

# Deflection analysis of composite micro-beam on elastic foundation by strain gradient theory

Saeed Jafari Mehrabadi<sup>a\*</sup>, Alireza Nezamabadi<sup>a</sup>, Ehsan Moayeedi<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Department of Mechanical Engineering, Islamic Azad University, Arak Branch, Arak, Iran

## Original Article

Use your device to scan  
and read the article online



**Citation:** Jafari Mehrabadi S, Nezamabadi A, Moayeedi E. Deflection analysis of composite micro-beam on elastic foundation by strain gradient theory. *Mechanics of Advanced and Smart Materials*. 2022;2(1):94-107.

 <https://10.52547/masm.2.1.94>

## KEYWORDS

strain gradient theory,  
Functionally graded material,  
elastic foundation.

## ABSTRACT

In this article bending analysis of composite Euler-Bernoulli micro-beam made of functionally graded materials resting on elastic foundation by strain gradient theory has been studied. The material properties of structure have been assumed by Reddy's power law model such as the bottom layer and top layer being ceramic and metal material respectively. At first, by using the assumptions of elasticity strain gradient theory and calculating the total potential energy of system after determining the work of external distributed load by using the Hamilton's principal the equations of motion have been derived. Note that the work done by the Winkler elastic foundation is considered. Because the solutions of mentioned equations are not possible by analytical method, the equations have been solved by generalized differential quadrature method in simply supported boundary conditions. By comparing the answers of problem with other published references, we confident form the obtained results. At the end, effect of material length scale and power law index coefficient of functionally graded materials and stiffness of elastic foundation on deflection of micro-beam has been studied.

## Extended Abstract

### 1. Modeling of problem and governing differential equations

Suppose that, as shown in Fig. 1 micro-beam under distributed force  $q(x)$  resting on elastic foundation is located in simply supported boundary conditions. The main problem is determination of beam deflection based on Euler-Bernoulli assumptions and strain gradient theory. For this purpose the equations of motions have derived by variational method and Hamilton's principal. At first the total energy of system is written as equation 1.

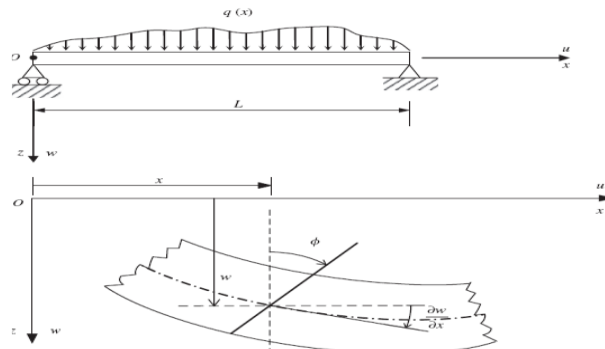


Figure 1. micro-beam under distributed force  $q(x)$

\* Corresponding author. Tel.: 09181604313; Fax: 08633412535

E-mail address: [s.farhadi@uok.ac.ir](mailto:s.farhadi@uok.ac.ir)

DOI: <https://10.52547/masm.2.1.94>

Received: April 25, 2022; Received in revised form: May 16, 2022; Accepted: May 17, 2022

2022 Published by Arak University Press. All rights reserved.



$$U = \frac{1}{2} \int_V (\sigma : \varepsilon + m : \chi + P : \gamma + \tau : \eta) dv \quad (1)$$

In which,  $\sigma$  is Cauchy stress tensor,  $\varepsilon$  and  $m$  are strain and couple stress tensor respectively. Also,  $\chi$  and  $P$  are symmetric part of rotation gradient tensor and higher order stress tensor.  $\gamma$  is the dilatation of gradient tensor. After calculating the mentioned parameters the final relation of total strain energy can be written as:

$$\delta U = \int_0^L \int_A \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} \left[ \frac{\partial \delta u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \right] + 2m_{xy} \left[ -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \right] \\ + p_1 \left[ \frac{\partial^2 \delta u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^3 \delta w}{\partial x^3} \right] + p_3 \left[ -\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \right] \\ + \tau_{111} \left[ \frac{2}{5} \frac{\partial^2 \delta u}{\partial x^2} - \frac{2}{5} z \frac{\partial^3 \delta w}{\partial x^3} \right] + \tau_{113} \left[ -\frac{4}{15} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \right] \\ + \tau_{122} \left[ -\frac{1}{5} \frac{\partial^2 \delta u}{\partial x^2} + \frac{1}{5} z \frac{\partial^3 \delta w}{\partial x^3} \right] + \tau_{131} \left[ -\frac{4}{15} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \right] \\ + \tau_{133} \left[ -\frac{1}{5} \frac{\partial^2 \delta u}{\partial x^2} + \frac{1}{5} z \frac{\partial^3 \delta w}{\partial x^3} \right] + \tau_{212} \left[ -\frac{1}{5} \frac{\partial^2 \delta u}{\partial x^2} + \frac{1}{5} z \frac{\partial^3 \delta w}{\partial x^3} \right] \\ + \tau_{221} \left[ -\frac{1}{5} \frac{\partial^2 \delta u}{\partial x^2} + \frac{1}{5} z \frac{\partial^3 \delta w}{\partial x^3} \right] + \tau_{223} \left[ \frac{1}{15} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \right] \\ + \tau_{232} \left[ \frac{1}{15} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \right] + \tau_{311} \left[ -\frac{4}{15} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \right] \\ + \tau_{313} \left[ -\frac{1}{5} \frac{\partial^2 \delta u}{\partial x^2} + \frac{1}{5} z \frac{\partial^3 \delta w}{\partial x^3} \right] + \tau_{322} \left[ \frac{1}{15} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \right] \\ + \tau_{331} \left[ -\frac{1}{5} \frac{\partial^2 \delta u}{\partial x^2} + \frac{1}{5} z \frac{\partial^3 \delta w}{\partial x^3} \right] + \tau_{333} \left[ \frac{1}{5} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \right] \end{array} \right\} dAdx \quad (2)$$

Now by applying the basic theorem in calculus of variation or Euler-Lagrange equations to above relation, the equilibrium equations of system in terms of displacements are:

$$\begin{aligned} Q_{11}(z)A \frac{d^2 u}{dx^2} - 2\mu(z)l_0^2 A \frac{d^4 u}{dx^4} - \frac{4}{5}\mu(z)l_1^2 A \frac{d^4 u}{dx^4} &= 0 \\ Q_{11}(z)I \frac{d^4 w}{dx^4} + \mu(z)l_2^2 A \frac{d^4 w}{dx^4} - 2\mu(z)l_0^2 I \frac{d^6 w}{dx^6} + 2\mu(z)l_0^2 A \frac{d^4 w}{dx^4} - \frac{12}{15}\mu(z)l_1^2 I \frac{d^6 w}{dx^6} \\ + \frac{8}{15}\mu(z)l_1^2 A \frac{d^4 w}{dx^4} - q - k_v w &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Since, solving the above equations in simply supported boundary conditions by generalized differential equations quadrature method the deflection of micro-beam has determined.

## 2. Conclusion

Due to the lack of material length scale parameter in classical elasticity theory, this theory cannot interpret the size effect in micro-scale. Therefore we have to use the higher order theories such as modified strain gradient theory or modified stress theory. These theories contain the material length scale parameters in addition to the elasticity constants. So that, the strain gradient theory included the three additional parameters and shows the dependence size of structure.

In this paper the effect of material length scale parameters on the deflection of smart Euler-Bernoulli micro-beam has been studied. Solving the problem leads to the following results:

- 1- Increasing the stiffness of elastic foundation, the deflection of micro-beam decreases. Because the stiffness of structure increases.
- 2- In the non-classic theory of elasticity, when the thickness of micro-beam is closer to the material length scale parameters, dependency of size effect becomes more important.
- 3- With increasing the material length scale parameter the deflection of micro-beam increases and finally reaches to the values of classical theory of elasticity. This phenomenon is due to by increasing the material scale parameter the dimensions of micro-beam are closer to the macro-scale and the results of micro and macro are closer to each other.
- 4- By increasing the power index coefficient of functionally graded material the deflection of micro-beam increases, because the stiffness of structure increases.

