ عقب را نشان می‌دهند. از جایگذاری روابط ۵ و ۷ در عبارت کار مجازی ۶، نیروهای تعمیم‌یافته‌ی غیرکنسرواتيو به صورت زیر حاصل می‌شوند.

$$Q_{n.c.A_i} = \chi_1 c \varphi_i(x_1, y_1) \left[\dot{w}_{M_2} + \frac{L_0}{2} \dot{\theta} \cos(\theta) - \left(\sum_{k=1}^n \varphi_{k,x}(x_1, y_1) \dot{x}_1 + \varphi_{k,y}(x_1, y_1) \dot{y}_1 \right) A_k(t) - \sum_{k=1}^n \varphi_k(x_1, y_1) \dot{A}_k(t) \right] + \chi_2 c \varphi_i(x_2, y_2) \left[\dot{w}_{M_2} + \frac{L_0}{2} \dot{\theta} \cos(\theta) - \left(\sum_{k=1}^n \varphi_{k,x}(x_2, y_2) \dot{x}_1 + \varphi_{k,y}(x_2, y_2) \dot{y}_2 \right) A_k(t) - \sum_{k=1}^n \varphi_k(x_2, y_2) \dot{A}_k(t) \right] \quad (8)$$

$$Q_{n.c.w_{M_2}} = c \left[-2\dot{w}_{M_2} + \chi_1 \left(\sum_{k=1}^n \varphi_{k,x}(x_1, y_1) \dot{x}_1 + \varphi_{k,y}(x_1, y_1) \dot{y}_1 \right) A_k(t) + \sum_{k=1}^n \varphi_k(x_1, y_1) \dot{A}_k(t) \right. \\ \left. + \chi_2 \left(\sum_{k=1}^n \varphi_{k,x}(x_2, y_2) \dot{x}_2 + \varphi_{k,y}(x_2, y_2) \dot{y}_2 \right) A_k(t) + \sum_{k=1}^n \varphi_k(x_2, y_2) \dot{A}_k(t) \right]$$

$$Q_{n.c.\theta} = \frac{cL_0}{2} \left[-L_0 \dot{\theta} + \chi_1 \left(\sum_{k=1}^n \varphi_{k,x}(x_1, y_1) \dot{x}_1 + \varphi_{k,y}(x_1, y_1) \dot{y}_1 \right) A_k(t) + \sum_{k=1}^n \varphi_k(x_1, y_1) \dot{A}_k(t) \right. \\ \left. - \chi_2 \left(\sum_{k=1}^n \varphi_{k,x}(x_2, y_2) \dot{x}_2 + \varphi_{k,y}(x_2, y_2) \dot{y}_2 \right) A_k(t) + \sum_{k=1}^n \varphi_k(x_2, y_2) \dot{A}_k(t) \right]$$

با جایگذاری روابط ۵ در عبارت انرژی جنبشی و پتانسیل ۲ و تشکیل عبارت لاگرانژین سیستم $(L = KE - PE)$ و سپس جایگذاری عبارت لاگرانژین حاصل و نیروی تعمیم یافته ۸ در معادلات لاگرانژ داریم:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{A}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial A_j} = Q_{n.c.A_j}, \quad j = 1, \dots, n$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{w}_{M_2}} \right) - \frac{\partial L}{\partial w_{M_2}} = Q_{n.c.w_{M_2}}, \tag{9}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = Q_{n.c.\theta}$$

و با فرض کوچک بودن زاویه θ ، معادلات حاکم بر مختصات مودال و مختص w_{M_2} و θ به صورت زیر به دست می آیند.

$$\begin{bmatrix} \bar{T}(t) & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{A} \\ \ddot{w}_{M_2} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_1(t) & Y_2(t) & Y_3(t) \\ Y_2^T(t) & 2c & 0 \\ Y_3^T(t) & 0 & cL_0^2/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{A} \\ \dot{w}_{M_2} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Lambda_1(t) & \Lambda_2(t) & \Lambda_3(t) \\ K_{21} & 2k & 0 \\ K_{31} & 0 & kL_0/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ w_{M_2} \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{f}(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{10}$$

که در آن $A = [A_1(t), A_2(t), \dots, A_n(t)]$ بردار حاوی مختصات مودال است و درایه های ضرایب ماتریسی به صورت زیر مشخص می شوند.

$$\bar{T}_{jk} = \rho h \iint_A \varphi_j(x, y) \varphi_k(x, y) dA + M_1 \left(\chi_1 \varphi_j(x_1, y_1) \varphi_k(x_1, y_1) + \chi_2 \varphi_j(x_2, y_2) \varphi_k(x_2, y_2) \right)$$

$$Y_{1jk} = 2M_1 \left[\chi_1 \left(\dot{x}_1 \varphi_j(x_1, y_1) \varphi_{k,x}(x_1, y_1) + \dot{y}_1 \varphi_j(x_1, y_1) \varphi_{k,y}(x_1, y_1) \right) \right. \\ \left. + \chi_2 \left(\dot{x}_2 \varphi_j(x_2, y_2) \varphi_{k,x}(x_2, y_2) + \dot{y}_2 \varphi_j(x_2, y_2) \varphi_{k,y}(x_2, y_2) \right) \right] \\ + c \left[\chi_1 \varphi_j(x_1, y_1) \varphi_k(x_1, y_1) + \chi_2 \varphi_j(x_2, y_2) \varphi_k(x_2, y_2) \right]$$

$$Y_{2j} = -c \left(\chi_1 \varphi_j(x_1, y_1) + \chi_2 \varphi_j(x_2, y_2) \right)$$

$$Y_{3j} = \frac{cL_0}{2} \left(-\chi_1 \varphi_j(x_1, y_1) + \chi_2 \varphi_j(x_2, y_2) \right) \tag{11}$$

