

Optimal placement of the sensors for Static Output Feedback of fluttering plates in the supersonic flow

Sirwan Farhadi ^{a*}, Kamran Asadi ^a

^a Department of Mechanical Engineering, University of Kurdistan, Sanandaj, 66177-15175, Iran

Original Article

Use your device to scan
and read the article online



Citation: Farhadi S, Asadi K. Optimal placement of the sensors for Static Output Feedback of fluttering plates in the supersonic flow. *Mechanics of Advanced and Smart Materials*. 2022;2(1):35-56.

 <https://10.52547/masm.2.1.73>.

KEYWORDS

Plate flutter
Active control
State-space estimator
Piezoelectric patch

ABSTRACT

The widespread use of lightweight and flexible structures in industries such as aerospace and the increasing use of thin plates in these structures, which are easily fluttered and unstable in rapid air currents, make the use of active and inactive flutter control methods inevitable. In the present study, by examining the governing equations and employing SOF (Static Output Feedback) method, we have tried to position the vibration sensors to get the closest performance to the LQR controller. To do this, a rectangular plate exposed to supersonic current is considered. A piezoelectric patch is used to control the vibrations. A rectangular plate exposed to supersonic current is considered. A piezoelectric patch is used to control the vibrations. Von Karman thin plate theory and Mindlin moderately thick plate theory are used for simulating the plate. The first-order piston theory is used to model the airflow. The equations of motion are obtained using the Lagrange method and the displacement field approximation by finite power series. Then, a criterion for finding the points whose displacement feedback combination can provide the closest control performance to the LQR controller is presented. Finally, the performance of the obtained criterion has been evaluated and confirmed by numerical simulation. The results show that the plate's flutter can be effectively suppressed at speeds beyond twice the critical velocity, feeding back a specific combination of certain points' displacements. The results show this method presents a performance comparable to the LQR controller, despite removing the state estimator.

Extended Abstract

1. Introduction

Lightweight and flexible components such as thin plates have been used widely in aerospace industries. These components go unstable when subjected to fast airflows. This issue has made the use of active and passive control methods inevitable. Bailey and Hubbard [1] were the first to employ piezoelectric materials to control vibrations.

In control problems involving large numbers of state variables, the LQR or LQG-based methods are employed to stabilize the system and optimize the control performance. System state variables are fed back as the control signal in these methods. However, state variables of distributed parameter systems cannot be measured directly and must be estimated using sensor data, which causes technical and numerical problems in practice. Consequently, in practical aeroelastic flutter control, it is recommended to use the SOF (Static Output Feedback) method for direct feedback of sensor data. Patil and Hodges [13] were the first to consider this issue and examine the aeroelastic flutter control of a long wing by SOF method.

According to the published literature, the optimal placement of the sensors for the SOF control of fluttering plates has not been investigated so far. With this aim, a rectangular plate subjected to supersonic flow is considered. Von Karmen's thin plate theory and Mindlin's moderately thick plate theory are employed to model the system. The LQR controller is used as the

* Corresponding author. Tel.: 09181604313; Fax: 08633412535

E-mail address: s.farhadi@uok.ac.ir

DOI: <https://10.52547/masm.2.1.73>.

Received: April 25, 2022; Received in revised form: April 29, 2022; Accepted: May 17, 2022

2022 Published by Arak University Press. All rights reserved.



reference to define the best displacement and velocity feedback points. A criterion is suggested for optimizing sensors position based on the angle between the LQR feedback gains vector and the equivalent gains vector of a derivative-proportional controller. The validity of the proposed method is evaluated by numerical simulations.

2. Mathematical Formulation

Fig. 1 presents a cantilevered plate with length a , width b , and thickness h subjected to a supersonic flow of velocity V_∞ . A piezoelectric patch of dimensions a_p , b_p and h_p is attached to the plate at local coordinates (x_p, y_p) . The patch acts as an actuator to control the plate vibrations. The voltage applied to the patch is defined using specific points' displacement and velocity feedback. The governing equations of the system are presented in Ref. [8], based on the Mindlin plate theory. Similar equations are extracted for the case of the von Karman plate theory using some simplifications.

The displacement field is approximated using the Ritz approximation method:

$$w = Nq \tag{1}$$

where w , N and q are the transverse displacement, the matrix of admissible shape functions, and the vector of generalized coordinates, respectively. The governing equations are obtained as follows:

$$M\ddot{q} + C_A\dot{q} + (K + K_A)q = FV_3 \tag{2}$$

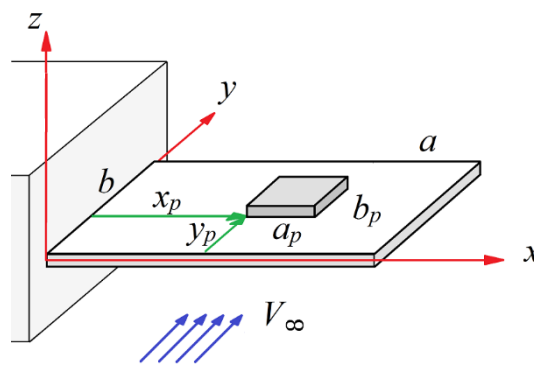


Figure 1. The geometry of the plate and the piezoelectric patch subjected to supersonic flow

where V_3 is the piezo-patch control voltage, F is actuating vector, and M , K , C_A , and K_A are matrices of mass, structural stiffness, aerodynamic damping, and aerodynamic stiffness, respectively. Using the following transfer:

$$q = \Phi X, \tag{3}$$

Eq. (2) is transferred in to modal space:

$$\bar{M}\ddot{X} + \bar{C}_A\dot{X} + (\bar{K} + \bar{K}_A)X = \bar{F}V_3, \tag{4}$$

where Φ is the matrix of mode shapes in zero flow velocity ($M\ddot{q} + Kq = 0$) and X is the vector of state variables in the modal coordinates, and

$$\begin{aligned} \bar{M} &= \Phi^T M \Phi, & \bar{C}_A &= \Phi^T C_A \Phi, \\ \bar{K} &= \Phi^T K \Phi, & \bar{K}_A &= \Phi^T K_A \Phi, \\ \bar{F} &= \Phi^T F. \end{aligned} \tag{5}$$

The reduced model is obtained by eliminating defined Φ columns and neglecting the corresponding mode shapes from the system dynamics. In the sequel, the governing equations are transferred to state-space form:

$$\begin{aligned} \dot{Z} &= AZ + BV_3, & Z &= \begin{Bmatrix} \dot{X} \\ X \end{Bmatrix}, \\ A &= - \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} C_A & K + K_A \\ -I & 0 \end{bmatrix}, \\ B &= \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \tag{6}$$

We observe state variables vector is composed of the generalized coordinates' vector and its time derivative. Therefore, we may consider it a function of displacement and velocity of a plate's generic point. In the LQR method, system state variables are fed back with specific gains:

$$V_3 = -K_C Z = -K1 \dot{X} - K2 X \tag{7}$$

In the above equation, K_C is the matrix of feedback gains, and its submatrices $K1$ and $K2$ define the gain factors of the modal displacement and velocity variables, respectively. The state and control weighing function of the LQR controller are defined the same as described in Ref. [8]. For the case of SOP control, we employ a proportional-derivative feedback:

$$V_3 = -K_P(w(x_s, y_s) + T_d \dot{w}(x_s, y_s)) \tag{8}$$

Here $w(x_s, y_s)$ represents the transverse displacement of the sensing point, and K_p and T_d denote the feedback gain factor and the time constant of the controller, respectively.

Using Eqs. (1), (6), and (8), we get

$$\begin{aligned} V_3 &= -K_p K_S Z, \\ K_S &= [T_d N|_{x_s, y_s} \phi \quad N|_{x_s, y_s} \phi] \end{aligned} \quad (9)$$

Comparing Eq. (9) to (7), we notice the LQR and the SOP controller are equal if $K_p T_d N|_{x_s, y_s} \phi = K1$ and $K_p N|_{x_s, y_s} \phi = K2$. But, it is impossible to find a sensor location to satisfy these conditions. However, it is possible to define sensor locations that yield the closest state variables gain vector to those of the LQR controller by minimizing the angle between the feedback gain vectors. For this purpose, the following criteria are introduced based on maximizing the cosine of the mentioned vectors angle:

$$\begin{aligned} \text{COS1} &= \frac{(N|_{x_s, y_s} \phi) K1^T}{\|N|_{x_s, y_s} \phi\| \|K1\|}, \\ \text{COS2} &= \frac{(N|_{x_s, y_s} \phi) K2^T}{\|N|_{x_s, y_s} \phi\| \|K2\|} \end{aligned} \quad (10)$$

Finally, we determine the values of T_d that minimize the difference between the gain vectors K and K_S . We do this by maximizing the following criteria:

$$\text{COS3} = \frac{K_S K_C^T}{\|K_S\| \|K\|} \quad (11)$$

3. Results and discussion

In the field of aeroelasticity, the system behavior is usually expressed in the dimensionless dynamic pressure $\lambda = \rho_a V_\infty^2 a^3 / D$, in which D is the plate bending stiffness. Increasing the dynamic pressure and passing a critical value (λ_{cr}), the real part of some system eigenvalues go positive, and the plate starts fluttering. Critical dynamic pressure was calculated for cases of plates without patch and having a piezo or an aluminum patch to verify the performed simulation and assess the precision of thin plate's results. The results were compared to those of Ref. [8] obtained by Mindlin plate theory. The following dimensional quantities were used for this comparison:

$$\begin{aligned} a &= 0.4 \text{ m}, \quad a/b = 4/3, \quad h/a = 0.01, \\ a_p/a &= 1/4, \quad b_p/b = 5/30, \quad h_p/h = 1/4 \end{aligned}$$

For the case without a patch, von Karman's thin plate theory defines the critical pressure as 145.3, which is in good agreement with that of the Mindlin theory obtained in Ref. [8] ($\lambda_{cr} = 143.8$). Also, for the cases of patched plates and different patch locations, the obtained values were comparable to those reported in Fig. 2 of Ref. [8].

Using the thin-plate and thick-plate model, the stabilization of the plate flutter at the dynamic pressure $\lambda = 290$ by the displacement feedback of different points is investigated. The piezoelectric patch is positioned in coordinates $(x_p, y_p) = (80/57, 0)$ using the results presented in Ref. [8] based on the dynamic stability criterion. For this study, the constant T_d of Eq. (8) is set to zero and K_p is increased to stabilize the plate. To calculate the required voltage, a coefficient of the first vibration mode of the plate (which is involved in flutter phenomenon) is considered as the initial condition so that the displacement of the point $(x, y) = (a, b/4)$ is $w = 0.5h$.