- 5- Obtained deflection based on the classical theory is more than obtained deflection from the couple stress theory. Also, Obtained deflection based on the couple stress theory is more than the obtained deflection based on the strain gradient theory. This difference of the results increases by increasing the non-dimensional parameter  $h/l$ .



## تحلیل خیز میکرو تیر کامپوزیت روی بستر الاستیک به کمک تئوری گرادیان کرنش

سعید جعفری مهرآبادی<sup>الف\*</sup>، علیرضا نظام آبادی<sup>ب</sup>، احسان مویدی<sup>ج</sup>

<sup>الف</sup> استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد اراک، اراک، ایران، [s-jafari@iau-arak.ac.ir](mailto:s-jafari@iau-arak.ac.ir)  
<sup>ب</sup> استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد اراک، اراک، ایران، [a-nezamabadii@iau-arak.ac.ir](mailto:a-nezamabadii@iau-arak.ac.ir)  
<sup>ج</sup> کارشناسی ارشد، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد اراک، اراک، ایران، [ehsan@gmail.com](mailto:ehsan@gmail.com)

چکیده	واژگان کلیدی
در این مقاله، تحلیل خمش میکرو تیر ساخته شده از مواد تابعی مدرج روی بستر الاستیک با استفاده از تئوری گرادیان کرنش با به کارگیری مدل تیر اویلر-برنولی مورد مطالعه قرار گرفته است. برای این منظور ابتدا با استفاده از مفروضات تئوری الاستیسیته‌ی گرادیان کرنش و اصل همپلتون پس از مشخص نمودن ترم‌های انرژی پتانسیل سازه و کار نیروی خارجی، معادلات حرکت به دست آورده شده است. از آنجا که حل تحلیلی معادلات مذکور امکان پذیر نبوده است برای حل آن‌ها از روش عددی دیفرانسیل مربعی تعمیم یافته در شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده استفاده شده است. پس از آن به منظور اعتبار سنجی، از مقایسه نتایج به دست آمده با مراجع معتبر دیگر از صحت کار نیز اطمینان کافی حاصل شده است. در ادامه اثر پارامترهای مختلف از قبیل ضریب مقیاس طول و ضریب اندیس توانی ماده مدرج تابعی و ضرایب بستر الاستیک بر خیز تیر مورد بحث و بررسی قرار گرفته است.	تئوری گرادیان کرنش، ماده تابعی مدرج، میکرو تیر، بستر الاستیک.
	تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۰۲/۰۵
	تاریخ بازنگری: ۱۴۰۱/۰۲/۲۶
	تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۰۲/۲۷

### ۱- مقدمه

سیستم‌های با مقیاس میکرون و زیر میکرون، را می‌توان یک محیط میکروپولار در نظر گرفت. آزمایش‌های مختلف نشان داده است که رفتار تغییر شکل در این گونه از سیستم‌ها به اندازه بستگی داشته و این وابستگی به اندازه به علت حرکت مستقل ریزساختارها می‌باشد. در عین حال که تئوری الاستیسیته کلاسیک<sup>۱</sup> به طور موفق برای حل بسیاری از مسائل مهندسی مورد استفاده قرار می‌گیرد، به علت فقدان پارامتر مقیاس طول در مدل ساختاری محیط پیوسته، از توصیف اثر مربوط به ریزساختارها عاجز می‌باشد. با این حال این وابستگی به اندازه می‌تواند به طور موفق با به کارگیری تئوری‌های تعمیم یافته از جمله تئوری تنش کوپل اصلاح شده<sup>۲</sup> و یا تئوری الاستیسیته‌ی گرادیان کرنش<sup>۳</sup> مدل شود که در آن‌ها پارامترهای مقیاس طول مادی علاوه بر ثوابت الاستیسیته در روابط مربوطه ظاهر می‌شوند. تئوری تنش کوپل کلاسیک<sup>۴</sup> در سال‌های ۱۹۶۲ تا ۱۹۶۵ توسط میندلین توپین و کوپتر [۳-۱] ارائه شد و برای مواد الاستیک ایزوتروپ شامل چهار ثابت مادی می‌باشد که دو تای آن‌ها ثابت‌های الاستیک و دو تای دیگر پارامترهای مقیاس طول هستند. در حقیقت دو ثابت اضافی در این تئوری مربوط به ریزساختارها بوده و با توجه به

<sup>۱</sup> Classical Elasticity Theory

<sup>۲</sup> Modified Couple Stress Theory

<sup>۳</sup> Elasticity Strain Gradient Theory

<sup>۴</sup> Classical Couple Stress Theory

مشکلات موجود در تعیین این پارامترها، تئوری جدیدی توسط یانگ [۴] در سال ۲۰۰۲ ارائه شد که تئوری تنش کوپل اصلاح شده نامیده شد. مزیت این تئوری بر تئوری تنش کوپل کلاسیک آن است که مدل ساختاری محیط پیوسته در این تئوری شامل یک پارامتر مقیاس طول مادی می‌باشد و همین مزیت سبب شده که این تئوری در پیش‌بینی اثر اندازه در ریزساختارها، بهتر و راحت‌تر مورد استفاده قرار گیرد. در سال‌های اخیر برخی محققین، تئوری تنش کوپل اصلاح شده را در تحلیل سازه‌های مکانیکی از قبیل تیرهای نازک، ورقه‌ای با ضخامت بسیار کم و غیره اعمال کرده‌اند. به‌عنوان نمونه پارک [۵] در سال ۲۰۰۶، تئوری تنش کوپل اصلاح شده را در تحلیل استاتیکی تیر نازک با مدل اویلر برنولی<sup>۵</sup> اعمال کرد و نشان داد که خیز استاتیکی و سفتی خمشی تیر، در صورتی که ابعاد تیر در مقیاس میکرون باشد، به‌طور قابل توجهی به اندازه تیر وابسته می‌باشد. همچنین کونگ [۶] اثر ابعاد هندسی سازه را بر فرکانس‌های طبیعی تیر نازک اویلر برنولی در شرایط مرزی مختلف بررسی نمود. در ادامه تحقیقات مذکور ردی در سال ۲۰۰۸ [۷]، بار دیگر تئوری تنش کوپل اصلاح شده را در تیر نازک با مدل تیموشینکو<sup>۶</sup> بکار گرفت و اثر حرکت مستقل ریزساختارها را در رفتار استاتیکی و دینامیکی تیر مورد بررسی قرار داده و نتایج حاصل از تئوری تنش کوپل اصلاح شده را با نتایج به‌دست آمده از تئوری الاستیسیته کلاسیک مورد مقایسه قرار داد. در ادامه تحقیقات مختلف در این زمینه انصاری و همکارانش [۸] به تحلیل رفتار ارتعاشی میکرو تیر پیژو الکتریک بر اساس تئوری تنش کوپل اصلاح شده پرداختند و موفق به حل دقیق معادلات حاکم بر اساس تئوری تنش کوپل اصلاح شده مطابق با تئوری‌های تیموشینکو و اویلر برنولی شدند. در این کار معادلات حاکم بر حرکت را از اصل همپلتون<sup>۷</sup> به دست آورده شد و حل آن‌ها در شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده با استفاده از روش ناپیر<sup>۸</sup> انجام شد. تجلی و رهایی فرد [۹] رفتار مکانیکی میکرو تیر تابعی مدرج را با استفاده از تئوری گرادیان کرنش بررسی کرده‌اند. در این تحلیل از مدل تیر تیموشینکو با در نظر گرفتن سه پارامتر مقیاس طول استفاده شد. به‌منظور به دست آوردن معادلات دیفرانسیل حرکت از اصل هامپلتون استفاده شد و در نهایت پاسخ استاتیکی و دینامیکی سازه در قالب نمودارها و جداول مختلف مورد بحث و بررسی قرار گرفت. نتیجه نهایی در این تحقیق این شد که تئوری گرادیان کرنش نتایج بسیار بهتری ارائه نموده و با کاهش نسبت ضخامت به پارامتر مقیاس طول اختلاف نتایج حاصل از دو تئوری افزایش یافته است. انصاری و غلامی [۱۰] رفتار کماتش و خمش و همچنین ارتعاش میکرو تیر تابعی مدرج را با استفاده از عمومی‌ترین حالت تئوری گرادیان کرنش مورد بررسی قرار دادند. در این تحلیل از مدل تیر تیموشینکو با در نظر گرفتن سه پارامتر مقیاس طول استفاده شد. به‌منظور به دست آوردن معادلات حاکم از اصل هامپلتون استفاده شد و معادلات به‌دست آمده از روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته<sup>۹</sup> حل شدند. پس از بررسی رفتار استاتیکی و دینامیکی سازه دریافتند که به‌کارگیری عمومی‌ترین حالت تئوری گرادیان کرنش، کمترین خیز ماکزیمم را نسبت به دیگر تئوری‌ها داشته و با افزایش پارامتر مقیاس طول بی‌بعد، منحنی خیز میکروتیر به حالت کلاسیک نزدیک‌تر می‌شود. به‌عنوان تحقیقی دیگر در این زمینه به مقاله محمدی و همکارش [۱۱] می‌توان اشاره کرد که در آن کماتش حرارتی تیر اویلر-برنولی در ابعاد میکرو را با در نظر گرفتن اثرات دما و با استفاده از تئوری گرادیان کرنش بهبود یافته مورد مطالعه قرار دادند. در این مقاله از روابط کرنش تغییر مکان غیرخطی فون-کارمن<sup>۱۰</sup> استفاده شده و از جمله نتایج آن سخت‌تر شدن میکروتیر و کاهش بار بحرانی کماتش آن پس از لحاظ نمودن ضرایب مقیاس طول (اثرات اندازه) بوده است.