$$\Lambda_{1ij} = D \iint_A \left(\varphi_{j,xx} (\varphi_{k,xx} + \nu \varphi_{k,yy}) + \varphi_{j,yy} (\varphi_{k,yy} + \nu \varphi_{k,xx}) + (1 - \nu) \varphi_{j,xy} \varphi_{k,xy} \right) dA \\ + M_1 \left[\chi_1 \left(\dot{x}_1^2 \varphi_j(x_1, y_1) \varphi_{k,xx}(x_1, y_1) + 2\dot{x}_1 \dot{y}_1 \varphi_j(x_1, y_1) \varphi_{k,xy}(x_1, y_1) + \dot{y}_1^2 \varphi_j(x_1, y_1) \varphi_{k,yy}(x_1, y_1) \right) \right. \\ \left. + \chi_2 \left(\dot{x}_2^2 \varphi_j(x_2, y_2) \varphi_{k,xx}(x_2, y_2) + 2\dot{x}_2 \dot{y}_2 \varphi_j(x_2, y_2) \varphi_{k,xy}(x_2, y_2) + \dot{y}_2^2 \varphi_j(x_2, y_2) \varphi_{k,yy}(x_2, y_2) \right) \right] \\ + c \left[\chi_1 \left(\dot{x}_1 \varphi_j(x_1, y_1) \varphi_{k,x}(x_1, y_1) + \dot{y}_1 \varphi_j(x_1, y_1) \varphi_{k,y}(x_1, y_1) \right) \right. \\ \left. + \chi_2 \left(\dot{x}_2 \varphi_j(x_2, y_2) \varphi_{k,x}(x_2, y_2) + \dot{y}_2 \varphi_j(x_2, y_2) \varphi_{k,y}(x_2, y_2) \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
 & + \chi_2 \left(\dot{x}_2 \varphi_j(x_2, y_2) \varphi_{k,x}(x_2, y_2) + \dot{y}_2 \varphi_j(x_2, y_2) \varphi_{k,y}(x_2, y_2) \right) \\
 & + k \left[\chi_1 \varphi_j(x_1, y_1) \varphi_k(x_1, y_1) + \chi_2 \varphi_j(x_2, y_2) \varphi_k(x_2, y_2) \right] \\
 \Lambda_{2j} & = -k \left(\chi_1 \varphi_j(x_1, y_1) + \chi_2 \varphi_j(x_2, y_2) \right) \\
 \Lambda_{3j} & = \frac{kL_0}{2} \left(-\chi_1 \varphi_j(x_1, y_1) + \chi_2 \varphi_j(x_2, y_2) \right) \\
 K_{21} & = \Lambda_2^T(t) - c \left[\chi_1 \left(\dot{x}_1 \Phi_{,x}^T(x_1, y_1) + \dot{y}_1 \Phi_{,y}^T(x_1, y_1) \right) + \chi_2 \left(\dot{x}_2 \Phi_{,x}^T(x_2, y_2) + \dot{y}_2 \Phi_{,y}^T(x_2, y_2) \right) \right] \\
 K_{31} & = \Lambda_3^T(t) - \frac{cL_0}{2} \left[-\chi_1 \left(\dot{x}_1 \Phi_{,x}^T(x_1, y_1) + \dot{y}_1 \Phi_{,y}^T(x_1, y_1) \right) + \chi_2 \left(\dot{x}_2 \Phi_{,x}^T(x_2, y_2) + \dot{y}_2 \Phi_{,y}^T(x_2, y_2) \right) \right] \\
 f_i & = \left(M_1 + \frac{M_2}{2} \right) g \left(\chi_1 \varphi_j(x_1, y_1) + \chi_2 \varphi_j(x_2, y_2) \right)
 \end{aligned}$$

که در آن $j = 1, \dots, n$ و $k = 1, \dots, n$ و n تعداد مختصات مودال در نظر گرفته شده است و داریم:

$$\begin{aligned}
 \Phi_{,x}(x_i, y_i) & = [\varphi_{1,x}(x_i, y_i), \dots, \varphi_{n,x}(x_i, y_i)]^T \\
 \Phi_{,y}(x_i, y_i) & = [\varphi_{1,y}(x_i, y_i), \dots, \varphi_{n,y}(x_i, y_i)]^T
 \end{aligned} \tag{۱۲}$$

که در آن $i = 1, 2$ است. با در نظر گرفتن اولین شکل مود نرمال ورق با تکیه‌گاه ساده داریم:

$$\varphi(x, y) = \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right), \quad \iint_{Area} \varphi(x, y) \varphi(x, y) dS = 1 \tag{۱۳}$$

و حرکت با سرعت ثابت V جسم صلب نوسان کننده از روی خط میانی و موازی با امتداد طولی ورق $x_1(t) = \chi_1(Vt)$ ، $x_2(t) = \chi_1(Vt - L_0/2)$ ، $y_1(t) = \chi_1(b/2)$ و $y_2(t) = \chi_2(b/2)$ در نظر گرفتن ورود یک جسم صلب نوسان کننده متحرک بر روی ورق بلافاصله پس از خروج جسم صلب قبلی، از جایگذاری شکل مود ۱۳ در روابط ۱۰ و ۱۱، معادله‌ی سه درجه آزادی که حرکت سیستم پیوسته ورق - جرم متحرک را توصیف می‌کند، به صورت زیر حاصل می‌شود.

$$m(t)\ddot{\eta} + c(t)\dot{\eta} + k(t)\eta = f(t) \tag{۱۴}$$

که در آن $\eta = [A_1, w_{M_2}, \theta]^T$ است و ضرایب ماتریس $m(t)$ ، $c(t)$ و $k(t)$ بردار $f(t)$ متناوب با زمان و با دوره‌ی تناوب $T_p = (a + L_0)/V$ هستند و درایه‌های آن‌ها در بازه‌ی $0 \leq t \leq T_p$ به صورت رابطه (۱۵) می‌باشند.

$$\begin{aligned}
 m(t) & = \begin{bmatrix} 1 + 2r\alpha Q_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
 c(t) & = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & 2\xi\Omega & 0 \\ c_{31} & 0 & 6\xi\Omega \end{bmatrix}, \\
 k(t) & = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & \Omega^2 & 0 \\ k_{31} & 0 & 3\Omega^2 \end{bmatrix}, \\
 f(t) & = \begin{bmatrix} \alpha g \sqrt{ab} Q_3(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{۱۵}$$

و برای بازه‌ی $t > T_p$ به صورت رابطه‌ی (۱۶) حاصل می‌شوند.

$$m(t) = m(t - T_p), \quad c(t) = c(t - T_p), \quad k(t) = k(t - T_p), \quad f(t) = f(t - T_p) \tag{۱۶}$$

که در رابطه‌ی (۱۵) پارامترهای استفاده شده برای تعریف درایه‌های ماتریس‌ها به صورت زیر بیان می‌شوند.

$$c_{11} = 2r\alpha\bar{w}_1 Q_2(t) + 4(1 - r)\alpha\xi\Omega Q_1(t), \tag{۱۷}$$

$$\begin{aligned}
 c_{12} &= -2\sqrt{ab}(1-r)\alpha\xi\Omega Q_3(t), \\
 c_{13} &= \sqrt{ab}(1-r)\alpha\xi\Omega L_0 Q_4(t), \\
 c_{21} &= -\frac{2}{\sqrt{ab}}\xi\Omega Q_3(t), \\
 c_{31} &= -\frac{2}{\sqrt{ab}}\xi\Omega Q_4(t) \\
 k_{11} &= \omega_1^2 + 2\alpha((1-r)\Omega^2 - r\bar{\omega}_1^2)Q_1(t) + 2\alpha(1-r)\xi\Omega\bar{\omega}_1 Q_2(t) \\
 k_{12} &= -\alpha(1-r)\Omega^2\sqrt{ab}Q_3(t), \\
 k_{13} &= \frac{L_0\sqrt{ab}}{2}\alpha(1-r)\Omega^2 Q_4(t) \\
 k_{21} &= -\frac{1}{\sqrt{ab}}(\Omega^2 Q_3(t) + 2\xi\Omega\bar{\omega}_1 Q_5(t)), \\
 k_{31} &= \frac{6\Omega}{L_0\sqrt{ab}}(\Omega Q_4(t) + 2\xi\bar{\omega}_1 Q_6(t)) \\
 Q_1(t) &= \chi_1 \sin^2(\bar{\omega}_1 t) + \chi_2 \sin^2(\bar{\omega}_1 t - \bar{L}), \\
 Q_2(t) &= \chi_1 \sin(2\bar{\omega}_1 t) + \chi_2 \sin(2(\bar{\omega}_1 t - \bar{L})), \\
 Q_3(t) &= \chi_1 \sin(\bar{\omega}_1 t) + \chi_2 \sin(\bar{\omega}_1 t - \bar{L}), \\
 Q_4(t) &= \chi_2 \sin(\bar{\omega}_1 t - \bar{L}) - \chi_1 \sin^2(\bar{\omega}_1 t), \\
 Q_5(t) &= \chi_1 \cos(\bar{\omega}_1 t) + \chi_2 \cos(\bar{\omega}_1 t - \bar{L}), \\
 Q_6(t) &= \chi_2 \cos(\bar{\omega}_1 t - \bar{L}) - \chi_1 \cos(\bar{\omega}_1 t)
 \end{aligned}$$