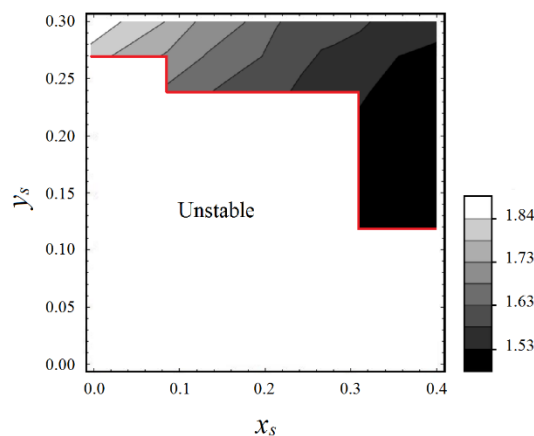


Figure 2. The applied voltage required at $t=0$ to stabilize the plate flutter at the dynamic pressure $\lambda = 290$ versus sensor location defined by the Mindlin theory

Fig. 2 shows the applied voltage required at $t=0$ to stabilize the plate flutter versus sensor location defined by the Mindlin theory for an $11 * 10$ plate mesh. In this figure, the darker areas indicate the lower required voltages. The white zone corresponds to locations where no feedback gain yields vibrations stabilization. In the black and gray zones, the plate vibrations go unstable as the feedback gain increases. Numerical simulations show a significant difference between the result of the plate theories to define stability zones and corresponding actuator voltages.

According to Figure 2, the required control voltages are of the order of kV. Whiles, Table 8 of the Ref. [8] reported that the maximum applied voltage is limited to a few tens of volts using the LQR method and the mentioned location of the piezoelectric patch. We re-examined the computational codes of Ref. [8] to ensure the accuracy of its presented results. Also, we studied the maximum voltage predicted by the LQR method for the von Karman and Mindlin plate models. In this study, we reached the following results:

1. Reference [8] claims that a reduced dynamic model with ten vibration modes has been used to study the flutter control. Then, to simulate the time response of the plate, a coefficient of the first mode shape was considered for the initial condition. By examining the programming codes used in that study, we found that due to a programming error, indeed, a coefficient of the tenth mode shape was used as the initial condition. Since, unlike the first and second vibration modes, the tenth mode is not directly involved in the flutter mechanism, the required voltages were predicted much less than they are.

2. Numerical simulations show that the von Karman theory predicts the actuator voltages higher than those predicted by the Mindlin theory. The reason is that the piezoelectric patch excites the base plate using shear stresses. On the other hand, in the von Karman theory, the shear stresses are assumed negligible and are omitted in the theory development. Because of the above, we only used the Mindlin theory to prepare the results.

Fig. 3 reports the time response of the plate in dynamic pressure of $\lambda = 290$ simulated with the Mindlin theory and the LQR method, assuming the first mode shape as the initial condition. In this simulation, the weighting matrices Q and R are considered the same as in Ref. [8]. The vector of feedback gains was obtained and used to determine the best sensor locations for the displacement and velocity feedback by minimizing the criteria presented in Eq. (10). Fig. 4 shows the contour plot corresponding to the criterion $COS1$ of Eq. (10). A very similar contour plot was obtained for $COS2$ of that equation. It was observed that both $COS1$ and $COS2$ criteria have local maximums at the same points that are POS1: $(x_s, y_s) = (0.28,0)$ and POS2: $(x_s, y_s) = (0.36,0.21)$. Consequently, we considered these points as possible optimal points for proportional-derivative feedback. Afterward, using criterion $COS3$ of Eq. (11) at these points, we searched for values of T_d that result in a must closeness between the vector of feedback gains K_C and K_S . It was observed that for both sensor locations maximum value of $COS3$ is obtained when $T_d=0$, which is identical to a pure proportional controller. Moreover, in both cases, the maximum value of $COS3$ is considerably less than the ideal value 1. As observed in Fig. 2, basically in POS1, no feedback gain K_P can stabilize the system (although specific values of K_P make the system very close to the stability boundaries). Fig. 2 also shows that by locating the sensor in POS2, the system can be stabilized for a specific value of K_P with the least actuator effort compared to other parts of the plate. To have a good control performance, it is necessary to go far enough away from the stability boundaries by increasing the feedback gain. But the numerical simulations show the stability zone is very narrow and with a slight increase in K_P , the system becomes unstable.

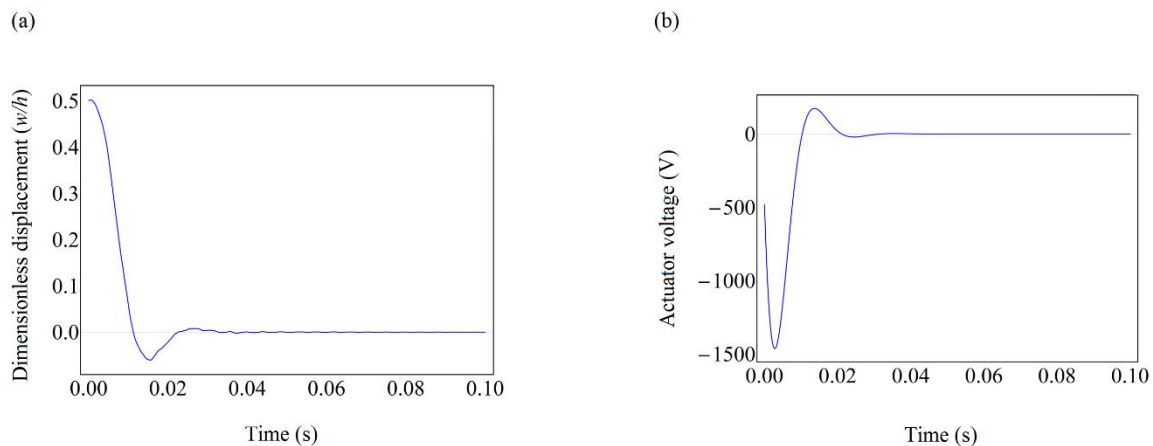


Figure 3. Time response simulated using Mindlin theory and LQR controller for $\lambda = 290$.

As mentioned above, in the two locations determined by Eq. (10), it is impossible to achieve appropriate control performance with proportional or derivative-proportional feedback controllers. However, it is still possible to achieve a performance close to that of the LQR controller with the simultaneous displacement feedback of both points. To achieve the best combination of displacement feedbacks, we employed the criterion of Eq. (11). Fig. 5 shows the variations of the criterion $COS3$ versus the proportional feedback gains ratio. According to this figure, we get the maximum value of $COS3$ in the gains ratio $K_{P2} / K_{P1} = -1.1$ that is equal to 0.89 and relatively close to the ideal value 1. Hence, a hybrid proportional control with a gains ratio $K_{P2} / K_{P1} = -1.1$ was used to control the plate flutter at dynamic pressure $\lambda = 290$. Fig. 6 illustrates the corresponding control performance for $K_{P1} = 1800000$. According to the obtained maximum voltage and the settling time, the performance of the controller is acceptable and comparable to that of the LQR controller (Figure 3).

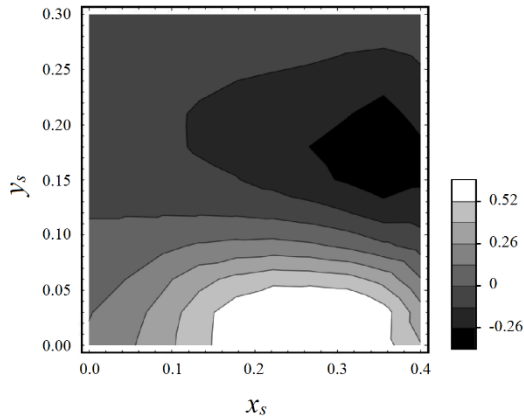


Figure 4. Variations of the COS1 criterion versus the position of the sensor

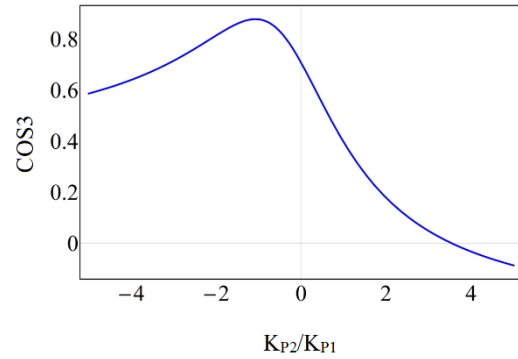


Figure 5. Variations of the COS3 criterion versus proportional feedback gains ratio

4. Conclusion

In many theoretical studies published on plate flutter control, piezoelectric patches are used as actuators. The applied voltage is commonly defined using states' vector feedback, which is to be estimated. However, in practice, this increases the cost and complexity of execution. In the present study, we tried to find appropriate vibration sensor locations for suppressing the plate supersonic flutter using the SOP method. The LQR controller is used as the reference controller to find the best sensor points for displacement feedback. Then, a criterion is introduced to find the sensor points that combined displacement feedback gives the closest control performance with the LQR controller. Numerical simulations confirm that an acceptable control performance is achievable, using the introduced criterion to find the sensor locations. The method presented here may only be applicable to specific problems, such as plates' vibration control, where the position of the sensors is arbitrary and may not be useable for other control problems.

This study also showed that thin plate theory does not provide reliable results for simulating plate flutter control with piezoelectric patches since it assumes shear stresses to be negligible.

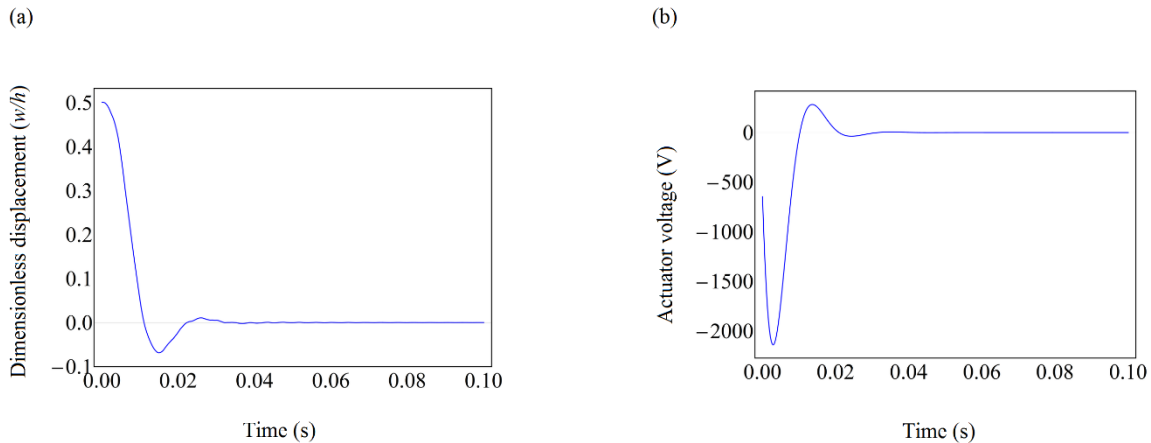


Figure 6. Time response simulated using Mindlin theory and the combined SOF controller (combined displacement feedback of points $(x_s, y_s) = (0.28, 0)$ and $((x_s, y_s) = (0.36, 0.21))$ for $\lambda = 290$.