## ۲- مدل‌سازی مسئله و معادلات دیفرانسیل حاکم بر آن

فرض کنید مطابق شکل ۱ تیری با ابعاد میکرو در شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده تحت اثر بار گسترده  $q(x)$  بر روی تکیه‌گاه الاستیک وینکلر<sup>۱۱</sup> قرار گرفته و هدف تعیین خیز سازه مذکور با در نظر گرفتن فرضیات تیر اویلر-برنولی و استفاده از فرضیات تئوری گرادیان کرنش باشد. از آنجاکه معادلات حرکت با استفاده از اصل هامپلتون به دست آورده خواهند شد در ابتدا به توضیح نوشتن روابط مقدماتی لازم پرداخته می‌شود و پس از آن میدان تغییر مکان در تیر را نوشته و با استفاده از اصول حاکم بر حساب

<sup>5</sup> Euler- Bernouli Model

<sup>6</sup> Timoshenko Model

<sup>7</sup> Hamilton Principle

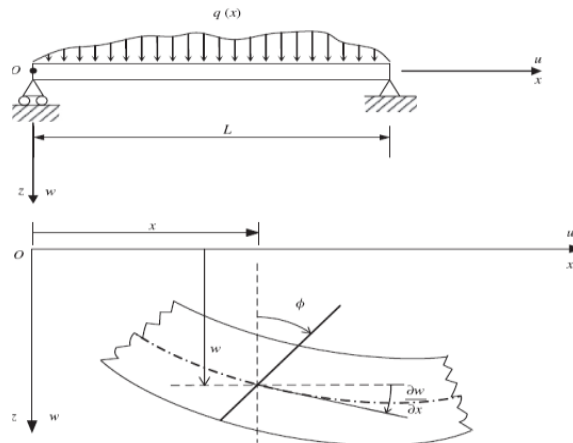
<sup>8</sup> Navier Method

<sup>9</sup> Generalized Differential Quadrature Method

<sup>10</sup> nonlinear von-Karman strain-displacementrelations

<sup>11</sup> Vinkler Elastic Foundation

تغییرات در مسائل مکانیک، معادلات دیفرانسیل حاکم بر مسئله مشخص خواهند شد.



شکل ۱ تیر مورد نظر و محورهای مختصات انتخاب شده برای آن

همان گونه که می دانیم در تئوری الاستیسیته ی گرادیان کرنش رابطه انرژی کرنشی ارتجاعی به فرم زیر نوشته می شود که در آن نماد " " بیانگر ضرب تنسوری دو تنسور مرتبه دوم می باشد:

$$U = \frac{1}{2} \int_v (\sigma : \varepsilon + m : \chi + P : \gamma + \tau : \eta) dv \quad (1)$$

که در رابطه فوق  $\sigma$  تنسور تنش کوشی،  $\varepsilon$  تنسور کرنش،  $m$  تنسور تنش کوپل،  $\chi$  نیز قسمت متقارن تنسور انحنا و  $P$  بردار تنش اتساع،  $\gamma$  بردار گرادیان اتساع و  $\tau$  تنسور تنش دابل انحرافی و  $\eta$  تنسور گرادیان کرنش انحرافی با روابط ذیل معرفی می شوند:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} [\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^T] \quad (2)$$

$$\theta_i = \frac{1}{2} (\text{curl} \vec{u})_i \quad (3)$$

$$\gamma_i = \varepsilon_{mm,i} \quad (4)$$

$$\chi = \frac{1}{2} [\nabla \vec{\theta} + (\nabla \vec{\theta})^T] \quad (5)$$

$$\eta_{ijk} = \frac{1}{3} [\varepsilon_{jki} + \varepsilon_{kij} + \varepsilon_{ij,k}] - \frac{1}{15} \delta_{ij} [\varepsilon_{mm,k} + 2\varepsilon_{mk,m}] - \frac{1}{15} \delta_{jk} [\varepsilon_{mm,i} + 2\varepsilon_{mi,m}] - \frac{1}{15} \delta_{ki} [\varepsilon_{mm,j} + 2\varepsilon_{mj,m}] \quad (6)$$

$$\sigma = \lambda \text{tr}(\varepsilon) I + 2\mu \varepsilon \quad (7)$$

$$P_i = 2\mu l_0^2 \gamma_i \quad \tau_{ijk} = 2\mu l_1^2 \eta_{ijk} \quad m_{ij} = 2\mu l_2^2 \chi_{ij} \quad (8)$$

در روابط فوق نیز  $u$  بردار جابجایی و  $\theta$  بردار چرخش است. همچنین  $\lambda$  و  $\mu$  ثوابت الاستیسیته و ضرایب  $l_0$  و  $l_1$  و  $l_2$  پارامترهای وابسته به مقیاس طول مادی می باشند که در روابط تنش های مرتبه بالا ظاهر می شوند. برای تعیین این ضرایب به نتایج آزمایش های خمش و پیچش به مرجع [۷] می توان مراجعه نمود. نکته قابل توجه این است که در حالت  $l_0=l_1=0$  روابط تئوری تنش کوپل اصلاح شده و چنانچه  $l_2$  نیز مساوی صفر باشد روابط تئوری الاستیسیته کلاسیک به دست خواهند آمد.

در ادامه برای رسیدن به معادلات دیفرانسیل حرکت، با توجه به میدان تغییر مکان در تیر مطابق با تیر اویلر-برنولی، مؤلفه های کرنش در تیر به فرم زیر نوشته می شوند:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \varepsilon_{yy} = 0 \quad \varepsilon_{zz} = 0 \quad \varepsilon_{xy} = 0 \quad \varepsilon_{yz} = 0 \quad \varepsilon_{xz} = 0 \quad (9)$$

همچنین زاویه چرخش و مؤلفه‌های تنسور انحنا و بردار گرادیان اتساع با توجه به روابط زیر به دست می‌آیند:

$$\theta_x = \theta_z = 0 \quad \theta_y = -\frac{\partial w}{\partial x} \quad (10)$$

$$\chi_{xx} = \chi_{yy} = \chi_{xz} = \chi_{yz} = \chi_{zz} = 0 \quad \chi_{xy} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (11)$$

$$\gamma_1 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \quad \gamma_2 = 0 \quad \gamma_3 = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (12)$$