و سایر پارامترهای استفاده شده در روابط (۱۵) و (۱۷) به صورت زیر تعریف می شوند.

$$\alpha = \frac{2M_1 + M_2}{\rho h a b}, \quad \gamma = \frac{\pi V}{a \omega_1}, \quad \bar{\omega}_1 = \gamma \omega_1, \quad r = \frac{2M_1}{2M_1 + M_2}, \quad \Omega = \sqrt{\frac{2k}{M_2}}, \quad \xi = \frac{2c}{2\Omega M_2}, \quad \bar{L} = \frac{\pi L_0}{a} \quad (18)$$

که در آن ω_1 اولین فرکانس ارتعاشات آزاد ورق با تکیه گاه ساده است که به صورت زیر قابل محاسبه است.

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\pi^4 D}{\rho h} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)} \quad (19)$$

۴- معادلات دیفرانسیل حاکم بر دینامیک سیستم ورق - جسم نقطه‌ای متحرک

به منظور استفاده از روش مودهای فرضی برای استخراج معادله‌ی حاکم بر دینامیک مسئله، ابتدا عبارت انرژی جنبشی و پتانسیل سیستم ورق - جرم نقطه‌ای متحرک به صورت رابطه ۲۰ نوشته می شود.

$$\begin{aligned}
 KE &= \frac{1}{2} \iint_A \rho h \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx dy + \frac{1}{2} M (\dot{x}_M^2 + \dot{y}_M^2 + \dot{w}_M^2), \\
 PE &= \frac{D}{2} \iint_A \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy - M g w_M
 \end{aligned} \quad (20)$$

با در نظر گرفتن جابجایی عرضی ورق $w(x, y, t)$ به صورت رابطه‌ی ۴ و با توجه به صفر بودن کار نیروی غیرکنسرواتیو و در نتیجه عدم وجود نیروهای تعمیم یافته، با جایگذاری عبارت لاگرانژین حاصل از عبارات انرژی جنبشی و پتانسیل ۲۰ در معادله‌ی

لاگرانژ داریم:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{A}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial A_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (21)$$

و با در نظر گرفتن اولین شکل مود نرمال ورق با تکیه‌گاه ساده، برای وقتی که جرم نقطه‌ای متحرک از روی خط میانی و موازی با امتداد طولی ورق با سرعت ثابت V عبور می‌کند ($x_M(t) = Vt, y_M(t) = b/2$) و بلافاصله پس از خروج جسم متحرک از روی ورق، جسم متحرک دیگری با همان مشخصات بر روی ورق وارد می‌شود، پس از انجام عملیات ریاضی لازم، معادله‌ی سیستم یک درجه آزادی که حرکت سیستم پیوسته ورق - جرم متحرک را توصیف می‌کند، به صورت زیر حاصل می‌شود [۱۷].

$$m(t)\ddot{\eta} + c(t)\dot{\eta} + k(t)\eta = f(t) \quad (22)$$

که در آن $\eta = A_1(t)$ و ضرایب $m(t)$ ، $c(t)$ و $k(t)$ تابع $f(t)$ متناوب با زمان و با دوره‌ی تناوب $T_p = a/V$ هستند و در بازه‌ی $0 \leq t \leq T_p$ به صورت (۲۳) می‌باشند.

$$\begin{aligned} m(t) &= 1 + 4\alpha \sin^2(\bar{\omega}_1 t), \\ c(t) &= 4\alpha \bar{\omega}_1 \sin(2\bar{\omega}_1 t), \\ k(t) &= \omega_1^2 - 4\alpha \bar{\omega}_1 \sin^2(\bar{\omega}_1 t), \\ f(t) &= 2\alpha g \sqrt{ab} \sin(\bar{\omega}_1 t) \end{aligned} \quad (23)$$

و برای بازه‌ی $t > T_p$ به صورت رابطه‌ی (۱۶) حاصل می‌شوند. پارامترهای استفاده شده در رابطه‌ی ۲۳ به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\alpha = \frac{M}{\rho h a b}, \quad \gamma = \frac{\pi V}{a \omega_1}, \quad \bar{\omega}_1 = \gamma \omega_1 \quad (24)$$

که در آن ω_1 فرکانس اول ارتعاشات آزاد ورق با تکیه‌گاه ساده است که از رابطه‌ی (۱۹) قابل محاسبه است.

۵- تئوری فلاکه در آنالیز پایداری

برای دو مدل در نظر گرفته شده برای جسم متحرک در شکل ۲ و ۳، از معادلات حاکم بر دینامیک سیستم ورق - جسم متحرک در ۱۴ و ۲۱، ملاحظه می‌شود که سیستم مذکور یک سیستم متغیر با زمان خطی با ضرایب متناوب است که این معادلات می‌توانند به شکل فضای حالت زیر نوشته شوند.

$$\begin{aligned} \dot{q} &= R(t)q + P(t) \\ R(t + T_p) &= R(t), P(t + T_p) = P(t) \end{aligned} \quad (25)$$

تئوری فلاکه، روشی است که امکان آنالیز پایداری سیستم‌های خطی همگن با ضرایب متناوب را فراهم می‌کند [۲۲]. بر اساس این روش، با کنار گذاشتن بخش $P(t)$ در معادله‌ی فضا - حالت ۲۵ و در نظر گرفتن این معادله به فرم

$$\begin{aligned} \dot{q} &= R(t)q \\ R(t + T_p) &= R(t) \end{aligned} \quad (26)$$

امکان مطالعه‌ی پایداری پارامتریک سیستم ورق - جرم متحرک فراهم می‌شود. با توجه به این که ابعاد و داریه‌های ماتریس $R(t)$ به شیوه‌ی مدل سازی و مقادیر پارامترهای مدل بستگی دارد، این انتظار وجود دارد که با استفاده از روش تئوری فلاکه بتوان اثر شیوه‌ی مدل سازی و پارامترهای مدل را بر روی نتایج آنالیز پایداری دینامیکی سیستم ورق - جسم متحرک بررسی کرد.