جایابی بهینه سنسورها برای فیدبک خروجی استاتیک جهت کنترل فلاتر ورق ها در جریان سوپرسونیک

سیروان فرهادی الف^{*}، کامران اسدی ب[‡]

الف استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه کردستان، سنندج، ایران، s.farhadi@uok.ac.ir

ب کارشناسی ارشد، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه کردستان، سنندج، ایران، dlinch221@gmail.com

واژگان کلیدی	چکیده
فلاتر ورق، کنترل فعال، تخمینگر فضای حالت، وصله پیزوالکتریک.	گسترش استفاده از سازه‌های سبک وزن و انعطاف‌پذیر در صنایعی مانند هوافضا و استفاده روزافزون از ورق‌های نازک در این سازه‌ها که به سادگی در جریان‌های سریع هوا دچار فلاتر و ناپایداری می‌گردند، استفاده از روش‌های کنترل فعال و غیرفعال برای کنترل فلاتر را گریزناپذیر نموده است. در پژوهش حاضر، با بررسی معادلات حاکم و به‌کارگیری روش SOF (فیدبک خروجی استاتیک)، سعی شده است حسگرهای ارتعاش را برای نزدیک‌ترین عملکرد به کنترل‌کننده LQR جایابی نماییم. برای این کار، یک ورق مستطیلی که در معرض جریان سوپرسونیک قرار دارد، در نظر گرفته شده و برای کنترل ارتعاشات ورق از یک وصله پیزوالکتریک استفاده شده است. برای شبیه‌سازی ورق از تئوری ون کارمن و تئوری ورق نسبتاً ضخیم میندلین، و برای مدل‌سازی جریان هوا تئوری مرتبه اول پیستون به کار گرفته شده است. معادلات حرکت با استفاده از روش لاگرانژ و تقریب میدان جابجایی توسط سری‌های توانی محدود به دست آمده‌اند. سپس معیاری برای یافتن نقاطی که ترکیب فیدبک جابجایی آن‌ها می‌تواند نزدیک‌ترین عملکرد کنترلی را در مقایسه با کنترلر LQR ایجاد نماید، ارائه شده است. در نهایت با شبیه‌سازی عددی کارایی معیار به دست آمده مورد ارزیابی و تأیید قرار گرفته شده است. نتایج به دست آمده نشان می‌دهد که با فیدبک ترکیب مشخصی از جابجایی نقاط خاصی از ورق می‌توان فلاتر ورق را در سرعت‌هایی بیش از دو برابر سرعت بحرانی ورق نیز به شکل مؤثری کنترل نمود. این روش با وجود حذف تخمینگر متغیرهای حالت، عملکردی قابل مقایسه با کنترلر LQR ارائه می‌دهد.
تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۰۲/۰۵	
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۱/۰۲/۰۹	
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۰۲/۲۷	

۱- مقدمه

در سال‌های اخیر استفاده از سازه‌های سبک‌وزن و انعطاف‌پذیر در صنایعی مانند صنایع هوافضا گسترش روزافزونی یافته است. ورق‌های نازک از جمله اجزایی هستند که در این نوع سازه‌ها مورد استفاده بسیار زیادی قرار گرفته‌اند. استفاده از این گونه اجزا موجب می‌شود که سازه‌ها در حضور جریان‌های هوا به سادگی دچار ارتعاش و ناپایداری گردند. این مسئله استفاده از روش‌های کنترل فعال و غیرفعال برای کنترل عملکرد این گونه سازه‌ها را گریزناپذیر نموده است. کنترل ارتعاشات سازه‌ها با استفاده از مواد هوشمند زمینه‌ای است که در دهه‌های گذشته مورد توجه محققان بسیاری قرار گرفته است. در این میان مواد پیزوالکتریک به دلیل قابلیت‌های چشمگیر آن‌ها، توجه بسیاری را به خود معطوف داشته‌اند.

پیزوالکتریک‌ها موادی هستند که هنگامی تحت کشش و یا فشار قرار می‌گیرند، پولاریزه شده و تولید ولتاژ می‌نمایند (خاصیت سنسوری) و زمانی که در یک میدان الکتریکی قرار می‌گیرند، متناسب با پولاریته میدان تغییر شکل می‌دهند (خاصیت محرکی). در بسیاری از مطالعات تئوریک و تجربی که در زمینه کنترل ارتعاش ورق منتشر شده است، از وصله‌های پیزوالکتریک که بر روی سطح ورق تعبیه شده‌اند، به عنوان محرک استفاده شده است. از آنجایی که این وصله‌ها می‌توانند مودهای ارتعاشی مختلفی را تحت تأثیر قرار دهند، ولتاژ اعمالی به این وصله‌ها را به صورت ترکیبی از فیدبک متغیرهای دینامیکی مختلف سازه در نظر می‌گیرند. از این رو تخمین متغیرهای مختلف حالت، در رفتار سیستم کنترلی دارای اهمیت بسیار زیادی است. از سوی دیگر استفاده از یک تخمین‌گر متغیرهای حالت، موجب افزایش هزینه و پیچیدگی‌های اجرایی می‌گردد. در مطالعه حاضر تلاش شده است که با بررسی و مطالعه معادلات حاکم، محل مناسب برای سنسورهای ارتعاشی را به گونه‌ای انتخاب کرد که بتوان بدون استفاده از تخمین‌گر، با فیدبک مستقیم سیگنال خروجی سنسورها ناپایداری ورق‌های نازک در جریان سوپرسونیک را به شکل مؤثری کنترل نمود.

بایلی و هوپارد [۱] نخستین کسانی بودند که استفاده از مواد پیزوالکتریک برای کنترل ارتعاشات را مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها با استفاده از محرک‌های پلیمری پیزوالکتریک یک میرا کننده فعال ارتعاشات برای یک تیر طراحی نمودند. هاگوود و ون فلوتو [۲] از یک لایه پیزوالکتریک و یک مدار الکتریکی غیرفعال برای جذب و میرا کردن ارتعاشات سازه‌های مکانیکی استفاده نمودند. اگنس [۳] شبکه‌های ترکیبی فعال- غیرفعال پیزوالکتریک را برای کنترل ارتعاشات بکار گرفت. از آن زمان تاکنون روش‌های کنترل فعال، غیرفعال و ترکیبی بسیاری برای کنترل ارتعاشات سازه‌های هوشمند بکار گرفته شده است.

در فرآیند طراحی سازه‌های هوشمند برای به دست آوردن یک عملکرد کنترلی مناسب، مکان‌یابی بهینه محرک‌ها دارای اهمیت بسیار زیادی است. تاکنون روش‌های گوناگونی برای یافتن موقعیت بهینه محرک‌های پیزوالکتریک توسط محققان ارائه شده است. سدری و همکاران [۴] برای مکان‌یابی بهینه وصله‌های پیزوالکتریک، دو معیار بر اساس کنترل‌پذیری مودال و گرامین کنترل‌پذیری معرفی نمودند. روچا و همکاران [۵] از روش نرم ∞ OH برای تعیین موقعیت بهینه سنسورها و محرک‌ها استفاده نمودند. کیو و همکاران [۶] با استفاده از نرم H_2 یک روش موقعیت‌یابی بهینه برای ایجاد بیشترین کنترل‌پذیری و مشاهده‌پذیری پیشنهاد نمودند.

فرهادی و هاشمی [۷] برای نسبت‌های ابعادی مختلف وصله، مکان بهینه وصله پیزوالکتریک را برای کنترل چهار مود ارتعاشی ورق به منظور دستیابی به بهترین حالت کنترل‌پذیری مورد بررسی قرار دادند. در مطالعه‌ای دیگر، آن‌ها مکان بهینه وصله پیزوالکتریک برای کنترل رفتار آیرولاستیک ورق‌ها را مطابق معیارهای کنترل‌پذیری و پایداری دینامیکی مورد بررسی قرار دادند [۸]. در آن مطالعه، به منظور کنترل فعال ارتعاشات القایی، دو طرح کنترلی مورد استفاده قرار گرفته شده است. در طرح اول تنها متغیرهای حالت متناظر با شکل مودهای اول فیدبک داده شده‌اند. در روش دوم کنترل‌کننده LQR^1 با فیدبک کلیه متغیرهای حالت مورد استفاده قرار گرفته است. این روش‌های کنترلی نیازمند استفاده از تخمین‌گر متغیر حالت سیستم می‌باشند.

موضوع کنترل فلاتر ورق‌ها به روش‌های کنترل فعال و غیرفعال همچنان یکی از موضوعات مورد علاقه محققان است و در سال‌های اخیر نیز روش‌های گوناگونی برای این موضوع پیشنهاد شده و مورد بررسی قرار گرفته‌اند. به عنوان نمونه، ژو و همکاران [۹] به بررسی خواص فلاتر و کماتش حرارتی ورق‌های پیزوالکتریک FGM^2 در جریان سوپرسونیک پرداختند و کنترل فعال فلاتر در دماهای مختلف را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها برای کنترل فلاتر ورق از کنترلر LQR استفاده کردند. نتایج شبیه‌سازی ارائه شده نشان می‌دهد که این روش می‌تواند تا حد زیادی پایداری دینامیکی ورق‌های $FGPM^3$ را در جریان هوای مافوق صوت و محیط با دمای بالا بهبود بخشد. کوراکوسه و سربهاری [۱۰] پیامدهای آسیب‌های وارده بر صفحات کامپوزیتی چندلایه را بر ویژگی‌های فلاتر آن‌ها مورد بررسی قرار دادند. سپس روشی برای بازیابی آن ویژگی‌های کاهش‌یافته با کمک وصله‌های

¹ Linear Quadratic Regulator

² Functionally Graded Material

³ Functionally Graded Piezoelectric Material

پیزوالکتریک ارائه نمودند. آن‌ها مدل المان محدود مربوطه را برای تجزیه و تحلیل فلاتر ورق‌های کامپوزیت هوشمند دارای نقص داخلی استخراج کردند. پس از آن، ویژگی‌های فلاتر برای جهت‌گیری‌های مختلف فیبر، پارامترهای مختلف آسیب و مکان‌های وصله پیزوالکتریک را به دست آوردند و با استفاده از روش کنترل غیرفعال و به صورت تجربی، با اعمال ولتاژ کوچکی به وصله‌های پیزوالکتریک تلاش نمودند سرعت فلاتر را به مجدداً مقادیر اولیه افزایش دهند. تیان و همکاران [۱۱] کنترل غیرفعال فلاتر ورق‌های فراماده را به کمک جاذب‌های ارتعاشی محلی مورد بررسی قرار دادند. سواين و همکاران [۱۲] تأثیر لایه‌لایه شدن را بر ویژگی‌های فلاتر ورق‌های کامپوزیتی بررسی نمودند و کنترل فلاتر آن‌ها به کمک وصله‌های هوشمند را مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها مدل ساختاری سیستم را با استفاده از تئوری رایسنر-میندلین استخراج نمودند. سپس تأثیر محل پوسته‌پوسته شدن را بر ویژگی‌های فلاتر ورق چندلایه با شرایط مرزی مختلف مورد بررسی قرار دادند و تلاش نمودند با روش کنترل فعال، سرعت فلاتر را افزایش دهند.