تانسور گرادیان کرنش انحرافی  $\eta_{ijk}$  یک تانسور مرتبه سوم بوده و دارای ۲۷ عنصر می‌باشد که با توجه به رابطه (۶) مؤلفه‌های آن عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned} \eta_{111} &= \frac{2}{5} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{2}{5} z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}, \quad \eta_{112} = 0, \quad \eta_{113} = -\frac{4}{15} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \eta_{121} &= 0, \quad \eta_{122} = -\frac{1}{5} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{5} z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}, \quad \eta_{123} = 0 \\ \eta_{131} &= -\frac{4}{15} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \eta_{132} = 0, \quad \eta_{133} = -\frac{1}{5} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{5} z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \\ \eta_{211} &= 0, \quad \eta_{212} = -\frac{1}{5} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{5} z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}, \quad \eta_{213} = 0 \\ \eta_{221} &= -\frac{1}{5} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{5} z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}, \quad \eta_{222} = 0, \quad \eta_{223} = \frac{1}{15} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \eta_{231} &= 0, \quad \eta_{232} = \frac{1}{15} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \eta_{233} = 0 \\ \eta_{311} &= -\frac{4}{15} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \eta_{312} = 0, \quad \eta_{313} = -\frac{1}{5} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{5} z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \\ \eta_{321} &= 0, \quad \eta_{322} = \frac{1}{15} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \eta_{323} = 0 \\ \eta_{331} &= -\frac{1}{5} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{5} z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}, \quad \eta_{332} = 0, \quad \eta_{333} = \frac{1}{5} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (13)$$

از طرفی با نوشتن قانون هوک در حالت تنش صفحه‌ای برای تیر مذکور خواهیم داشت:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (14)$$

که ماتریس  $Q_{ij}$  ماتریس سختی نامیده می‌شود و مؤلفه‌های آن با توجه به جنس سازه برابر خواهد شد با:

$$Q_{11}(z) = Q_{22}(z) = \frac{E(z)}{1-\nu^2} \quad Q_{12}(z) = \frac{\nu E(z)}{1-\nu^2} \quad Q_{55}(z) = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \quad (15)$$

با استفاده از مدل ردی برای مواد تابعی مدرج، مدول الاستیسیته بر حسب  $z$  برابر خواهد شد با:

$$E(z) = (E_c - E_m) \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + E_m \quad (16)$$

که در رابطه فوق اندیس  $m$  بیانگر خواص فلز و اندیس  $c$  بیانگر خواص ماده سرامیکی و  $h$  ارتفاع تیر و  $k$  نیز ضریب اندیس توان ماده مدرج تابعی می‌باشد.

از قرار دادن روابط (۱۵) در (۱۴) مؤلفه‌های تنش برابر خواهند شد با:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= Q_{11}(z) \varepsilon_x = Q_{11}(z) \left[ \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \\ \sigma_y &= Q_{12}(z) \varepsilon_x = Q_{12}(z) \left[ \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \end{aligned} \quad (17)$$

همچنین با توجه به روابط (۸) مؤلفه‌های بردار تنش اتساع به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned}
 p_1 &= 2\mu(z)l_0^2\gamma_1 = 2\mu(z)l_0^2 \left[ \frac{d^2u}{dx^2} - z \frac{d^3w}{dx^3} \right] \\
 p_2 &= 0 \\
 p_3 &= 2\mu(z)l_0^2\gamma_3 = 2\mu(z)l_0^2 \left[ -\frac{\partial^2w}{\partial x^2} \right]
 \end{aligned} \tag{۱۸}$$

که در روابط فوق  $\mu(z) = \frac{E(z)}{2(1+\nu)}$  همان مدول برشی ماده مدرج تابعی می باشد.

همچنین با استفاده از روابط (۸) مؤلفه‌های تانسور تنش دابل انحرافی نیز به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned}
 \tau_{111} &= 2\mu(z)l_1^2\eta_{111} = 2\mu(z)l_1^2 \left[ \frac{2\partial^2u}{5\partial x^2} - \frac{2}{5}z \frac{\partial^3w}{\partial x^3} \right] = \mu(z)l_1^2 \left[ \frac{4\partial^2u}{5\partial x^2} - \frac{4}{5}z \frac{\partial^3w}{\partial x^3} \right] \\
 \tau_{112} &= 0 \\
 \tau_{113} &= 2\mu(z)l_1^2\eta_{113} = 2\mu(z)l_1^2 \left[ -\frac{4}{15} \frac{\partial^2w}{\partial x^2} \right] = -\mu(z)l_1^2 \left[ \frac{8}{15} \frac{\partial^2w}{\partial x^2} \right] \\
 \tau_{121} &= 0 \\
 \tau_{122} &= 2\mu(z)l_1^2\eta_{122} = 2\mu(z)l_1^2 \left[ -\frac{1}{5} \frac{\partial^2u}{\partial x^2} + \frac{1}{5}z \frac{\partial^3w}{\partial x^3} \right] = \mu(z)l_1^2 \left[ -\frac{2}{5} \frac{\partial^2u}{\partial x^2} + \frac{2}{5}z \frac{\partial^3w}{\partial x^3} \right] \\
 \tau_{123} &= 0 \\
 \tau_{131} &= 2\mu(z)l_1^2\eta_{131} = 2\mu(z)l_1^2 \left[ -\frac{4}{15} \frac{\partial^2w}{\partial x^2} \right] = -\mu(z)l_1^2 \left[ \frac{8}{15} \frac{\partial^2w}{\partial x^2} \right] \\
 \tau_{132} &= 0 \\
 \tau_{133} &= 2\mu(z)l_1^2\eta_{133} = 2\mu(z)l_1^2 \left[ -\frac{1}{5} \frac{\partial^2u}{\partial x^2} + \frac{1}{5}z \frac{\partial^3w}{\partial x^3} \right] = \mu(z)l_1^2 \left[ -\frac{2}{5} \frac{\partial^2u}{\partial x^2} + \frac{2}{5}z \frac{\partial^3w}{\partial x^3} \right] \\
 \tau_{211} &= 0 \\
 \tau_{212} &= 2\mu(z)l_1^2\eta_{212} = 2\mu(z)l_1^2 \left[ -\frac{1}{5} \frac{\partial^2u}{\partial x^2} + \frac{1}{5}z \frac{\partial^3w}{\partial x^3} \right] = \mu(z)l_1^2 \left[ -\frac{2}{5} \frac{\partial^2u}{\partial x^2} + \frac{2}{5}z \frac{\partial^3w}{\partial x^3} \right] \\
 \tau_{213} &= 0 \\
 \tau_{221} &= 2\mu(z)l_1^2\eta_{221} = 2\mu(z)l_1^2 \left[ -\frac{1}{5} \frac{\partial^2u}{\partial x^2} + \frac{1}{5}z \frac{\partial^3w}{\partial x^3} \right] = \mu(z)l_1^2 \left[ -\frac{2}{5} \frac{\partial^2u}{\partial x^2} + \frac{2}{5}z \frac{\partial^3w}{\partial x^3} \right] \\
 \tau_{231} &= 0 \\
 \tau_{232} &= 2\mu(z)l_1^2\eta_{232} = 2\mu(z)l_1^2 \left[ \frac{1}{15} \frac{\partial^2w}{\partial x^2} \right] = \mu(z)l_1^2 \left[ \frac{1}{15} \frac{\partial^2w}{\partial x^2} \right] \\
 \tau_{233} &= 0 \\
 \tau_{311} &= 2\mu(z)l_1^2\eta_{311} = 2\mu(z)l_1^2 \left[ -\frac{4}{15} \frac{\partial^2w}{\partial x^2} \right] = \mu(z)l_1^2 \left[ -\frac{8}{15} \frac{\partial^2w}{\partial x^2} \right] \\
 \tau_{312} &= 0 \\
 \tau_{313} &= 2\mu(z)l_1^2\eta_{313} = 2\mu(z)l_1^2 \left[ -\frac{1}{5} \frac{\partial^2u}{\partial x^2} + \frac{1}{5}z \frac{\partial^3w}{\partial x^3} \right] = \mu(z)l_1^2 \left[ -\frac{2}{5} \frac{\partial^2u}{\partial x^2} + \frac{2}{5}z \frac{\partial^3w}{\partial x^3} \right] \\
 \tau_{321} &= 0 \\
 \tau_{322} &= 2\mu(z)l_1^2\eta_{322} = 2\mu(z)l_1^2 \left[ \frac{1}{15} \frac{\partial^2w}{\partial x^2} \right] = \mu(z)l_1^2 \left[ \frac{2}{15} \frac{\partial^2w}{\partial x^2} \right] \\
 \tau_{323} &= 0 \\
 \tau_{331} &= 2\mu(z)l_1^2\eta_{331} = 2\mu(z)l_1^2 \left[ -\frac{1}{5} \frac{\partial^2u}{\partial x^2} + \frac{1}{5}z \frac{\partial^3w}{\partial x^3} \right] = \mu(z)l_1^2 \left[ -\frac{2}{5} \frac{\partial^2u}{\partial x^2} + \frac{2}{5}z \frac{\partial^3w}{\partial x^3} \right] \\
 \tau_{332} &= 0 \\
 \tau_{333} &= 2\mu(z)l_1^2\eta_{333} = 2\mu(z)l_1^2 \left[ \frac{1}{5} \frac{\partial^2w}{\partial x^2} \right] = \mu(z)l_1^2 \left[ \frac{2}{5} \frac{\partial^2w}{\partial x^2} \right]
 \end{aligned} \tag{۱۹}$$