در روش تئوری فلاکه پایداری تمام حل‌های معادلات دیفرانسیل معمولی و خطی با ضرایب متناوب به فرم معادله‌ی ۲۶

مشخص می‌شوند. برای تبیین این تئوری، حل معادله‌ی ۲۶ برای شرایط اولیه‌ی $q_0 = q(0)$ در حالت کلی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$q(t) = \phi_0(t)q_0 \quad (27)$$

در واقع $\phi_0(t)$ یک ماتریس پایه است که ستون‌های آن از حل‌های مستقل خطی معادله‌ی همگن ۲۶ تشکیل شده‌اند. با تعریف ماتریس C به صورت زیر

$$C = \phi_0(T_p) \quad (28)$$

می‌توان ملاحظه کرد که با انتگرال‌گیری عددی از رابطه‌ی ۲۶ در بازه‌ی زمانی یک دوره‌ی تناوب، می‌توان از رابطه‌ی ۲۸ ماتریس C را به دست آورد. تئوری فلاکه بیان می‌کند که اگر تمامی مقادیر ویژه‌ی ماتریس C در داخل یک دایره‌ی واحد به مرکز $(0,0)$ در صفحه‌ی مختلط باشند، سیستم پایدار است و اگر حداقل یکی از مقادیر ویژه در خارج از دایره‌ی مذکور قرار گرفته باشد، سیستم ناپایدار خواهد بود.

۶- نتایج آنالیز پایداری

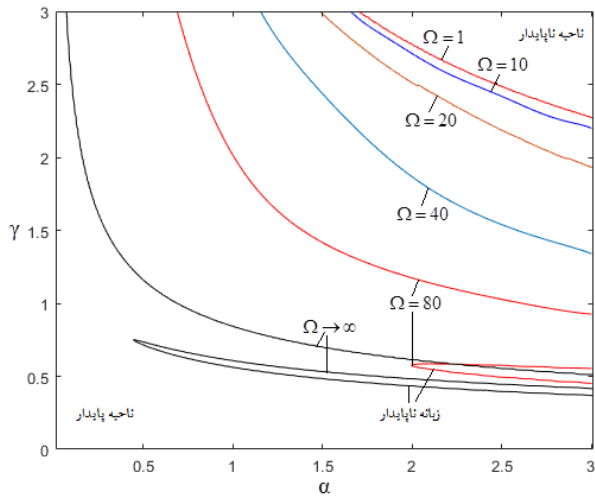
در این بخش یک ورق مستطیلی فولادی به طول ۵ متر، عرض ۱ متر، ضخامت ۰/۰۱ متر، مدول یانگ ۲۰۰ گیگا پاسکال، ضریب پواسون ۰/۳ و جرم واحد حجم ۷۸۵۰ کیلوگرم بر مترمکعب تحت عبور پی‌درپی جسم‌های متحرک در نظر گرفته شده است به این ترتیب که فرض شده بلافاصله پس از خروج یک جسم متحرک از روی ورق، جسم متحرک دیگری با همان مشخصات جسم قبلی بر روی ورق وارد می‌شود.

با استفاده از روش تئوری فلاکه، نتایج آنالیز پایداری دینامیکی سیستم ورق-جسم متحرک برای دو مدل جرم نقطه‌ای متحرک و جسم صلب نوسان‌کننده‌ی متحرک از طریق مشخص کردن نواحی پایدار و ناپایدار در صفحه‌ی پارامترهای بی‌بعد (α, γ) ارائه شده و اثر شیوه‌ی مدل‌سازی جسم متحرک و پارامترهای مدل بر روی نتایج آنالیز پایداری مورد مطالعه قرار گرفته است.

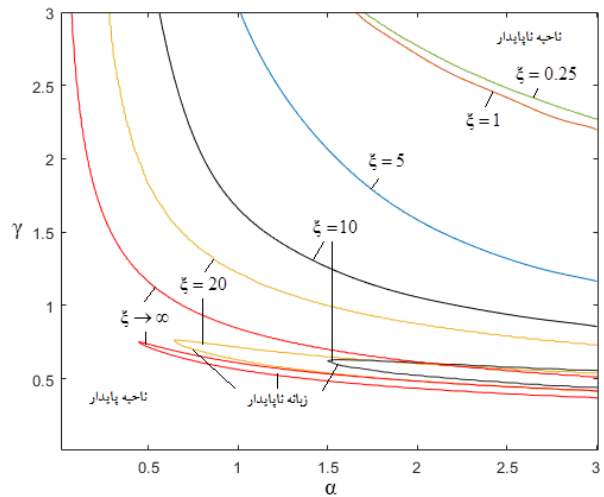
بر این اساس، برنامه‌ای در محیط نرم‌افزار متلب نوشته شده است که به ازای مقادیر منتخب از پارامترهای مسئله، ماتریس پایه‌ی C را تشکیل داده و مقادیر ویژه‌ی این ماتریس را محاسبه می‌کند. سپس با استفاده از مقادیر ویژه‌ی حاصل شده، مرز بین نواحی پایدار و ناپایدار توسط کانتور $(\|\lambda_C\| = 1)$ تشخیص داده می‌شود. با اجرای این برنامه، نواحی پایدار و ناپایدار در بازه‌ی $0 < \alpha \leq 3$ و $0 < \gamma \leq 3$ از صفحه‌ی پارامترهای (α, γ) تعیین شده‌اند.

به منظور مطالعه‌ی اثر مقادیر پارامترهای جسم صلب نوسان‌کننده‌ی متحرک بر روی نتایج آنالیز پایداری دینامیکی، در این بخش اثر مقادیر پارامترهای ξ ، Ω و r بر روی نتایج آنالیز بررسی شده است. نتایج در چهار مرحله، هر بار با ثابت در نظر گرفتن سه پارامتر از پارامترهای ξ ، Ω و r و تغییر یکی از آن‌ها، در صفحه‌ی $\alpha - \gamma$ ارائه شده‌اند. اثر تغییر مقادیر پارامترهای ξ ، Ω و r بر روی نقشه‌ی پایداری به ترتیب در شکل ۴، ۵، ۶ و ۷ نشان داده شده است.

شکل ۴ و شکل ۵ نشان می‌دهند که افزایش مقدار ξ و Ω نه تنها سبب افزایش ناحیه‌ی ناپایدار در صفحه‌ی $\alpha - \gamma$ می‌شود، بلکه افزایش کافی این مقادیر سبب ظهور زبانه‌ای ناپایدار در این صفحه می‌شود. همچنین ملاحظه می‌شود که با افزایش هر یک از مقادیر ξ یا Ω ، منحنی مرز پایداری دینامیکی ورق تحت اثر جسم صلب نوسان‌کننده‌ی متحرک به منحنی مرز پایداری دینامیکی ورق تحت اثر دو جرم نقطه‌ای متحرک متصل با یک میله‌ی صلب و با دوره‌ی تناوب عبور از روی ورق $T_p = (a + L_0)/V$ میل می‌کند. این نتیجه مبین این واقعیت فیزیکی است که در نتیجه‌ی افزایش بسیار مقادیر ξ یا Ω ، اتصال دو جرم M_1 و M_2 در شکل ۲ به اتصال صلب نزدیک شده و جسم متحرک نوسان‌کننده به دو جرم نقطه‌ای متحرک متصل با یک میله‌ی صلب تبدیل می‌شود.