در بیشتر مسائل کنترلی که شامل تعداد زیادی از متغیرهای حالت هستند، برای پایدارسازی سیستم و همچنین داشتن بهترین عملکرد کنترلی از روش LQR و یا LQG^4 استفاده می‌شود. در این دو روش ضرایبی از متغیرهای حالت سیستم به‌عنوان سیگنال کنترلی فیدبک داده می‌شوند. اما بسیاری اوقات متغیرهای حالت سیستم را نمی‌توان مستقیماً به دست آورد و باید آن‌ها را با کمک داده‌های به‌دست‌آمده از سنسورهای جایابی، سرعت و یا شتاب تخمین زد. این کار نیازمند استفاده از یک کامپیوتر بسیار سریع برای انجام محاسبات در زمان بسیار کم است تا بتوان با تأخیر زمانی ناچیز متغیرهای حالت را فیدبک داد. ضمن آنکه خطاهای عددی نیز می‌توانند موضوع را پیچیده‌تر نمایند. در نتیجه در مسائل واقعی کنترل فلاتر و ایروالاستیسیت، پیشنهاد می‌شود از روش‌های فیدبک خروجی استاتیک یا SOF^5 استفاده شود که بر مبنای فیدبک مستقیم داده‌های حسگرها می‌باشند. پاتیل و هودگس [۱۳] نخستین کسانی بودند که این موضوع را مورد توجه قرار دادند و کنترل فلاتر ایروالاستیک یک بال بلند را به روش SOF مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها نشان دادند که با استفاده از این روش می‌توان فلاتر بال را در سرعت‌هایی نزدیک به سرعت بحرانی بال، به شکل مؤثری کنترل نمود. در آن تحقیق اگرچه اثر محل قرارگیری سنسورها بر عملکرد کنترلی نیز در حالت‌های خاصی بررسی شده بود، اما هیچ روشی برای بهینه‌یابی مکان سنسورها پیشنهاد نشده بود. در سال‌های اخیر، این روش در مطالعات بسیاری برای کنترل فلاتر مورد استفاده قرار گرفته است و روش‌های زیادی بر مبنای آن پیشنهاد شده است. به‌عنوان نمونه، دردل و بختیاری نژاد [۱۴] کنترل فلاتر ورق‌های یکسر گیردار در جریان مادون صوت را با استفاده از روش SOP بهینه انجام دادند و نتایجی قابل‌مقایسه با روش LQR به دست آوردند. در آن تحقیق، متغیرهای حالت سیستم به دو بخش متغیرهای سازه‌ای که قابل‌اندازه‌گیری هستند و متغیرهای آیرودینامیک که غیرقابل‌اندازه‌گیری هستند، تقسیم شده بودند. در مرجع مذکور، چگونگی اندازه‌گیری متغیرهای سازه‌ای شرح داده نشده است. اما بدون شک این کار بدون نیاز به حسگر و تخمینگر متغیرهای حالت امکان‌پذیر نیست. سینگ و همکاران [۱۵] تلاش نمودند با تخمین برخی از متغیرهای حالت به‌وسیله سنسورهای کار گذاشته‌شده در بال‌هایی با شکل‌های مختلف، فلاتر آیرودینامیک آن‌ها را به روش فیدبک خروجی استاتیک کنترل نمایند. به‌عنوان نمونه‌های دیگری از کارهای اخیر می‌توان به مراجع [۱۶-۱۸] اشاره کرد.

با مطالعه مقاله‌هایی که تاکنون منتشر شده‌اند، به نظر می‌رسد مکان‌یابی بهینه سنسورها برای فیدبک خروجی استاتیک مورد بررسی محققان قرار نگرفته است. در این کار موضوع کنترل فعال فلاتر ورق‌ها در جریان سوپرسونیک مورد توجه قرار گرفته است و به روشی ابتکاری تلاش شده است که با جایابی مناسب سنسورها بر روی سطح ورق، به روش SOF یک کنترلر تناسبی برای ورق طراحی شود که عملکردی در سطح روش کنترلر LQR ارائه نماید. به این منظور لازم است محل سنسورها را به شکلی تعیین نمود که بدون نیاز به یک تخمین‌گر فضای حالت، ناپایداری ورق‌های را در جریان سوپرسونیک به شکل مؤثری کنترل نمود. دستیابی به چنین موقعیت‌هایی موجب می‌شود در مسائل واقعی پیچیدگی‌های اجرایی به شکل مؤثری کاهش یابند. برای این کار یک ورق مستطیلی که در معرض جریان سوپرسونیک قرار دارد، در نظر گرفته می‌شود. برای مدل‌سازی سیستم، از تئوری‌های ورق نازک ون کارمن^۶ و ورق نسبتاً ضخیم میندلین^۷ استفاده می‌شود. تئوری ورق نازک نسبت به دیگر تئوری‌های

⁴ Linear Quadratic Gaussian regulator

⁵ Static Output Feedback

⁶ von Karman

⁷ Mindlin

مربوطه دارای تعداد درجات آزادی و در نتیجه متغیرهای حالت بسیار کمتری است. برای اطمینان از دقت نتایج ارائه شده توسط تئوری ورق نازک، نتایج آن با تئوری ورق نسبتاً ضخیم میندین مقایسه می‌گردد. برای مدل‌سازی فشار جریان هوا از تئوری مرتبه اول پیستون استفاده می‌شود. معادلات حرکت با استفاده از روش لاگرانژ و تقریب میدان جابجایی توسط سری‌های توانی محدود به دست می‌آید. سپس، با انتقال معادلات حرکت به فضای حالت و فیدبک جابجایی و سرعت جابجایی نقاط مشخصی از ورق، امکان کنترل ارتعاشات ورق در حالت‌های مختلف مورد بررسی قرار گرفته است.

برای یافتن بهترین نقاط جهت فیدبک جابجایی، کنترلر LQR به‌عنوان کنترلر مرجع مورد استفاده قرار گرفته شده است. چنانکه گفته شد، در یک کنترلر LQR ضرایبی از متغیرهای حالت سیستم به‌عنوان سیگنال کنترلی فیدبک داده می‌شوند. از طرفی چنانکه در مدل‌سازی ریاض سیستم خواهیم دید، بردار متغیرهای حالت سیستم به شکلی نماینده جابجایی و سرعت جابجایی جانبی نقاط مختلف ورق است. با توجه به این موضوع، در این کار سعی می‌گردد یک کنترلر تناسبی-مشتقی به شکلی معرفی گردد که نزدیک‌ترین رفتار ممکن با کنترلر LQR را داشته باشد. کلید این موضوع در مکان‌یابی مناسب حسگرها می‌باشد. به این منظور، ولتاژ اعمالی به وصله پیزوالکتریک را به‌صورت ترکیبی خطی از جابجایی و سرعت جابجایی نقطه‌ای دلخواه از ورق در نظر می‌گیریم. سپس، مختصات مربوطه را به گونه‌ای تعیین خواهیم کرد که بردار مختصات تعمیم یافته و مشتق زمانی آن که متناظر با جابجایی و سرعت جابجایی نقطه مورد نظر هستند، بیشترین نزدیکی ممکن را با بردار متغیرهای حالت سیستم داشته باشند. برای این کار بر اساس زاویه‌ی بین بردار ضرایب فیدبک کنترلر LQR و بردار معادل ضرایب فیدبک کنترلر مشتقی-تناسبی، معیاری را برای بهینه‌سازی موقعیت سنسورها ارائه خواهیم کرد. در نهایت با استفاده از شبیه‌سازی‌های عددی به ارزیابی عملکرد روش پیشنهادی خواهیم پرداخت.

۲- مدل‌سازی و فرمول‌بندی

شکل ۱ یک ورق یک سرگیردار با طول a ، عرض b و ضخامت h را نشان می‌دهد که در معرض جریان سوپرسونیک جانبی با سرعت V_∞ قرار دارد. بر روی این ورق یک وصله پیزوالکتریک با ابعاد a_p ، b_p و h_p در مختصات x_p ، y_p نصب شده است. این وصله به‌عنوان محرک وظیفه کنترل فعال ارتعاشات ورق را بر عهده دارد. ولتاژ اعمالی به وصله پیزوالکتریک ضریبی از جابجایی نقاط خاصی از ورق است، که تلاش می‌شود به‌صورت بهینه انتخاب شوند. در این مطالعه جابجایی این نقاط صرفاً در معادلات جایگذاری شده است و روش خاصی برای اندازه‌گیری این جابجایی‌ها پیشنهاد نشده است. در حالت کلی می‌توان از یک وصله پیزوالکتریک به‌عنوان سنسور جابجایی استفاده کرد، بدین منظور می‌بایست تأثیرات ناشی از تنش و کرنش سنسور نیز در معادلات دخیل گردد. در شکل ۱ خط $y = 0$ نشان‌دهنده‌ی لبه‌ی حمله ورق و خط $y = b$ لبه فرار ورق است.