همچنین با استفاده از روابط (۸) تنها مؤلفه غیر صفر بردار تنش کوپل به صورت زیر به دست می‌آید:

$$m_{12} = -\mu(z)l_2^2 \frac{\partial^2w}{\partial x^2} \tag{۲۰}$$

از آنجاکه در به دست آوردن معادلات حرکت سیستم، از اصل هامیلتون استفاده خواهد شد، در ادامه به محاسبه انرژی کرنشی ارتجاعی و انرژی جنبشی و همچنین کار نیروی خارجی در سازه مورد نظر پرداخته شده است. برای این منظور ابتدا از



قرار دادن روابط (۱۷) و (۱۸) و (۱۹) و (۲۰) در رابطه (۱) و محاسبه تغييرات اول آن خواهيم داشت:

$$\delta U = \int_0^L \int_A \left\{ \begin{aligned} & \sigma_{xx} \left[ \frac{\partial \delta u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \right] + 2m_{xy} \left[ -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \right] \\ & + p_1 \left[ \frac{\partial^2 \delta u}{\partial x^2} - z \frac{\partial^3 \delta w}{\partial x^3} \right] + p_3 \left[ -\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \right] \\ & + \tau_{111} \left[ \frac{2}{5} \frac{\partial^2 \delta u}{\partial x^2} - \frac{2}{5} z \frac{\partial^3 \delta w}{\partial x^3} \right] + \tau_{113} \left[ -\frac{4}{15} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \right] \\ & + \tau_{122} \left[ -\frac{1}{5} \frac{\partial^2 \delta u}{\partial x^2} + \frac{1}{5} z \frac{\partial^3 \delta w}{\partial x^3} \right] + \tau_{131} \left[ -\frac{4}{15} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \right] \\ & + \tau_{133} \left[ -\frac{1}{5} \frac{\partial^2 \delta u}{\partial x^2} + \frac{1}{5} z \frac{\partial^3 \delta w}{\partial x^3} \right] + \tau_{212} \left[ -\frac{1}{5} \frac{\partial^2 \delta u}{\partial x^2} + \frac{1}{5} z \frac{\partial^3 \delta w}{\partial x^3} \right] \\ & + \tau_{221} \left[ -\frac{1}{5} \frac{\partial^2 \delta u}{\partial x^2} + \frac{1}{5} z \frac{\partial^3 \delta w}{\partial x^3} \right] + \tau_{223} \left[ \frac{1}{15} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \right] \\ & + \tau_{232} \left[ \frac{1}{15} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \right] + \tau_{311} \left[ -\frac{4}{15} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \right] \\ & + \tau_{313} \left[ -\frac{1}{5} \frac{\partial^2 \delta u}{\partial x^2} + \frac{1}{5} z \frac{\partial^3 \delta w}{\partial x^3} \right] + \tau_{322} \left[ \frac{1}{15} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \right] \\ & + \tau_{331} \left[ -\frac{1}{5} \frac{\partial^2 \delta u}{\partial x^2} + \frac{1}{5} z \frac{\partial^3 \delta w}{\partial x^3} \right] + \tau_{333} \left[ \frac{1}{5} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \right] \end{aligned} \right\} dAdx \quad (21)$$

همچنين با توجه به بار وارده بر سازه، رابطه كار نيروى خارجى و تغييرات اول آن نيز برابر خواهد شد با:

$$V = \frac{1}{2} \int_v (f_1 u_1 + f_2 u_2 + f_3 u_3) dV \Rightarrow \delta V = \int (f_1 \delta u_1 + f_2 \delta u_2 + f_3 \delta u_3) dV \quad (22)$$

همان طور كه ميدانيم نيروى وارده از طرف بستر الاستيك بر ميكروتير با استفاده از مدل وينكلر به صورت زير مدل مى شود:

$$f_{vinkler} = f_3 = k_v w \quad (23)$$

كه در رابطه فوق  $k_v$  ضريب وينكلر مى باشد.

بنابراين تغييرات اول كار خارجى ناشى از نيروى خارجى وارده به تير و نيروى بستر الاستيك به صورت زير نوشته مى شود:

$$\delta V = \int_v \{(q + k_v w) \delta w\} dV \quad (24)$$

براي سهولت در انجام محاسبات از تعريف منتهجهاى تنش به فرم زير براي ساده سازى روابط استفاده خواهد شد:

$$\begin{aligned} N &= \int_A \sigma dA & M &= \int_A \sigma z dA & K &= \int_A \tau dA & H &= \int_A m dA \\ E &= \int_A p dA & R &= \int_A \tau z dA & F &= \int_A p z dA \end{aligned} \quad (25)$$

با جايگذاري روابط (۲۵) در (۲۱) تغييرات اول انرژى سازه برابر خواهد شد با:

$$\delta U = \int_0^L \left\{ \begin{aligned} & N_{11} \left[ \frac{\partial \delta u}{\partial x} \right] - M_{11} \left[ \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \right] - H_{12} \left[ \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \right] + E_1 \left[ \frac{\partial^2 \delta u}{\partial x^2} \right] \\ & - F_1 \left[ \frac{\partial^3 \delta w}{\partial x^3} \right] - E_3 \left[ \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \right] + \frac{2}{5} K_{111} \left[ \frac{\partial^2 \delta u}{\partial x^2} \right] \\ & - \frac{2}{5} R_{111} \left[ \frac{\partial^3 \delta w}{\partial x^3} \right] - \frac{4}{15} K_{113} \left[ \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \right] - \frac{1}{5} K_{122} \left[ \frac{\partial^2 \delta u}{\partial x^2} \right] \\ & + \frac{1}{5} R_{122} \left[ \frac{\partial^3 \delta w}{\partial x^3} \right] - \frac{4}{15} K_{131} \left[ \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \right] - \frac{1}{5} K_{133} \left[ \frac{\partial^2 \delta u}{\partial x^2} \right] \\ & + \frac{1}{5} R_{133} \left[ \frac{\partial^3 \delta w}{\partial x^3} \right] - \frac{1}{5} K_{212} \left[ \frac{\partial^2 \delta u}{\partial x^2} \right] + \frac{1}{5} R_{212} \left[ \frac{\partial^3 \delta w}{\partial x^3} \right] \\ & - \frac{1}{5} K_{221} \left[ \frac{\partial^2 \delta u}{\partial x^2} \right] + \frac{1}{5} R_{221} \left[ \frac{\partial^3 \delta w}{\partial x^3} \right] + \frac{1}{15} K_{223} \left[ \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \right] \\ & + \frac{1}{15} K_{232} \left[ \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \right] - \frac{4}{15} K_{311} \left[ \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \right] - \frac{1}{5} K_{313} \left[ \frac{\partial^2 \delta u}{\partial x^2} \right] \\ & + \frac{1}{5} R_{313} \left[ \frac{\partial^3 \delta w}{\partial x^3} \right] + \frac{1}{15} K_{322} \left[ \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \right] - \frac{1}{5} K_{331} \left[ \frac{\partial^2 \delta u}{\partial x^2} \right] \\ & + \frac{1}{5} R_{331} \left[ \frac{\partial^3 \delta w}{\partial x^3} \right] + \frac{1}{5} K_{333} \left[ \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \right] \end{aligned} \right\} dx \quad (26)$$