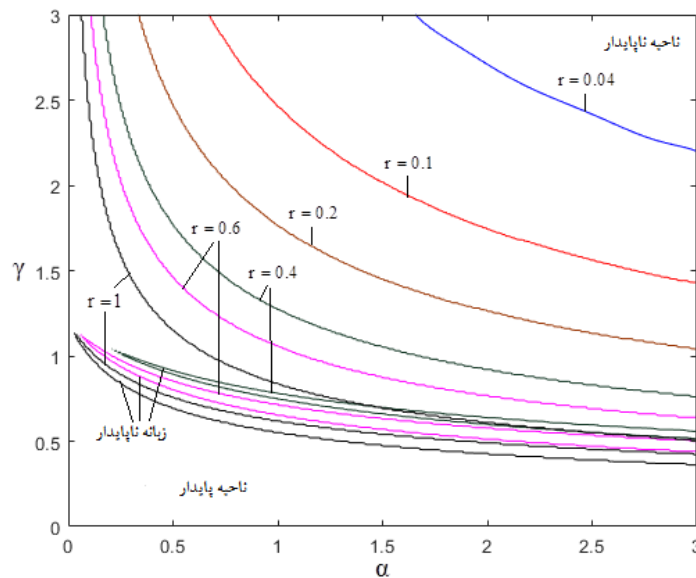


شکل ۵ اثر پارامتر Ω بر روی نقشه‌ی پایداری ورق تحت اثر جسم صلب نوسان‌کننده‌ی متحرک.
($r = 0.04, \xi = 1, L_0 = 1m$)



شکل ۴ اثر پارامتر ξ بر روی نقشه‌ی پایداری ورق تحت اثر جسم صلب نوسان‌کننده‌ی متحرک.
($r = 0.04, \Omega = 10, L_0 = 1m$)

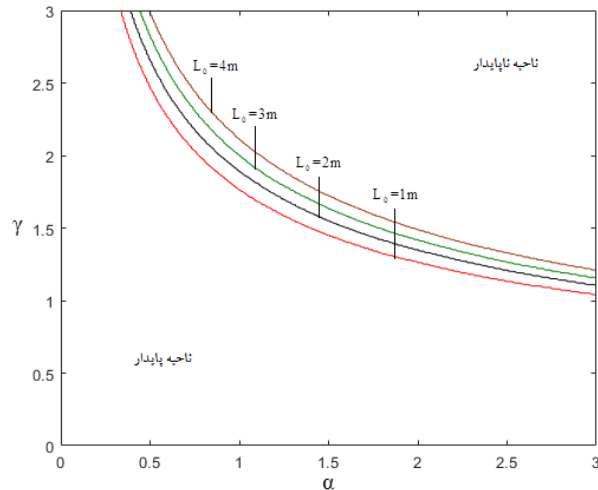
در شکل ۶، اثر تغییر نسبت جرم r بر روی نقشه‌ی پایداری بررسی شده است.



شکل ۶ اثر پارامتر r بر روی نقشه‌ی پایداری ورق تحت اثر جسم صلب نوسان‌کننده‌ی متحرک.
($\Omega = 10, \xi = 1, L_0 = 1m$)

نتایج نشان می‌دهند که با افزایش نسبت جرم هر دو چرخ به جرم کل جسم متحرک، ناحیه‌ی ناپایدار افزایش یافته و برای مقادیر $r = 0.4$ و $r = 0.6$ و $r = 1$ زبان‌ی ناپایدار نیز به سطح ناحیه‌ی ناپایدار در صفحه‌ی $\gamma - \alpha$ افزوده می‌شود. منحنی $r = 1$ مبین حالتی است که مجموع جرم دو چرخ با جرم کل جسم متحرک برابر می‌شود و یا به عبارت دیگر جرم شاسی M_2 صفر شده و جسم صلب نوسان‌کننده‌ی متحرک به دو جرم نقطه‌ای به فاصله‌ی L_0 از هم تبدیل می‌شود. مقایسه‌ی منحنی $r = 1$ با منحنی مرز پایداری مربوط به ورق تحت اثر دو جرم نقطه‌ای متحرک به فاصله‌ی $L_0 = 1m$ و با دوره‌ی تناوب عبور از روی ورق $T_p = (a + L_0)/V$ نشان می‌دهد که این دو منحنی کاملاً برهم منطبق هستند.

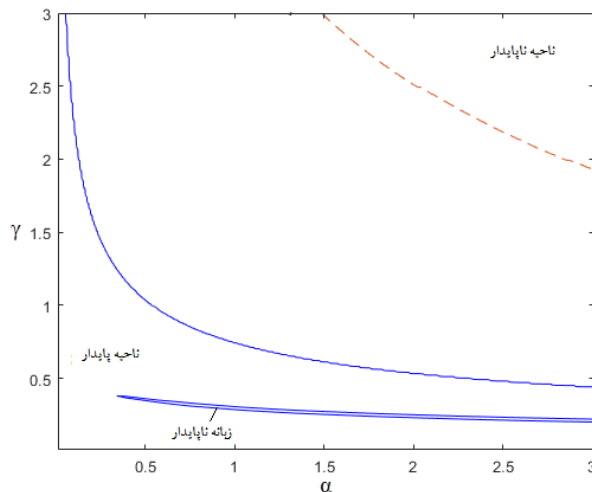
در شکل ۷ اثر تغییر طول جسم صلب متحرک L_0 بر روی نقشه‌ی پایداری بررسی شده است.



شکل ۷ اثر پارامتر L_0 بر روی نقشه‌ی پایداری ورق تحت اثر جسم صلب نوسان‌کننده‌ی متحرک.
 $(r = 0.2, \xi = 1, \Omega = 10)$

بر خلاف نتایج شکل ۴، ۵ و ۶ که نشان می‌دهند که افزایش هر یک از پارامترهای ξ ، Ω ، r سبب افزایش ناحیه‌ی ناپایدار می‌شود، شکل ۷ نشان می‌دهد که افزایش طول جسم صلب L_0 سبب تقویت پایداری دینامیکی سیستم و کاهش ناحیه‌ی ناپایدار می‌شود.

به منظور بررسی اثر شیوه‌ی مدل‌سازی جسم متحرک بر روی نتایج آنالیز پایداری دینامیکی سیستم ورق - جسم متحرک، در شکل ۸ مقایسه‌ی بین نتایج آنالیز پایداری دینامیکی حاصل از در نظر گرفتن این دو مدل نشان داده شده است. برای مدل جسم صلب نوسان‌کننده مقادیر $r = 0.04, \Omega = 20, \xi = 1, L_0 = 1m$ در نظر گرفته شده است.