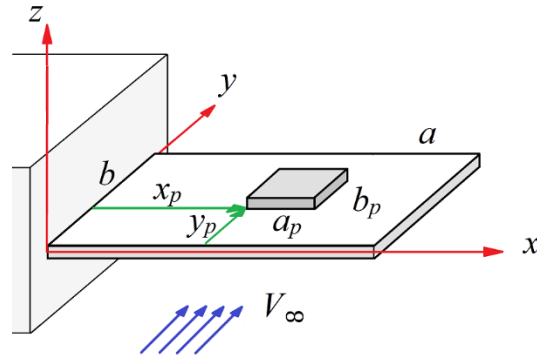
۲-۱- روابط حاکم

در مرجع [۸] معادلات دینامیکی حاکم بر ورق‌های نسبتاً ضخیم در جریان سوپرسونیک ارائه شده‌اند. در کار حاضر نیز در هنگام استفاده از تئوری ورق نسبتاً ضخیم، از همان روابط استفاده شده است. در ادامه با اعمال تغییراتی در آن روابط، معادلات دینامیکی حاکم برای تئوری ورق نازک و ن کارمن استخراج می‌گردد. برای استخراج معادلات حرکت می‌توان از روش لاگرانژ استفاده نمود:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial U}{\partial q} = Q \quad (1)$$

که در آن T انرژی جنبشی، U انرژی پتانسیل، q بردار مختصات عمومی، \dot{q} مشتق زمانی بردار مختصات عمومی و Q بردار نیروهای تعمیم یافته است. انرژی کرنشی کل سازه از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon^T \sigma dV + \frac{1}{2} \int_{V_p} \varepsilon^T \sigma dV - \int_{V_p} E^T D dV \quad (2)$$



شکل ۱ ورق با وصله پیزوالکتریک در معرض جریان سوپرسونیک

در رابطه‌ی بالا σ ، ε ، E و D به ترتیب بردارهای تنش، کرنش، میدان الکتریکی و مؤلفه‌های جایابی الکتریکی هستند. V_p نیز به ترتیب حجم کل ورق و وصله‌ی پیزوالکتریک را نشان می‌دهند. مطابق تئوری ون کارمن تانسور کرنش و مؤلفه‌های آن مطابق روابط زیر تعیین می‌شوند:

$$\varepsilon = [\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{xy}]^T, \quad (3)$$

$$\varepsilon_{xx} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_{yy} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \varepsilon_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},$$

که در آن w جایابی عرضی ورق (در راستای z) است. برابر قانون هوک تنش و کرنش در مواد الاستیک به‌وسیله رابطه زیر با هم ارتباط دارند:

$$\sigma = C\varepsilon \quad (4)$$

که در آن C ماتریس ضرایب الاستیک است و برای حالت تنش صفحه‌ای در حالت کلی به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (5)$$

روابط ساختاری برای مواد پیزوالکتریک نیز به شکل زیر می‌باشند:

$$\sigma = C_p \varepsilon - e^T E \quad (6)$$

$$D = e \varepsilon + k E$$

در روابط فوق ماتریس‌های C_p ، e و k به ترتیب ماتریس ضرایب الاستیک وصله پیزوالکتریک، ضرایب پیزوالکتریک و ماتریس ثابت‌های دی‌الکتریک هستند. با فرض اعمال میدان الکتریکی تنها در راستای عرضی، مؤلفه‌های میدان الکتریکی از رابطه‌ی زیر به دست می‌آیند:

$$E = \frac{1}{h_p} \bar{E} V_3, \quad \bar{E} = [0 \quad 0 \quad -1]^T \quad (7)$$

که در آن V_3 بیانگر ولتاژ اعمالی به وصله پیزوالکتریک می‌باشد.

انرژی جنبشی کل و بردار نیروهای تعمیم‌یافته رابطه زیر به دست می‌آیند:

$$T = \frac{\rho}{2} \int_{V_p} \dot{w}^2 dV + \frac{\rho_p}{2} \int_{V_p} \dot{w}^2 dV \quad (8)$$

$$Q = \int_A P \frac{\partial w}{\partial q} dA \quad (9)$$

در روابط بالا ρ ، ρ_p و P به ترتیب چگالی ورق، چگالی وصله پیزوالکتریک و فشار آیرودینامیکی وارده از سیال به ورق است. به منظور محاسبه فشار آیرودینامیکی وارد بر ورق ناشی از جریان عبوری از تئوری مرتبه اول پیستون استفاده شده است. این تئوری برای جریان‌های پایدار با عدد ماخ بالاتر از $1/6$ فشار دینامیکی را مطابق رابطه زیر تعیین می‌کند.

$$P = -\frac{\rho_a V_\infty^2}{\beta} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1}{V_\infty} \left(\frac{M_\infty^2 - 2}{M_\infty^2 - 1} \right) \frac{\partial w}{\partial t} \right) \quad (10)$$

در روابط فوق ρ_a و M_∞ نشانگر چگالی هوا و عدد ماخ جریان هستند، و $\beta = \sqrt{M_\infty^2 - 1}$ است.

برای تقریب مؤلفه میدان جابجایی از روش تقریب ریتز استفاده می‌شود.

$$w = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M c_{i+(j-1)M} G(x, y) \Phi_i(x) \Psi_j(y), \quad G(x, y) = x^2 \quad (11)$$

در رابطه فوق $c_{i+(j-1)M}$ ثابت زمانی $\Phi_i(x)$ و $\Psi_j(y)$ توابع اختیاری و $G(x, y)$ تابع وزنی است که شرایط مرزی مسئله را ارضا می‌کند. N و M تعداد جملات تابع تقریب در راستاهای x و y هستند. رابطه تقریب فوق را می‌توان در فرم ماتریسی به شکل زیر بازنویسی کرد.

$$w = Nq, \quad q = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_{N \times M}]^T \quad (12)$$

N ، ماتریس توابع شکل و q بردار مختصات تعمیم یافته است، علاوه بر این c بردار تشکیل شده حاصل از ضرایب زمانی موجود در رابطه (۱۱) است.

با تعریف اپراتورهای ماتریسی زیر

$$L = \frac{\partial}{\partial y} N, \quad S = BN, \quad B = \left[-z \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad -z \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad -2z \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right]^T \quad (13)$$

و جایگذاری روابط ۲ تا ۱۴ در رابطه ۱، معادله حرکت تعمیم یافته به فرم زیر به دست می‌آید.

$$M\ddot{q} + C_A \dot{q} + (K + K_A)q = FV_3 \quad (14)$$

که در آن ماتریس‌های M ، K ، C_A و K_A به ترتیب ماتریس‌های جرم، سختی، استهلاک آیرودینامیک و سختی آیرودینامیک هستند و F بردار عملگر پیزوالکتریک است:

$$M = \rho \int_V N^T N dV + \rho_p \int_{V_P} N^T N dV \quad (15)$$

$$K = \int_V S^T CS dV + \int_{V_P} S^T C_P S dV$$

$$C_A = \frac{\rho_a V_\infty}{\beta} \left(\frac{M_\infty^2 - 2}{M_\infty^2 - 1} \right) \int_A N^T N dA$$

$$K_A = \frac{\rho_a V_\infty^2}{\beta} \int_A N^T L dA$$

$$F = \frac{1}{h_p} \int_{V_P} S^T e^T \bar{E} dV$$

رابطه ۱۴ را می‌توان با کمک ماتریس شکل موده‌های سیستم به فضای حالت منتقل نمود:

$$q = \Phi X \quad (۱۶)$$

که در آن X بردار متغیرهای حالت سیستم در فرم فضای مودال است. همچنین، Φ ماتریس شکل مودهای سیستم است در حالت آزاد است و هر ستون آن، نماینده یکی از بردارهای ویژه سیستم است (بردارهای ویژه مسأله $M\ddot{q} + Kq = 0$). با استفاده از این انتقال، رابطه ۱۴ به شکل زیر بازنویسی می شود:

$$\bar{M}\ddot{X} + \bar{C}_A\dot{X} + (\bar{K} + \bar{K}_A)X = \bar{F}V_3 \quad (۱۷)$$

که در آن

$$\begin{aligned} \bar{M} &= \Phi^T M \Phi, & \bar{C}_A &= \Phi^T C_A \Phi, & \bar{K} &= \Phi^T K \Phi, \\ \bar{K}_A &= \Phi^T K_A \Phi, & \bar{F} &= \Phi^T F. \end{aligned} \quad (۱۸)$$

در صورتی که از تعدادی از ستونهای ماتریس Φ حذف شوند، شکل مودهای متناظر با آنها از رفتار سیستم حذف شده و مدل کاهش یافته سیستم استخراج خواهد گردید.

۲-۲- کنترل متغیرهای حالت

برای استفاده از روش فیدبک متغیرهای حالت، با تعریف بردار متغیرهای حالت Z ، رابطه ۱۵ را در فضای حالت بازنویسی می کنیم:

$$\begin{aligned} \dot{Z} &= AZ + BV_3, & Z &= \begin{Bmatrix} \dot{X} \\ X \end{Bmatrix}, \\ A &= - \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} C_A & K + K_A \\ -I & 0 \end{bmatrix}, & B &= \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (۱۹)$$

ملاحظه می گردد بردار متغیرهای حالت سیستم از ترکیب بردار مختصات تعمیم یافته و مشتق زمانی آن تشکیل شده است و بنابراین می توان آن را تابعی از جایابی و سرعت جایابی نقاط مختلف ورق دانست. در یک کنترلر LQR ضرایبی از متغیرهای حالت سیستم به عنوان سیگنال کنترلی فیدبک داده می شوند:

$$V_3 = -K_C Z = -K_1 \dot{X} - K_2 X \quad (۲۰)$$

که در آن K_C ماتریس ضرایب بهره است و زیر ماتریسهای K_1 و K_2 هر کدام بخشی از ماتریس ضرایب بهره هستند ($K_C = [K_1 \quad K_2]$) که به ترتیب نماینده ضرایب مختصات تعمیم یافته و مشتقات زمانی مختصات تعمیم یافته در فرم فضای حالت می باشند. در روش LQR ماتریس ضرایب بهره با کمینه نمودن تابع هدف زیر به دست می آید:

$$J = \int_0^t (Z^T Q Z + V_3^T R V_3) dt \quad (۲۱)$$

که در آن ماتریسهای Q و R به ترتیب ماتریسهای ضرایب وزنی متغیرهای حالت و ورودیهای کنترلی هستند. اما متغیرهای حالت سیستم را نمی توان مستقیماً به دست آورد و باید آنها را با کمک داده های به دست آمده از سنسورهای جایابی، سرعت و یا شتاب تخمین زد. این کار نیازمند استفاده از یک کامپیوتر بسیار سریع برای انجام محاسبات در زمان بسیار کم است تا بتوان با تأخیر زمانی ناچیز متغیرهای حالت را فیدبک داد. ضمن آنکه خطاهای عددی نیز می توانند موضوع را پیچیده تر نمایند. چنانکه گفته شد، بردار متغیرهای حالت سیستم به شکلی نماینده جایابی و سرعت جایابی جانبی نقاط مختلف ورق است. با توجه به این موضوع در سعی می گردد یک کنترلر تناسبی-مشتقی به شکلی معرفی گردد که نزدیک ترین رفتار ممکن با کنترلر LQR را داشته باشد. کلید این موضوع در مکان یابی مناسب حسگرها می باشد. به این منظور، لتاز اعمالی به وصله پیزوالکتریک را به صورت ترکیبی خطی از جایابی و سرعت نقطه ای دلخواه به مختصات (x_s, y_s) در نظر می گیریم:

$$V_3 = -K_P (w(x_s, y_s) + T_d \dot{w}(x_s, y_s)) \quad (۲۲)$$

که در آن K_P و T_d ضریب تناسب و ثابت زمانی کنترلر هستند. با استفاده از رابطه های ۱۲، ۱۶ و ۱۹، معادله بالا را می توان

به شکل زیر نیز بیان کرد:

$$V_3 = -K_P K_S Z, \quad K_S = [T_d N|_{x_s, y_s} \phi \quad N|_{x_s, y_s} \phi]. \quad (23)$$