همچنین تغییرات اول انرژی جنبشی سازه برابر خواهد شد با:

$$\delta T = \int_0^L \left\{ I_0 \dot{u} \delta \dot{u} - I_1 \dot{u} \frac{\partial \delta \dot{w}}{\partial x} - I_1 \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \delta \dot{u} + I_2 \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}}{\partial x} + I_0 \dot{w} \delta \dot{w} \right\} dx \quad (27)$$

در نهایت به کمک اصل همیلتون معادلات دیفرانسیل حاکم بر مسئله به فرم زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 M_{11}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_{12}}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 F_1}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 E_3}{\partial x^2} - \frac{2}{5} \frac{\partial^3 R_{111}}{\partial x^3} + \frac{4}{15} \frac{\partial^2 K_{113}}{\partial x^2} + \frac{1}{5} \frac{\partial^3 R_{122}}{\partial x^3} \\ & + \frac{4}{15} \frac{\partial^2 K_{131}}{\partial x^2} + \frac{1}{5} \frac{\partial^3 R_{133}}{\partial x^3} + \frac{1}{5} \frac{\partial^3 R_{212}}{\partial x^3} + \frac{1}{5} \frac{\partial^3 R_{221}}{\partial x^3} - \frac{1}{15} \frac{\partial^2 K_{223}}{\partial x^2} - \frac{1}{15} \frac{\partial^2 K_{232}}{\partial x^2} \\ & + \frac{4}{15} \frac{\partial^2 K_{311}}{\partial x^2} + \frac{1}{5} \frac{\partial^3 R_{313}}{\partial x^3} - \frac{1}{15} \frac{\partial^2 K_{322}}{\partial x^2} + \frac{1}{5} \frac{\partial^3 R_{331}}{\partial x^3} - \frac{1}{5} \frac{\partial^2 K_{333}}{\partial x^2} + q + k_v w = 0 \quad (28) \\ & \frac{\partial N_{11}}{\partial x} - \frac{\partial^2 E_1}{\partial x^2} - \frac{2}{5} \frac{\partial^2 K_{111}}{\partial x^2} + \frac{1}{5} \frac{\partial^2 K_{122}}{\partial x^2} + \frac{1}{5} \frac{\partial^2 K_{133}}{\partial x^2} + \frac{1}{5} \frac{\partial^2 K_{212}}{\partial x^2} \\ & + \frac{1}{5} \frac{\partial^2 K_{221}}{\partial x^2} + \frac{1}{5} \frac{\partial^2 K_{313}}{\partial x^2} + \frac{1}{5} \frac{\partial^2 K_{331}}{\partial x^2} = 0 \end{aligned}$$

شرایط مرزی مربوطه نیز با معادلات زیر مشخص می‌شوند:

$$\begin{aligned} u = \text{known} & \quad \text{or} \quad N_x = 0 \\ w = \text{known} & \quad \text{or} \quad \frac{\partial M_x}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial x} = \text{known} & \quad \text{or} \quad M_x = 0 \end{aligned} \quad (29)$$

با به دست آوردن منته‌های تنش بر حسب ترم‌های جابه‌جایی و جایگذاری آن‌ها در معادلات (۲۸)، معادلات دیفرانسیل حرکت بر حسب مؤلفه‌های جابه‌جایی به فرم زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} & Q_{11}(z)A \frac{d^2 u}{dx^2} - 2\mu(z)l_0^2 A \frac{d^4 u}{dx^4} - \frac{4}{5} \mu(z)l_1^2 A \frac{d^4 u}{dx^4} = 0 \\ & Q_{11}(z)I \frac{d^4 w}{dx^4} + \mu(z)l_2^2 A \frac{d^4 w}{dx^4} - 2\mu(z)l_0^2 I \frac{d^6 w}{dx^6} + 2\mu(z)l_0^2 A \frac{d^4 w}{dx^4} - \frac{12}{15} \mu(z)l_1^2 I \frac{d^6 w}{dx^6} \\ & + \frac{8}{15} \mu(z)l_1^2 A \frac{d^4 w}{dx^4} - q - k_v w = 0 \end{aligned} \quad (30)$$

برای حل معادلات فوق از روش عددی مربعات دیفرانسیلی کمک گرفته خواهد شد و در اولین قدم با توجه به فرمول‌های

مربوطه و با فرض جواب‌های مثلثاتی، معادلات فوق را به صورت گسسته سازی شده زیر می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}
 Q_{11}(z)A \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(2)} u_j - 2\mu(z)l_0^2 A \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(4)} u_j - \frac{4}{5}\mu(z)l_1^2 A \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(4)} u_j &= 0 \\
 Q_{11}(z)I \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(4)} w_j + \mu(z)l_2^2 A \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(4)} w_j - 2\mu(z)l_0^2 I \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(6)} w_j + 2\mu(z)l_0^2 A \sum_{j=1}^N C_j^{(4)} & \quad (31) \\
 - \frac{12}{15}\mu(z)l_1^2 I \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(6)} w_j + \frac{8}{15}\mu(z)l_1^2 A \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(4)} w_j - q - k_v w_i &= 0
 \end{aligned}$$

با مرتب‌سازی معادلات فوق و با فرض شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده برای تیر مفروض، پس از مرتب‌سازی معادلات به یک دستگاه معادلات جبری خواهیم رسید که با حل آن مقادیر خیز هر یک از نقاط تیر مشخص می‌شود.

### ۳- اعتبارسنجی

در این بخش به منظور صحت‌گذاری برنامه‌ی کامپیوتری نوشته شده برای تعیین خیز تیر در شرایط مرزی تکیه‌گاه‌های ساده، نتایج به‌دست‌آمده با مرجع [۱۲] مقایسه شده‌اند. (به‌منظور مقایسه، تکیه‌گاه الاستیک حذف شده است). همانند این مرجع بار خارجی وارده بر تیر  $q_0 = 10\mu N/m$  و مشخصات مصالح مطابق با جدول ۱ در نظر گرفته شده است.

جدول ۱ مشخصات مصالح در نظر گرفته‌شده برای تیر ساخته‌شده از مواد مدرج تابعی

$\nu$	$E(Gpa)$	$\rho(kg/m^3)$	Part
0.3	70	2702	Metal part
0.17	427	3100	Ceramic part

جدول ۲ نتایج ماکزیمم خیز بی‌بعد در حالت  $L/h = 10$

Classical beam theory		h/l=2(Strain gradient theory)		Power index
Present	مرجع [۱۲]	Present	مرجع [۱۲]	
0.4762	0.4862	0.2241	0.2291	k=1
Error=2%		Error=2%		
0.5561	0.5665	0.2782	0.2850	k=2
Error=1.8%		Error=2.4%		
0.6495	0.6312	0.3468	0.3401	k=4
Error=2.8%		Error=1.9%		

همان‌گونه که ملاحظه می‌شود تطابق بسیار خوبی بین مقادیر به‌دست‌آمده با مقادیر محاسبه‌شده در مرجع [۱۲] وجود دارد. به‌گونه‌ای که بیشترین خطا در تئوری تنش کوپل اصلاح‌شده در حالت  $k = 2$  برابر ۲/۴٪ و در تئوری الاستیسیته کلاسیک در وضعیت  $k = 4$  برابر با ۲/۸٪ می‌باشد.

### ۳-۱- تحلیل خمش میکروتیر مدرج تابعی روی بستر الاستیک در تئوری الاستیسیته کلاسیک

همان‌طور که قبلاً گفته شد، چنانچه در روابط به‌دست‌آمده در تئوری گرادیان کرنش بهبودیافته، پارامترهای مقیاس طول  $l_0$  و  $l_1$  و  $l_2$ ، برابر صفر قرار داده شوند، به روابط تئوری کلاسیک در الاستیسیته، برای تیرها خواهیم رسید با انجام این کار در معادلات به‌دست‌آمده خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial N_{11}}{\partial x} &= 0 \\
 \frac{\partial^2 M_{11}}{\partial x^2} + q + k_v w &= 0
 \end{aligned} \quad (32)$$

پس از حل معادلات فوق با روندی مشابه آنچه گفته شد در نهایت مقادیر خیز بی‌بعد تیر مدرج تابعی در شرایط مرزی تکیه‌گاه

ساده با توجه به مقادیر مختلف ضریب سختی بستر الاستیک، مشخص و در جدول ۳ درج شده‌اند.