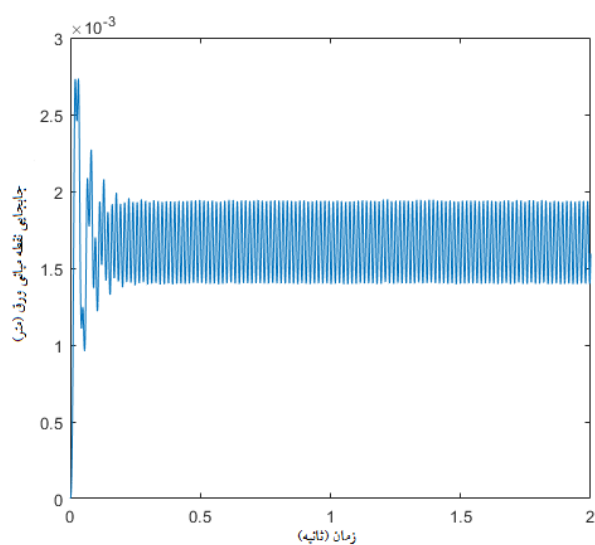


شکل ۸ مقایسه‌ی بین نتایج آنالیز پایداری دینامیکی حاصل از دو مدل جرم نقطه‌ای متحرک (خط ممتد) و جسم صلب نوسان‌کننده‌ی متحرک با مشخصه‌ی $(r = 0.04, \Omega = 20, \xi = 1, L_0 = 1m)$ (خط چین)

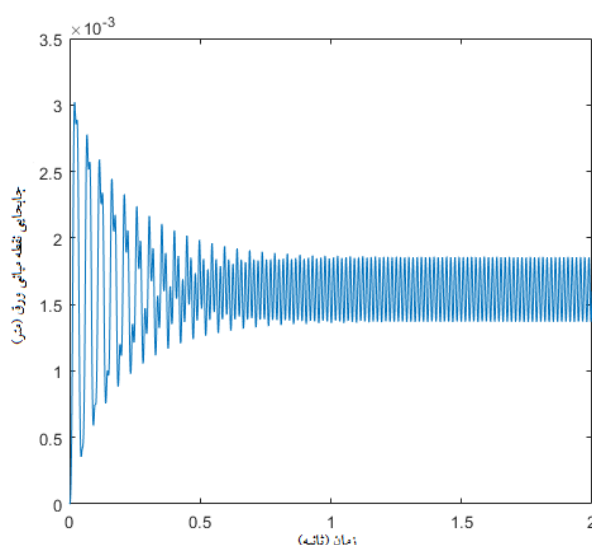
تفاوت بین منحنی مرز بین نواحی پایدار به دست آمده از هر دو مدل جسم متحرک، مبین اثر قابل ملاحظه‌ی شیوه‌ی مدل‌سازی جسم متحرک بر روی نتایج آنالیز پایداری دینامیکی سیستم ورق - جسم متحرک و اهمیت انتخاب مدل مناسب برای جسم متحرک برای به دست آوردن نتایج صحیح در آنالیز پایداری است.

۷- صحت سنجی

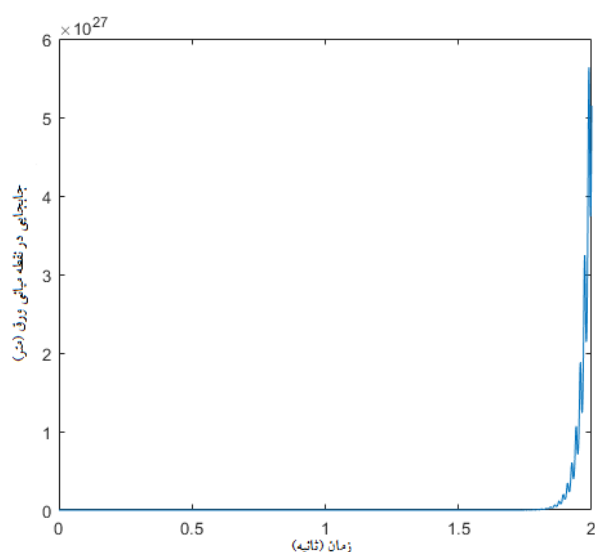
به منظور بررسی صحت نتایج، به عنوان نمونه، نتایج شکل ۴ با به کارگیری معادله‌ی ۱۴ و از طریق شبیه‌سازی پاسخ دینامیکی نقطه‌ی میانی ورق بررسی شده است. در شکل ۴ اثر میرایی سیستم تعلیق بر روی شرایط پایداری سیستم مورد بررسی قرار گرفته است. به عنوان مثال، شکل ۴ نشان می‌دهد که سیستم ورق - جسم صلب نوسان کننده متحرک به ازای هر یک از مقادیر نسبت میرایی سیستم تعلیق $\xi = 0.25, 1.5$ تحت عبور متوالی جسم‌های صلب با مشخصه‌ی منتخب ($\alpha = 1.5, \gamma = 1.5$) دارای ارتعاشات پایدار است در حالی که اگر به ازای همین مشخصه‌ی جسم متحرک، نسبت میرایی سیستم تعلیق یکی از مقادیر $\xi = 10, 20$ و یا $\xi \rightarrow \infty$ باشد، سیستم ناپایدار بوده و دچار ارتعاشات فزاینده خواهد شد. جهت تأیید این نتیجه، شبیه‌سازی پاسخ دینامیکی نقطه‌ی میانی ورق برای مشخصه‌ی ($\alpha = 1.5, \gamma = 1.5$) جسم متحرک، به ازای مقادیر نسبت میرایی $\xi = 0.25, \xi = 5, \xi = 10, \xi = 20$ و $\xi \rightarrow \infty$ انجام شده و نتایج به ترتیب در شکل‌های (۹-الف)، (۹-ب)، (۹-ج)، (۹-د)، (۹-ر) و (۹-ز) ارائه شده‌اند.



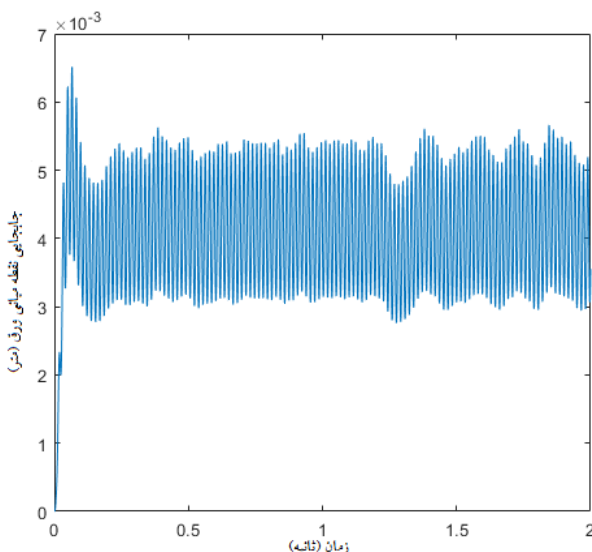
(ب)



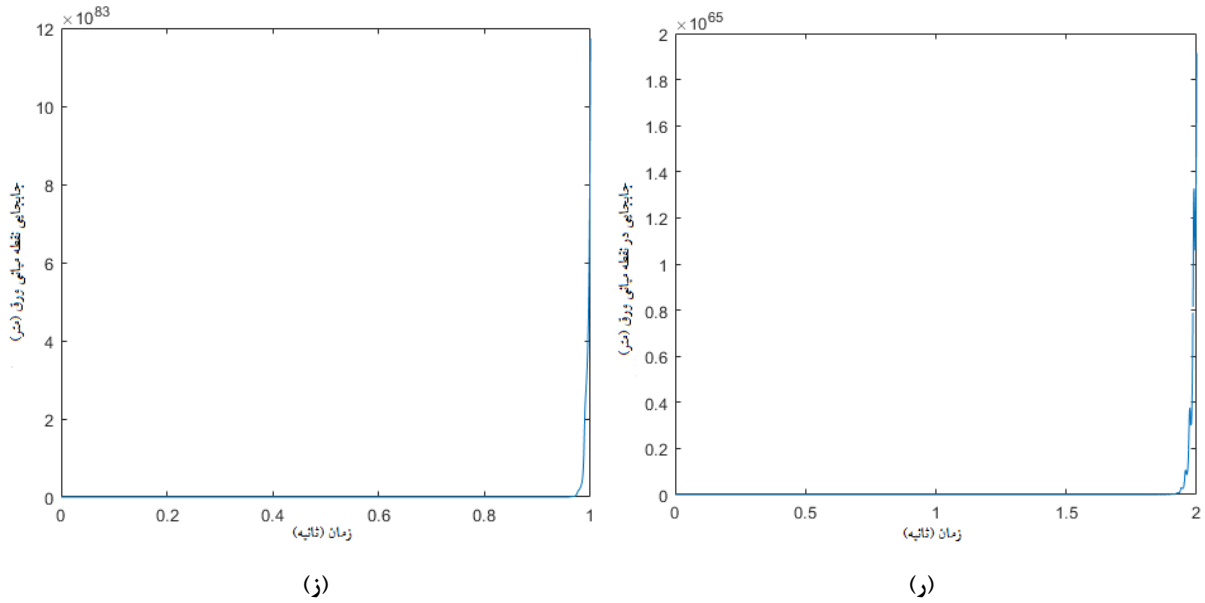
(الف)