اگر بتوانیم موقعیت سنسور را به گونه‌ای تعیین نماییم که $K_P T_d N|_{x_s, y_s} \phi = K1$ و همچنین $K_P N|_{x_s, y_s} \phi = K2$ باشد، در این صورت کنترلر تناسبی- مشتقی دقیقاً معادل کنترلر LQR خواهد بود. در عمل این کار ممکن است امکان‌پذیر نباشد. اما می‌توانیم از بیشینه نمودن معیارهای زیر که بر اساس زاویه بین بردارهای مورد بحث تعریف شده‌اند، برای رسیدن به کمترین اختلاف بین بردارهای مورد بحث استفاده نماییم:

$$COS1 = \frac{(N|_{x_s, y_s} \phi) K1^T}{\|N|_{x_s, y_s} \phi\| \|K1\|}, \quad COS2 = \frac{(N|_{x_s, y_s} \phi) K2^T}{\|N|_{x_s, y_s} \phi\| \|K2\|} \quad (24)$$

پس از تعیین موقعیت بهینه احتمالی برای جابجایی سنسور جابجایی برای فیدبک مشتقی-تناسبی، مقادیری از Td را تعیین می‌کنیم که بیشترین نزدیکی بین بردار ضرایب فیدبک K و K_S از روابط ۲۰ و ۲۳ را ایجاد می‌نماید. این کار با بیشینه نمودن معیار زیر انجام می‌گردد:

$$COS3 = \frac{K_S K_C^T}{\|K_S\| \|K\|} \quad (25)$$

در بخش ۳-۲، روش تعیین ضریب تناسب و ثابت زمانی به تفصیل مورد بحث قرار گرفته است.

۳- نتایج

۳-۱- صحت سنجی روابط حاکم

در مباحث مربوط به آیروالاستیسیته، رفتار یک سیستم معمولاً بر حسب کمیت بدون بعد فشار دینامیکی (λ) بیان می‌شود که با رابطه زیر مشخص می‌شود:

$$\lambda = \frac{\rho_a V_{\infty}^2 a^3}{D}, \quad D = \frac{C_{11} h^3}{12} \quad (26)$$

که در آن C_{11} اولین درایه از ماتریس سختی ورق، D سختی خمشی ورق و h ضخامت آن است. همان گونه که از روابط پیداست، این کمیت وابسته به چگالی سیال عبوری، سرعت جریان، و جنس و ابعاد ورق می‌باشد. برای محاسبه فشار دینامیکی ورق در غیاب ولتاژ کنترلی، با فرض هارمونیک بودن بردار مختصات تعمیم‌یافته ($q = \bar{q} e^{i\omega t}$) و جایگذاری آن در رابطه‌ی ۱۵، به مسئله مقدار ویژه زیر می‌رسیم:

$$(M\alpha^2 - C_A \alpha + K + K_A) \bar{q} = 0 \quad (27)$$

در حالت کلی جواب رابطه بالا به صورت مختلط و به فرم زیر است:

$$\alpha = \eta + i\omega \quad (28)$$

با حل رابطه ۲۷ برای مقادیر مختلف فشار دینامیکی، ملاحظه می‌شود که در مقادیر کوچک λ ، بخش حقیقی مقدار ویژه (η) که نشان‌دهنده‌ی نرخ استهلاک ارتعاشات ورق است، منفی می‌باشد. این بدان معناست که ارتعاشات ورق مستهلک شده و ورق پایدار است. با افزایش فشار دینامیکی و عبور از یک مقدار مشخص که معمولاً با عنوان فشار دینامیکی بحرانی شناخته می‌شود (λ_{cr}) کمیت η مثبت شده و ورق وارد ناحیه ناپایدار می‌شود. به منظور صحت سنجی مدل سازی‌های انجام شده، برای دو حالت بدون وصله و با یک وصله آلومینیمی، فشار بحرانی ورق محاسبه شده و با نتایج مرجع [۸] که با تئوری ورق میندلین به دست آمده‌اند، مقایسه شده است. نتایج حاصله با تعریف مقادیر بدون بعد و انتخاب توابع شکل زیر به دست آمده‌اند:

$$\Phi_1(x) = x^j, \quad \Psi_1(y) = y^{i-j},$$

$$\eta = \frac{h}{a}, \quad \delta = \frac{a}{b}, \quad \bar{a} = \frac{a_p}{a}, \quad \bar{b} = \frac{b_p}{b} \quad (29)$$

$$\bar{h} = \frac{h_p}{h}, \quad X = \frac{X_p}{a}, \quad Y = \frac{Y_p}{b}, \quad \mu = \frac{b\rho_a}{h\rho}$$

همچنین برای انجام این مقایسه از کمیت های ابعادی زیر استفاده شده است:

$$a = 0.4 \text{ m}, \quad \delta = 4/3, \quad \eta = 0.01, \quad \bar{a} = 1/4, \quad \bar{b} = 5/30, \quad \bar{h} = 1/4 \quad (30)$$

در این مطالعه برای مدل سازی ورق آلومینیومی و وصله پیزوالکتریک PZT5H از خصوصیات فیزیکی ذکر شده در جدول ۱ استفاده شده است. جدول ۲ فشار بحرانی به دست آمده برای ورق آلومینیومی بدون وصله را در مقایسه با نتایج مرجع [۸] نشان می دهد. ملاحظه می شود که اختلاف نتایج به دست آمده در حدود یک درصد است که با توجه به اختلاف تئوری های استفاده شده، دارای دقت بسیار خوبی است. مقادیر فشار دینامیکی بحرانی برای جانمایی های مختلف وصله ی پیزوالکتریک و وصله ی آلومینیومی در شکل ۲ نشان داده شده است که با اندکی اختلاف، قابل مقایسه با شکل ۲ از مرجع [۸] است.

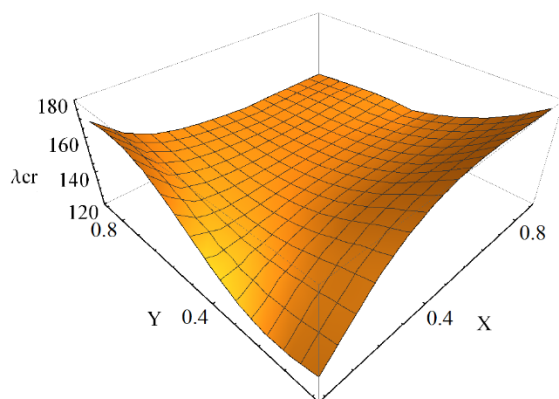
جدول ۱ خواص ورق اصلی و وصله پیزو الکتریک

$\rho(\frac{kg}{m^3})$	$C_{66}(GPa)$	$C_{22}(GPa)$	$C_{12}(GPa)$	$C_{11}(GPa)$	
2700	26.92	76.92	23.08	76.92	آلومنیوم
7740	22.99	135.8	85.66	130.6	PZT5H

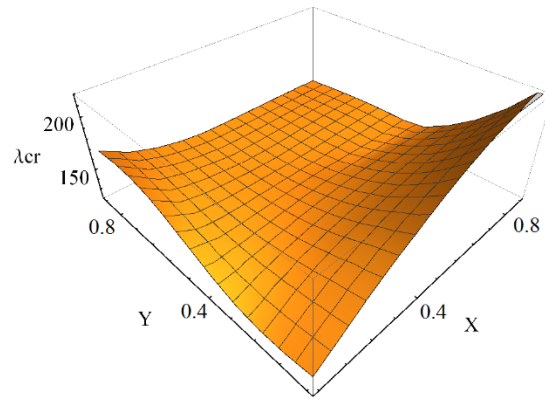
جدول ۲ مقایسه فشار بحرانی محاسبه شده در تحقیق حاضر و مقدار موجود

اختلاف به درصد	مقدار مرجع [۸] (تئوری ورق میندین)	محاسبه شده (تئوری ورق نازک)	فشار بحرانی ورق
1.043	143.8	145.3	

(a) with Al-patch



(b) with piezo-patch



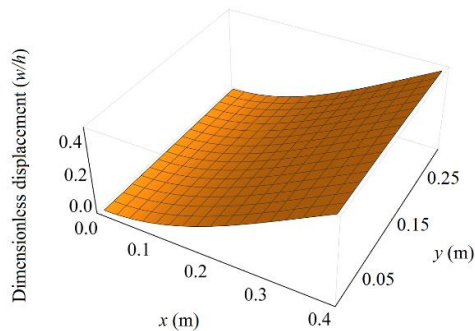
شکل ۲ فشار بحرانی محاسبه شده بر حسب جانمایی های مختلف وصله الف- برای یک وصله پیزوالکتریک، ب- برای یک وصله آلومینیومی

۲-۳- نتایج عددی

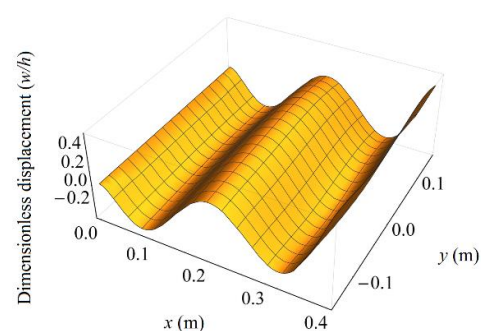
به منظور انتخاب مکان وصله پیزوالکتریک، با استفاده از نتایج حاصل از مرجع شماره [۸]، موقعیت $(x_p = 57/80, y_p = 0)$ به عنوان موقعیت بهینه وصله پیزوالکتریک محرک انتخاب شده است. در آن مرجع، این موقعیت بر اساس معیار پایداری دینامیکی به دست آمده است. پس از تعیین موقعیت وصله پیزوالکتریک، در ابتدا با بهره گیری از مدل ورق نازک و ورق ضخیم، پایداری سازی فلاتر ورق در فشار دینامیکی $\lambda = 290$ به وسیله فیدبک جایجایی نقاط مختلف مورد بررسی قرار گرفته است. به این منظور در رابطه ۲۲ ثابت T_d را برابر صفر قرار داده و با افزایش ضریب K_p تلاش شده است تا ورق پایدار شود. به منظور محاسبه ولتاژ مورد

نیاز، ضریبی از مود ارتعاشی نخست ورق (که در تقابل با جریان هوا مستعد ناپایداری است) به عنوان شرایط اولیه در نظر گرفته شده است، به گونه‌ای که جابجایی یک نقطه مشخص از ورق ($x = a, y = b/4$) برابر نصف ضخامت ورق باشد ($w/h = 0.5$). شکل ۳-الف جابجایی اولیه ورق را نشان می‌دهد. ولتاژ اعمالی مورد نیاز در زمان صفر جهت پایداری ورق در فشارهای دینامیکی مختلف و بر اساس موقعیت سنسور در شکل ۴ نشان داده شده‌اند. برای تهیه این شکل، کل ورق با استفاده از یک مش بندی 11×10 تقسیم بندی شده است. شکل ۴-الف نتایج به دست آمده از تئوری ورق نازک و شکل ۴-ب نتایج حاصل از تئوری ورق نسبتاً ضخیم را نمایش می‌دهد. در این تصاویر نواحی تیره‌تر نشان‌دهنده ولتاژ مورد نیاز کمتر می‌باشد. در برخی نواحی عملاً امکان دستیابی به پایداری غیرممکن می‌باشد. ضمن آنکه در دیگر نواحی نیز با افزایش ضریب بهره، سیستم مستعد ورود دوباره به محدوده ناپایداری است. ملاحظه می‌گردد تفاوت قابل توجهی بین نتایج به دست آمده از دو تئوری مورد بحث وجود دارد. با توجه به شکل ۴-ب ملاحظه می‌گردد که نواحی که فیدبک دادن جابجایی آن‌ها نمی‌تواند منجر به کنترل فلاتر شود، بسیار گسترده‌تر از آن چیزی هستند که توسط تئوری ورق نازک پیش‌بینی می‌شود (شکل ۴-الف). همچنین این شکل نشان می‌دهد که نقاط بهینه برای فیدبک جابجایی نیز با آنچه توسط شکل تئوری ورق نازک پیش‌بینی می‌گردد، تفاوت قابل توجهی دارند. دلیل این موضوع را در ادامه مورد بحث قرار خواهیم داد.