جدول ۳ ماکزیمم خیز بی‌بعد میکروتیر مدرج تابعی در تئوری الاستیسیته کلاسیک

$$\bar{w} = 100w \frac{E_m I}{q_0 L^4}$$

$k_v = 20$	$k_v = 5$	$k_v = 2$	$k_v = 1$	$k_v = 0$	$L/h$
0.2629	0.2735	0.2757	0.2764	0.2772	$k = 0$
0.4356	0.4654	0.4719	0.4741	0.4763	$k = 1$
0.5015	0.5414	0.5502	0.5532	0.5562	$k = 2$
0.6063	0.6657	0.6790	0.6853	0.6881	$k = 5$

همان‌گونه که ملاحظه می‌گردد با افزایش ضریب سختی بستر الاستیک در تمامی مقادیر ضریب اندیس توان ماده مدرج تابعی، مقدار خیز بی‌بعد تیر کاهش یافته است. علاوه بر این مشاهده می‌گردد که با افزایش ضریب اندیس توان ماده مدرج تابعی نیز مقدار خیز بی‌بعد تیر افزایش یافته است.

### ۲-۳- خیز میکروتیر مدرج تابعی در تئوری تنش کوپل اصلاح شده و تئوری گرادیان کرنش بهبود یافته

همان‌گونه که گفته شد با صفر قرار دادن ضرایب  $l_0$  و  $l_2$  مقادیر خیز تیر در تئوری تنش کوپل اصلاح شده به دست خواهند آمد. با انجام این کار در محاسبات مربوطه مقادیر جدول ۴ به دست خواهند آمد.

جدول ۴- ماکزیمم خیز بی‌بعد میکروتیر در شرایط مرزی دو سر لولا در تئوری تنش کوپل اصلاح شده و گرادیان کرنش بهبود یافته در

$k = 0$  حالت

$$\bar{w} = 100w \frac{E_m I}{q_0 L^4}$$

$k = 0$				نوع تئوری
$k_v = 20$	$k_v = 5$	$k_v = 0$	$h/l$	
0.0163	0.0164	0.0164	1	MSGT
0.0551	0.0556	0.0557	2	
0.1353	0.1381	0.1390	4	
0.2128	0.2196	0.2220	8	
0.2380	0.2466	0.2496	12	
0.2534	0.2631	0.2666	20	
0.0499	0.0503	0.0504	1	MCST
0.1272	0.1296	0.1304	2	
0.2075	0.2141	0.2163	4	
0.2465	0.2557	0.2590	8	
0.2553	0.2653	0.2688	12	
0.2601	0.2705	0.2741	20	
0.2629	0.2753	0.2772	-	Classical theory

با توجه به مقادیر مندرج در جدول ۴ که برای تیری از جنس ماده ایزوتروپیک (فلز) تنظیم شده است می‌توان دریافت که با افزایش نسبت  $h/l$  مقادیر خیز حاصل از تئوری تنش کوپل اصلاح شده و تئوری الاستیسیته کلاسیک به یکدیگر نزدیک‌تر شده است. نکته قابل توجه این است که سختی بستر وینکلر تأثیری در روند مذکور نداشته، به طوری که در حالت  $k_v = 20$  نیز مقادیر خیز تئوری کلاسیک و تئوری تنش کوپل اصلاح شده به یکدیگر نزدیک هستند.

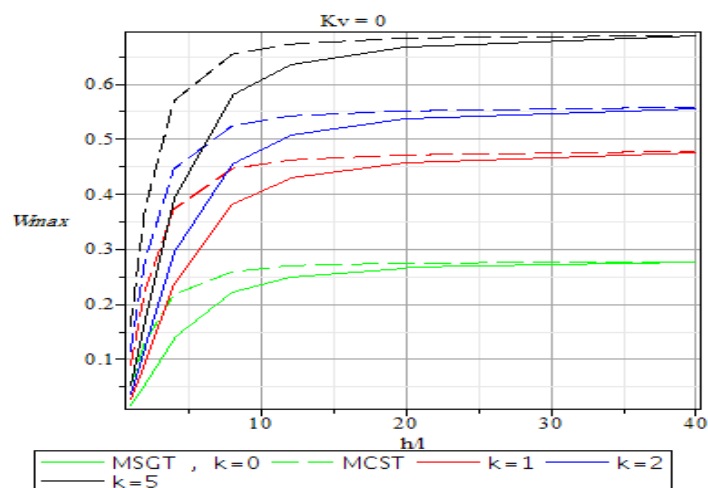
باملاحظه ارقام جدول فوق می‌توان دریافت که در تیری که از ماده مدرج تابعی ساخته شده نیز با افزایش نسبت  $h/l$  در هر دو تئوری تنش کوپل اصلاح شده و تئوری گرادیان کرنش مقادیر خیز بی‌بعد تیر افزایش یافته‌اند. در این جدول نیز همانند جدول قبلی می‌توان مشاهده نمود که جواب‌های تئوری کلاسیک به جواب‌های تئوری تنش کوپل اصلاح شده نزدیک‌تر می‌باشند. با بررسی دقیق‌تر ارقام جدول می‌توان گفت که در محدوده  $1 < h/l < 4$  خیز تیر تأثیرپذیری بیشتری نسبت به پارامتر  $h/l$  داشته بطوریکه در تئوری گرادیان کرنش با افزایش پارامتر  $h/l$  از ۱ به ۴ (به عنوان نمونه در حالت  $k_v = 0$ ) درصد افزایش خیز بی‌بعد ۷۴۷/۱۶۳ درصد شده، در حالی که با افزایش این پارامتر از ۸ به ۲۰ مقدار افزایش خیز ۵/۸۴۲ درصد شده است.

جدول ۵ ماكزيمم خيز بي بعد ميكروتير در شرايط مرزى دو سر لولا در تئورى تنش كوپل اصلاح شده و گراډيان کرنش بهبوديافته در

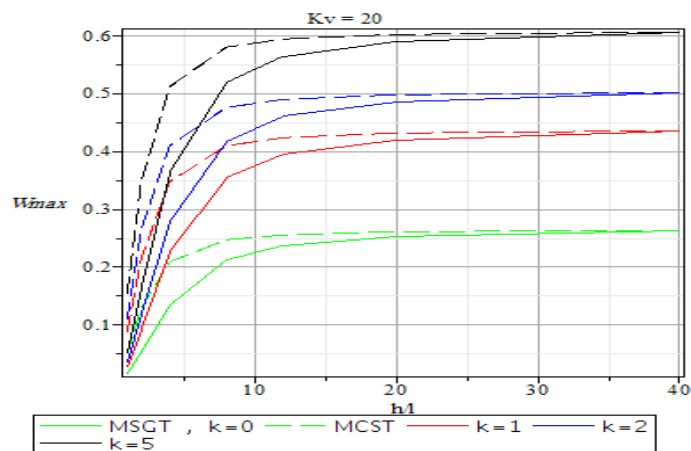
حالت  $k = 1$

$$\bar{w} = 100w \frac{E_m I}{q_0 L^4}$$

$k = 1$			$h/l$	نوع تئورى
$k_v = 20$	$k_v = 5$	$k_v = 0$		
0.0280	0.0281	0.0282	1	MSGT
0.0940	0.0953	0.0957	2	
0.2282	0.2361	0.2389	4	
0.3550	0.3745	0.3815	8	
0.3957	0.4201	0.4289	12	
0.4203	0.4480	0.4581	20	
0.0852	0.0862	0.0866	1	MCST
0.2147	0.2217	0.2241	2	
0.3465	0.3651	0.3717	4	
0.4093	0.4355	0.4450	8	
0.4235	0.4516	0.4619	12	
0.4312	0.4604	0.4710	20	
0.4356	0.4654	0.4763	-	Classical theory