(د)



(ج)

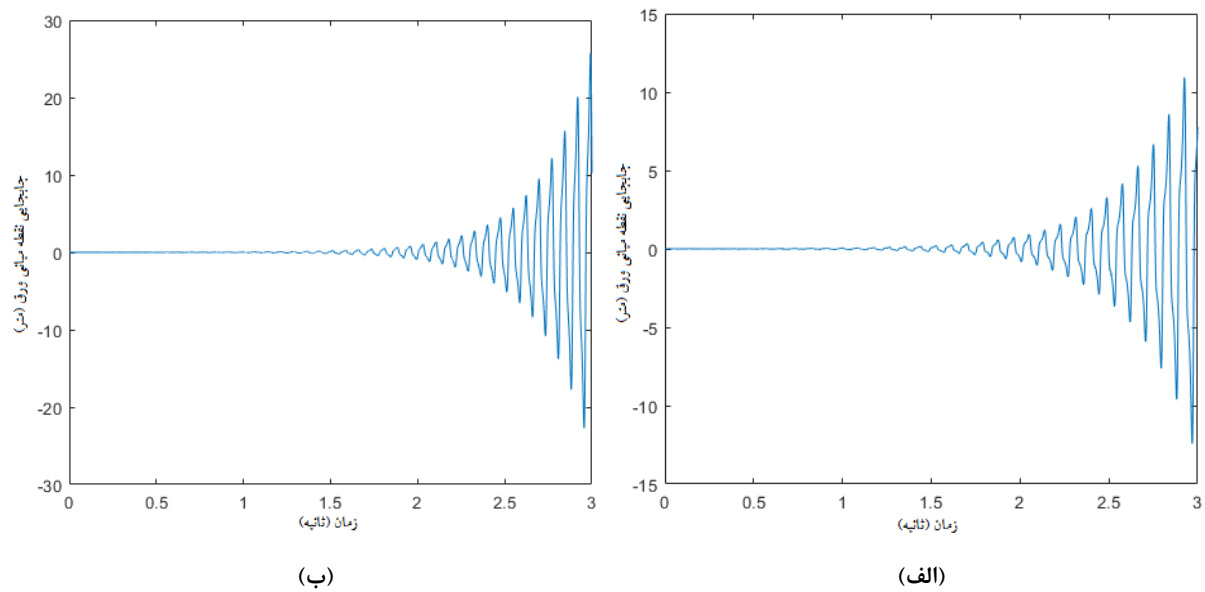


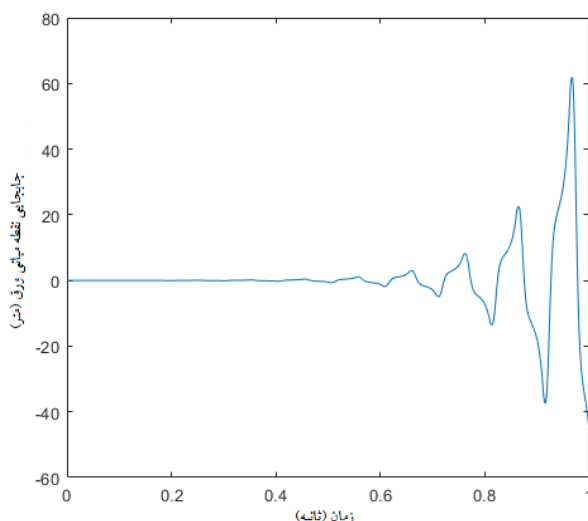
شکل ۹ شبیه‌سازی پاسخ دینامیکی نقطه‌ی میانی ورق ($r = 0.04, \Omega = 10, L_0 = 1m, \alpha = 1.5, \gamma = 1.5$)

الف ($\xi = 0.25$)، ب ($\xi = 1$)، ج ($\xi = 5$)، د ($\xi = 10$)، ر ($\xi = 20$)، ز ($\xi \rightarrow \infty$)

همان‌گونه که در شکل ۹ ملاحظه می‌شود پاسخ برای مقادیر $\xi = 0.25, 1, 5$ محدود و پایدار و برای مجموعه مقادیر $\xi = 10, 20$ و $\xi \rightarrow \infty$ پاسخ فزاینده و ناپایدار است و به‌این ترتیب نتایج به‌دست آمده در شکل ۴ مورد تأیید قرار می‌گیرد.

همچنین شکل ۴ نشان می‌دهد که با افزایش نسبت میرایی، به ازای مقادیر $\xi = 10$ ، $\xi = 20$ و $\xi \rightarrow \infty$ یک زبانه‌ی ناپایدار در صفحه‌ی پارامترها ظاهر می‌شود. بر این اساس به‌منظور تأیید شکل‌گیری زبانه‌ی ناپایدار، برای مشخصه‌های $(\alpha = 2.2, \gamma = 0.55)$ ، $(\alpha = 1.1, \gamma = 0.65)$ و $(\alpha = 2.3, \gamma = 0.47)$ که به ترتیب در شکل ۴ در زبانه‌ی ناپایدار مربوط به $\xi = 10$ ، $\xi = 20$ و $\xi \rightarrow \infty$ واقع هستند، شبیه‌سازی پاسخ دینامیکی نقطه‌ی میانی ورق انجام شده و نتایج در شکل ۱۰ ارائه شده‌اند.





(ج)

شکل ۱۰ شبیه‌سازی پاسخ دینامیکی نقطه‌ی میانی ورق ($r = 0.04, \Omega = 10, L_0 = 1m$)
 الف) $\xi = 10, \alpha = 2.2, \gamma = 0.55$ ، ب) $\xi = 20, \alpha = 1.1, \gamma = 0.65$ ، ج) $\xi \rightarrow \infty, \alpha = 2.3, \gamma = 0.47$

همانگونه که ملاحظه می‌شود شکل ۱۰ ناپایداری ورق در نقاط منتخب را نشان می‌دهد و به‌این ترتیب نتایج به‌دست‌آمده برای وجود زبانه‌های ناپایدار در شکل ۴ مورد تأیید قرار گرفته است.