(a) First mode shape

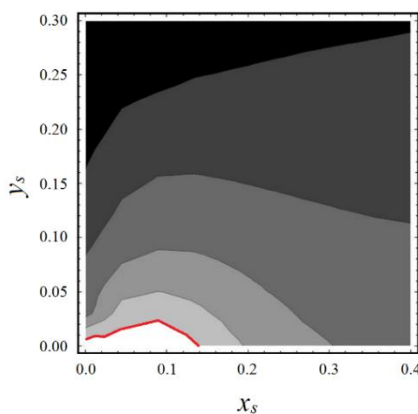


(b) 10th mode shape

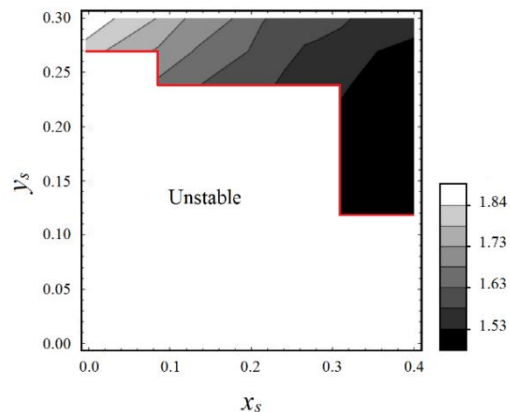


شکل ۳ شکل مود ارتعاشی اول و دهم ورق. با اعمال یک ضریب، دامنه جابجایی به گونه‌ای تنظیم شده است که بیشترین جابجایی عرضی ورق برابر نصف ضخامت آن باشد

(a) Thin plate theory



(b) Moderately thick plate theory

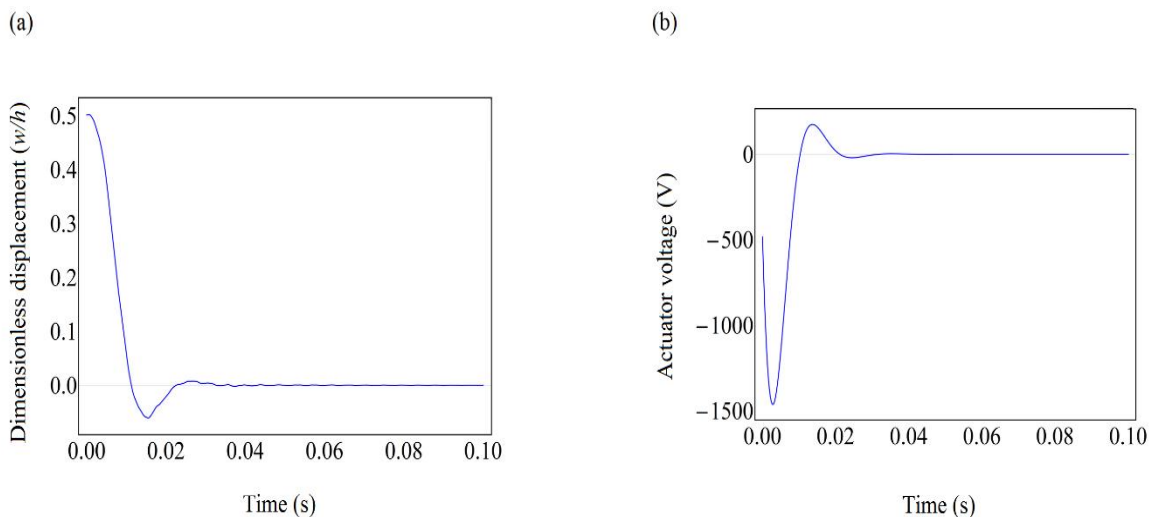


شکل ۴- ولتاژ اعمالی به وصله پیزوالکتریک (کیلو ولت) در زمان صفر برای پایداری سازی فلاتر ورق توسط فیدبک جابجایی نقاط مختلف ورق در فشار دینامیکی $\lambda = 290$

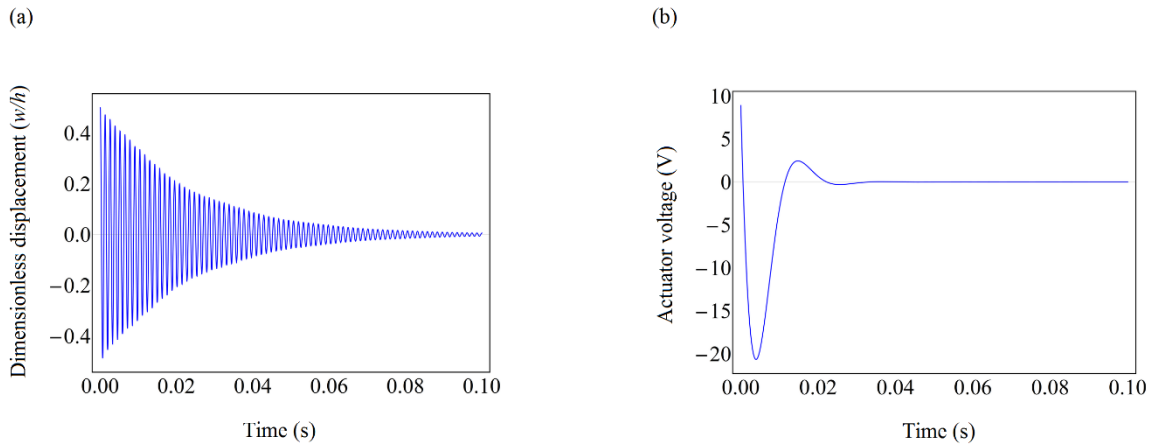
با توجه به شکل‌های ۴-الف و ۴-ب، ولتاژهای کنترلی مورد نیاز از مرتبه کیلوولت هستند. پیشتر در جدول ۸ از مرجع [۸]

گزارش شده بود که در صورت استفاده از روش کنترلی LQR و با قرار دادن وصله پیزوالکتریک در موقعیت ذکر شده، حداکثر ولتاژ عملی را می توان در حد چند ده ولت محدود نمود. برای اطمینان از صحت نتایج مرجع [۸]، در ابتدا کدهای محاسباتی آن مرجع مورد بررسی دوباره قرار گرفتند و همچنین تفاوت نتایج تئوری های ورق نازک و ورق نسبتاً ضخیم در تخمین حداکثر ولتاژ مورد نیاز، مطالعه گردیدند. در این بازبینی ها به نتایج زیر رسیدیم:

۱- در مرجع [۸] ادعا شده است که برای کنترل فلاتر ورق با استفاده از روش LQR، یک مدل دینامیکی کاهش یافته با ۱۰ درجه آزادی مورد استفاده قرار گرفته است. سپس، ضریبی از شکل مود اول ورق (شکل ۳ الف) به عنوان شرایط اولیه در نظر گرفته شده و با شبیه سازی پاسخ زمانی ورق، حداکثر ولتاژ مورد نیاز محاسبه گردیده است. با بررسی کدهای برنامه نویسی استفاده شده در آن مطالعه، مشخص گردید به دلیل یک اشتباه در برنامه نویسی، عملاً ضریبی از مود دهم (شکل ۳-ب) به عنوان شرایط اولیه مورد استفاده قرار گرفته است و چون برخلاف مود اول و دوم ارتعاشی، مود دهم مستقیماً در فلاتر ورق درگیر نیست، ولتاژهای مورد نیاز بسیار از کمتر از آنچه هستند، تخمین زده شده اند. شکل ۵ پاسخ زمانی جابجایی ورق در نقطه مورد بحث و ولتاژ عملی به وصله پیزوالکتریک را با فرض استفاده از شکل مود اول ورق به عنوان شرایط اولیه در فشار دینامیکی $\lambda = 290$ نشان می دهد. شکل ۶ همان کمیت ها را با فرض استفاده از شکل مود دهم ورق به عنوان شرایط اولیه نمایش می دهد. برای تهیه این دو شکل از فرض تئوری ورق نسبتاً ضخیم استفاده شده است. در پیاده سازی کنترلی LQR نیز مؤلفه های ماتریس های ضرایب وزنی Q و R نیز به همان شکل که در مرجع مذکور در تعریف شده بودند، در نظر گرفته شده اند. با مقایسه ولتاژهای به دست آمده در شکل های ۵ و ۶، ملاحظه می گردد که اختلاف بسیار زیادی بین ولتاژ مورد نیاز برای پایدارسازی ورق در دو شرایط اولیه مذکور وجود دارد. به عنوان مثال در شکل ۵، قدر مطلق ولتاژ عملی در زمان صفر و حداکثر ولتاژ عملی، به ترتیب برابر ۴۸۵ و ۱۴۶۳ ولت هستند، در حالی که قدر مطلق ولتاژ در زمان صفر و بیشینه ولتاژ در شکل ۶ به ترتیب برابر ۸.۹ و ۲۰.۶ ولت می باشند. اختلاف شکل ۵-الف و ۶-الف در نوع شرایط اولیه است. در شکل ۶ از مود دهم ورق به عنوان شرایط اولیه استفاده شده است و موجب ارتعاشات فرکانس بالا شده است. در هر دو صورت کنترلی جابجایی ورق را کنترل کرده و اجازه ناپایداری آیروالاستیک را نداده است.