شكل ۲ تغييرات مقدار خيز ماكزيمم ميكروتير نسبت به تغييرات ضريب كسر حجمى مواد و پارامتر مقياس طول بي بعد در حالت  $k_v = 0$  با استفاده از تئورى گراډيان کرنش و تئورى تنش كوپل اصلاح شده



شكل ۳ تغييرات مقدار خيز ماكزيمم ميكروتير نسبت به تغييرات ضريب كسر حجمى مواد و پارامتر مقياس طول بي بعد برای  $k_v = 20$  با استفاده از تئورى گراډيان کرنش و تئورى تنش كوپل اصلاح شده

همان گونه که ملاحظه می شود در محدوده  $h/l < 1/25$  خیز ماکزیمم با شیب بسیار تندی افزایش یافته و در ناحیه  $1/25 < h/l$  خیز ماکزیمم بدون تغییر (به صورت ثابت) باقی مانده است. نکته دیگری که در نمودارها ملاحظه می شود این است که اختلاف بین دو تئوری در  $h/l = 0$  به حداکثر خود رسیده و از  $h/l = 2$  به بعد خیز حاصله از هر دو تئوری یکسان شده است. در نمودارهای تنظیم شده در شکل ۳ شباهت بسیار زیادی به نمودارهای ترسیم شده در شکل ۲ دیده می شود با این تفاوت که با توجه به افزایش ضریب سختی بستر الاستیک مقادیر خیز تیر کاهش یافته است. از نکات جالب توجه در این نمودارها این است که از محدوده  $h/l = 4$  به بعد خیز ماکزیمم به دست آمده در هر دو تئوری با مقدار خیز به دست آمده از تئوری کلاسیک یکسان شده و علت اصلی این موضوع این است که با افزایش پارامتر مقیاس طول بی بعد میکروتیر، ابعاد آن به اندازه ماکرو نزدیک تر شده و نتایج حالت میکرو با ماکرو یکسان می شود.

#### ۴- نتیجه گیری

به علت فقدان پارامتر مقیاس طول مادی در تئوری الاستیسیته کلاسیک، از این تئوری نمی توان برای تفسیر اثر اندازه در سازه های با مقیاس میکرون استفاده کرد و ناگزیر باید از تئوری های مرتبه ای بالاتر همانند تئوری تنش کوپل اصلاح شده و تئوری گرادیان کرنش که شامل پارامترهای مقیاس طول مادی اضافی در کنار ثوابت الاستیسیته هستند، استفاده کرد. در این خصوص می توان به این نکته توجه داشت که تئوری گرادیان کرنش، یک تئوری محیط پیوسته مرتبه ای بالا است که شامل سه پارامتر اضافی می باشد، که اثر این وابستگی به اندازه را برای سازه ها به خوبی نشان می دهد.

در این تحقیق، تحلیل خیز میکرو تیر ساخته شده از مواد تابعی مدرج روی بستر الاستیک با استفاده از تئوری گرادیان کرنش بهبود یافته با به کارگیری مدل اوپلر-برنولی مورد مطالعه قرار گرفته است. با استفاده از مدل تیر اوپلر-برنولی معادلات تعادل مربوط به تیر با ضخامت میکرون با استفاده از تئوری گرادیان کرنش بهبود یافته و اصل همیلتون به دست آمده است. مشخصات مواد میکروتیر نیز به صورت تابعی مدرج در راستای ضخامت تیر در نظر گرفته شده و برای حل معادلات حاکم از روش عددی دیفرانسیل مربعی تعمیم یافته استفاده شده است. این معادلات برای میکروتیری با شرایط مرزی تکیه گاه ساده حل شده اند. با حل این مسئله مقدار خیز میکروتیر با توجه به تغییر در خصوصیات مواد و همچنین تغییر در مشخصات هندسی تیر به دست آمده است.

بطور کلی نتایج زیر با استفاده از نمودارها و جدول تنظیم شده قابل ذکر می باشند:

- ۱- با افزایش مقدار سختی ضریب بستر الاستیک مقادیر خیز میکروتیر کاهش می یابد و این پدیده به علت آن است که بستر الاستیک همانند یک فنر بر ضریب سختی تیر می افزاید و خیز آن کاهش می یابد.
- ۲- در تئوری های غیر کلاسیک، اثر وابستگی به اندازه هنگامی که ضخامت میکروتیر به پارامتر مقیاس طول نزدیک می شود اهمیت زیادی پیدا می کند.
- ۳- با افزایش مقدار پارامتر مقیاس طول بی بعد میکروتیر مقادیر خیز ماکزیمم میکروتیر افزایش یافته و در انتها به مقدار تئوری کلاسیک نزدیک می شوند که این پدیده برای هر دو تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده و تنش کوپل اصلاح شده صادق است، این پدیده به علت آن است که با افزایش مقدار پارامتر مقیاس طول بی بعد میکروتیر، ابعاد آن به اندازه های ماکرو نزدیک می شوند که در این حالت نتایج تئوری کلاسیک از دقت خوبی برخوردار می باشند و نتایج حالت میکرو با حالت ماکرو تقریباً یکسان می شوند.
- ۴- با افزایش ضریب اندیس توان ماده مدرج تابعی خیز میکروتیر بیشتر می شود زیرا با افزایش این ضریب جنس تیر از سرامیک به فلز نزدیک می شود و در نتیجه سختی تیر کاهش یافته و خیز تیر افزایش می یابد.
- ۵- مقادیر خیز به دست آمده بر اساس تئوری کلاسیک از مقادیر خیز حاصل از تئوری تنش کوپل اصلاح شده بیشتر بوده و نیز مقادیر خیز حاصل از تئوری تنش کوپل اصلاح شده از خیز حاصل از تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده نیز بیشتر می باشد، که این اختلاف با افزایش پارامتر مقیاس طول بی بعد  $h/l$  کاهش می یابد.

## ۵- مراجع

- [1] Mindlin R D. Stress functions for a Cosserat continuum. *International Journal of Solids and Structures*. 1965;1:265-271.
- [2] Toupin R. Elastic materials with couple-stresses. *Archive for rational mechanics and analysis*. 1962;11:385-414.
- [3] Koiter W T. Couple-stress in the theory of elasticity. 1964;67:17-44.
- [4] Yang F, Chong A C M, Lam D C C, Tong P. Couple stress based strain gradient theory for elasticity. *International Journal of Solids and Structures*. 2002;39:2731-2743.
- [5] Park S K, Gao X L. Bernoulli–Euler beam model based on a modified couple stress theory. *Journal of Micromechanics and Microengineering*. 2006;16:2355.
- [6] Kong S, Zhou S, Nie Z, Wang K. The size-dependent natural frequency of Bernoulli–Euler micro-beams. *International Journal of Engineering Science*. 2008;46:427-437.
- [7] Ma H M, Gao X L, Reddy J N. A microstructure-dependent Timoshenko beam model based on a modified couple stress theory. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2008;56:3379-3391.
- [8] Ansari R, Gholami R, Shojaei M F, Mohammadi V, Sahmani S. Size-dependent bending, buckling and free vibration of functionally graded Timoshenko microbeams based on the most general strain gradient theory. *Composite Structures*. 2013;100:385-397.
- [9] Tajalli S A, Rahaeifard M, Kahrobaiyan M H, Movahhedy M R, Akbari J, Ahmadian M T. Mechanical behavior analysis of size-dependent micro-scaled functionally graded Timoshenko beams by strain gradient elasticity theory. *Composite Structures*. 2013;102:72-80.
- [10] Ansari R, Hasrati E, Faghih Shojaei M, Gholami R, Mohammadi V, Shahabodini A. Size-dependent bending, buckling and free vibration analyses of microscale functionally graded mindlin plates based on the strain gradient elasticity theory. *Latin American Journal of Solids and Structures*. 2016;13:632-664.
- [11] Mohammadi H, Mahzoon M. Investigating thermal effects in nonlinear buckling analysis of micro beams using modified strain gradient theory. *Iranian Journal of Science and Technology Transactions of Mechanical Engineering*. 2014;38:303.
- [12] Şimşek M, Kocatürk T, Akbaş Ş D. Static bending of a functionally graded microscale Timoshenko beam based on the modified couple stress theory. *Composite Structures*. 2013;95:740-747.