۸- جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

در این پژوهش، با استفاده از روش تئوری فلاکه پایداری یک ورق نازک مستطیلی تحت اثر عبور متناوب جسم‌های متحرک مورد بررسی قرار گرفته است. جسم متحرک به‌صورت یک جسم صلب با طول معین که از هر دو انتها از طریق یک سیستم تعلیق یکسان به چرخ می‌متصل می‌شود، مدل‌سازی شده است. معادلات دیفرانسیل متغیر با زمان حاکم بر ارتعاشات سیستم با استفاده از روش مودهای فرضی به‌دست‌آمده‌اند و نتایج آنالیز پایداری دینامیکی سیستم از طریق تعیین مرز بین نواحی پایدار و ناپایدار در صفحه‌ی پارامترهای سیستم معرفی شده‌اند. اثر سختی و میرایی سیستم تعلیق، نسبت جرم هر دو چرخ به جرم کل جسم متحرک و طول جسم متحرک بر روی مرز بین نواحی پایدار و ناپایدار بررسی شده است. به‌منظور بررسی اثر شیوه‌ی مدل‌سازی جسم متحرک بر روی نتایج آنالیز پایداری دینامیکی، نتایج آنالیز پایداری ورق حاصل از دو مدل جرم نقطه‌ای متحرک و مدل جسم صلب نوسان کننده‌ی متحرک با هم مقایسه شده و اثر شیوه‌ی مدل‌سازی جسم متحرک بر روی نتایج بررسی شده است. نتایج بدست آمده را به شرح زیر می‌توان جمع‌بندی کرد:

- نتایج اثر قابل‌ملاحظه‌ی پارامترهای سختی و میرایی سیستم تعلیق، نسبت جرم چرخ به جرم شاسی و طول جسم صلب نوسان کننده‌ی متحرک بر روی نتایج آنالیز پایداری دینامیکی را نشان می‌دهند.
- افزایش میرایی دمپر یا سختی فنر سیستم تعلیق و افزایش نسبت جرم چرخ به جرم کل جسم متحرک سبب رشد ناحیه‌ی ناپایدار و تضعیف پایداری سیستم می‌شود.
- افزایش کافی در هر یک از مقادیر میرایی دمپر، سختی فنر سیستم تعلیق و یا نسبت جرم هر دو چرخ به جرم کل جسم متحرک سبب ظهور زبانه‌ای ناپایدار و افزوده شدن آن به ناحیه‌ی ناپایدار می‌شود.
- ملاحظه می‌شود که افزایش طول جسم صلب سبب تقویت پایداری دینامیکی سیستم و کاهش ناحیه‌ی ناپایدار می‌شود.
- مقایسه‌ی بین نتایج پایداری دینامیکی به‌دست‌آمده برای سیستم ورق-جسم متحرک حاصل از هر دو مدل جرم نقطه‌ای متحرک و جسم صلب نوسان کننده‌ی متحرک نشان می‌دهد که شیوه‌ی مدل‌سازی جسم متحرک اثر قابل‌ملاحظه‌ای بر روی نتایج آنالیز پایداری دینامیکی سیستم داشته و عدم انتخاب مدل مناسب برای جسم متحرک سبب به دست آمدن نتایج نادرست در آنالیز پایداری می‌شود.

- [1] Yang Y-B, Yau JD, Yao Z, Wu YS. Vehicle-bridge interaction dynamics: with applications to high-speed railways: World Scientific, 2004.
- [2] Gerdemeli I, Esen I, Özer D. Dynamic response of an overhead crane beam due to a moving mass using moving finite element approximation. *Trans Tech Publ.* p. 99-102.
- [3] Shiau TN, Huang KH, Wang FC, Hsu WC. Dynamic response of a rotating multi-span shaft with general boundary conditions subjected to a moving load. *Journal of sound and vibration.* 2009;323:1045-60.
- [4] Nelson HD, Conover RA. Dynamic stability of a beam carrying moving masses. 1971.
- [5] Aldraihem OJ, Baz A. Dynamic stability of stepped beams under moving loads. *Journal of sound and vibration.* 2002;250:835-48.
- [6] Mackertich S. Dynamic stability of a beam excited by a sequence of moving mass particles (L). *The Journal of the Acoustical Society of America.* 2004;115:1416-9.
- [7] Visweswara Rao G. Linear dynamics of an elastic beam under moving loads. *J Vib Acoust.* 2000;122:281-9.
- [8] Sun Z. Moving-inertial-loads-induced dynamic instability for slender beams considering parametric resonances. *Journal of Vibration and Acoustics.* 2016;138:011014.
- [9] Ghomeshi Bozorg M, Keshmiri M. Stability Analysis of a Beam Under the Effect of Moving Masses Using Homotopy Perturbation Method. *Computational Methods in Engineering.* 2015;34:79-95.
- [10] Nikkhoo A, Rofooei FR. Parametric study of the dynamic response of thin rectangular plates traversed by a moving mass. *Acta Mechanica.* 2012;223:15-27.
- [11] Rofooei FR, Enshaeian A, Nikkhoo A. Dynamic response of geometrically nonlinear, elastic rectangular plates under a moving mass loading by inclusion of all inertial components. *Journal of sound and vibration.* 2017;394:497-514.
- [12] Amiri JV, Nikkhoo A, Davoodi MR, Hassanabadi ME. Vibration analysis of a Mindlin elastic plate under a moving mass excitation by eigenfunction expansion method. *Thin-Walled Structures.* 2013;62:53-64.
- [13] Esen I. A new finite element for transverse vibration of rectangular thin plates under a moving mass. *Finite Elements in Analysis and Design.* 2013;66:26-35.
- [14] Ghazvini T, Nikkhoo A, Allahyari H, Zalpul M. Dynamic response analysis of a thin rectangular plate of varying thickness to a traveling inertial load. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering.* 2016;38:403-11.
- [15] Hassanabadi ME, Attari KA, Nikkhoo A, Mariani S. Resonance of a rectangular plate influenced by sequential moving masses. *Coupled Systems Mechanics.* 2016;5:87-100.
- [16] Rofooei FR, Nikkhoo A. Application of active piezoelectric patches in controlling the dynamic response of a thin rectangular plate under a moving mass. *International Journal of Solids and structures.* 2009;46:2429-43.
- [17] Nikkhoo A, Hassanabadi ME, Azam SE, Amiri JV. Vibration of a thin rectangular plate subjected to series of moving inertial loads. *Mechanics Research Communications.* 2014;55:105-13.
- [18] Torkan E, Pirmoradian M, Hashemian M. Stability analysis of transverse vibrations of rectangular plates under periodic passage of moving masses. *Journal of Mechanical Engineering and Vibration.* 2017;8:18-26.

- [19] Torkan E, Pirmoradian M, Hashemian M. Instability inspection of parametric vibrating rectangular Mindlin plates lying on Winkler foundations under periodic loading of moving masses. *Acta Mechanica Sinica*. 2019;35:242-63.
- [20] Pirmoradian M, Karimpour H. Nonlinear effects on parametric resonance of a beam subjected to periodic mass transition. *Modares Mechanical Engineering*. 2017;17:284-92.
- [21] Chakraverty S. *Vibration of plates*: CRC press, 2008.
- [22] d'Angelo H. *Linear time-varying systems: analysis and synthesis*: Allyn and Bacon, 1970.