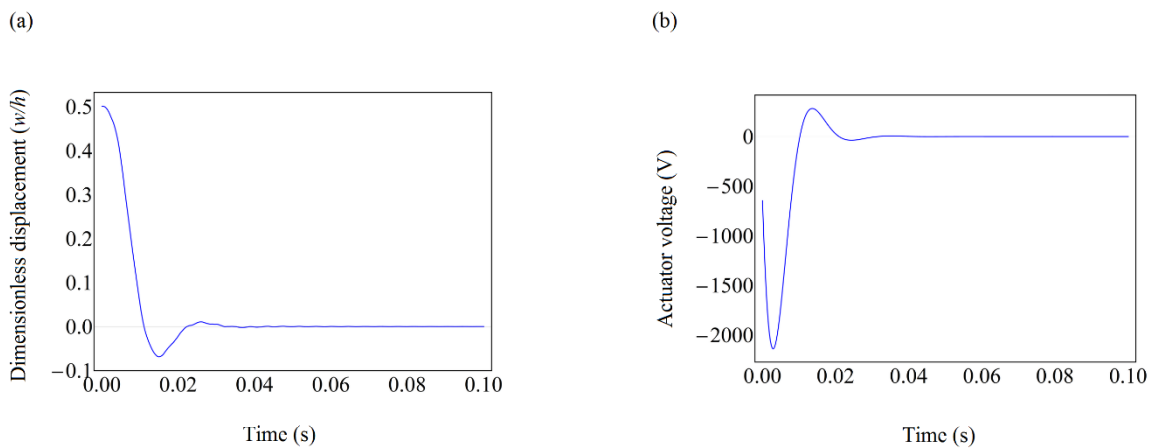


شکل ۵ پاسخ زمانی به دست آمده با تئوری ورق نسبتاً ضخیم برای جابجایی ورق (در موقعیت $(x,y)=(a,b/4)$) و ولتاژ کنترلی با فرض استفاده از کنترلی LQR. ضریبی از شکل مود اول ورق به عنوان شرایط اولیه و فشار دینامیکی $\lambda=290$ در نظر گرفته شده است.



شکل ۶ پاسخ زمانی به دست آمده با تئوری ورق نسبتاً ضخیم برای جابجایی ورق (در موقعیت $(x,y)=(a,b/4)$) و ولتاژ کنترلی با فرض استفاده از کنترلر LQR. ضریبی از شکل مود دهم ورق به عنوان شرایط اولیه و فشار دینامیکی $\lambda=290$ در نظر گرفته شده است.

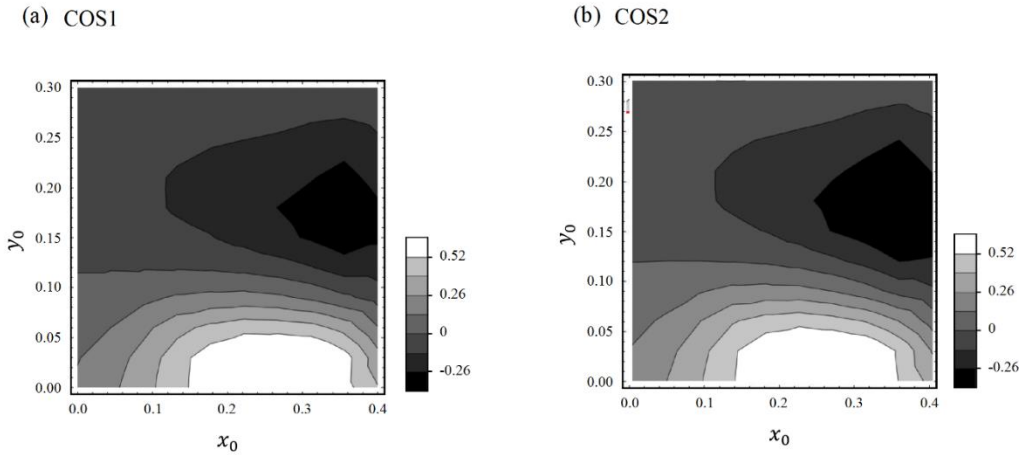
۲- تئوری ورق نازک در مقایسه با تئوری ورق ضخیم، ولتاژهای بزرگتری را برای کنترل فلاتر ورق پیش‌بینی می‌کند. دلیل این مطلب آن است که در واقعیت مسئله وصله پیزوالکتریک در هنگام انقباض یا انبساط ناشی از ولتاژهای اعمالی، توسط تنش‌های برشی ورق پایه را تحریک می‌نماید. این در حالی است که در تئوری ورق نازک، تنش‌های برشی ناچیز فرض می‌شوند و اثر آن‌ها در توسعه روابط منظور نمی‌شود. شکل ۷ پاسخ زمانی به دست آمده برای پایدارسازی فلاتر ورق را برای مثال ذکر شده در شکل ۵ نمایش می‌دهد که با استفاده از تئوری ورق نازک محاسبه شده است. چنانکه در این شکل دیده می‌شود، قدر مطلق ولتاژ کنترلی در زمان صفر و بیشترین ولتاژ کنترلی به ترتیب برابر ۶۴۷ و ۲۱۳۹ ولت هستند که در مقایسه با مقادیر پیش‌بینی شده توسط تئوری ورق نسبتاً ضخیم (شکل ۵) به ترتیب ۲۳٪ و ۴۶٪ بزرگ‌تر می‌باشند. این نتیجه این ابهام را ایجاد می‌نماید که احتمالاً دیگر نتایج به دست آمده از تئوری ورق نازک دارای اعتبار کافی نباشند. به عنوان مثال نتایج به دست آمده در شکل ۴- الف که برای ارزیابی مکان بهینه برای جایگذاری سنسور جابجایی جهت کنترل فلاتر ورق تهیه گردیده‌اند نیز مورد تردید قرار می‌گیرند. با توجه به مطالب فوق، در ادامه تنها از تئوری ورق نسبتاً ضخیم برای تهیه نتایج استفاده شده است.



شکل ۷ پاسخ زمانی به دست آمده با تئوری ورق نازک برای جابجایی ورق (در موقعیت $(x,y)=(a,b/4)$) و ولتاژ کنترلی با فرض استفاده از کنترلر LQR. ضریبی از شکل مود اول ورق به عنوان شرایط اولیه و فشار دینامیکی $\lambda=290$ در نظر گرفته شده است.

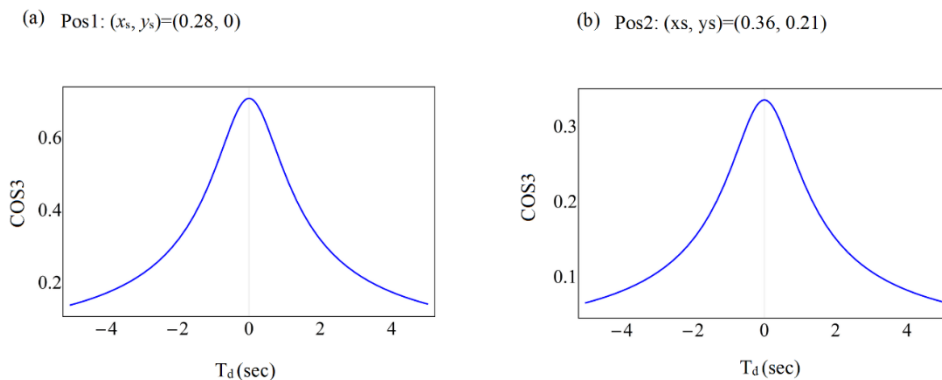
به منظور تعیین موقعیت بهینه برای فیدبک سیگنال جابجایی و سرعت ابتدا با استفاده از روش LQR ماتریس ضرایب بهینه برای کنترل متغیرهای حالت به دست آمده است. سپس با استفاده از کمینه نمودن معیارهای ارائه شده در رابطه ۲۴ بهترین

موقعیت‌های احتمالی برای قرار دادن سنسورهای جایابی جهت کنترل‌های تناسبی و مشتق استفاده شده است. شکل ۸ نتایج مربوطه را در فضای جستجو نشان می‌دهند.

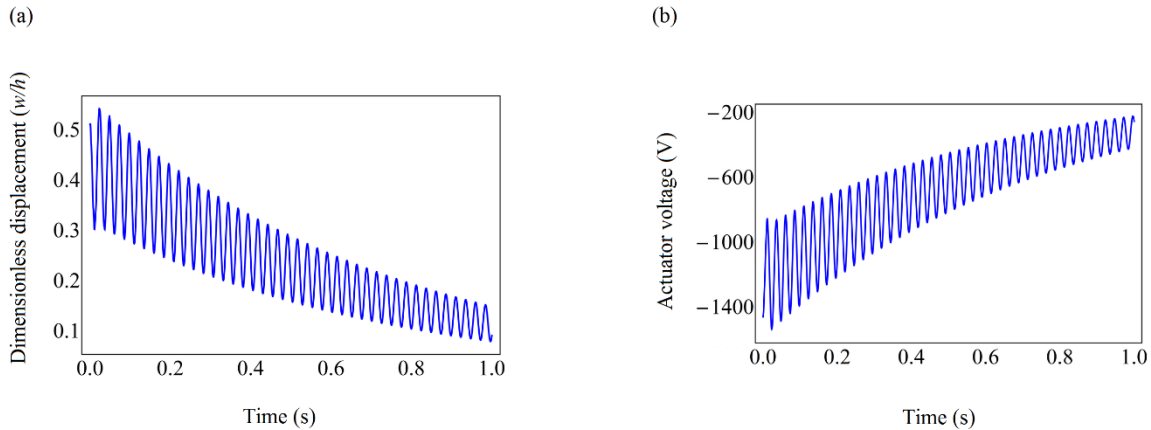


شکل ۸ تغییرات معیار COS1 و COS2 (کوسینوس زاویه بین بخش‌های مختلف بردار ضرایب فیدبک LQR و بردار ضرایب فیدبک کنترل‌های تناسبی و مشتقی) بر حسب موقعیت سنسور بر روی سطح ورق

ملاحظه می‌شود هر دو معیار COS1 و COS2 در نقاط یکسانی که عبارت‌اند از موقعیت اول $(x_s, y_s) = (0.28, 0)$ و موقعیت دوم $(x_s, y_s) = (0.36, 0.21)$ دارای بیشینه محلی هستند. در نتیجه این نقاط را می‌توان به عنوان نقاط بهینه احتمالی برای فیدبک تناسبی-مشتقی مورد بررسی قرار داد. به این منظور ابتدا با استفاده از معیار (۲۵) در این نقاط مقداری از T_d را تعیین می‌کنیم که بیشترین نزدیکی بین بردار ضرایب فیدبک K_C و K_S (مربوط به کنترل LQR و مشتقی تناسبی) را ایجاد می‌نماید. شکل ۹ نمودار تغییرات معیار COS3 را بر حسب ثابت زمانی T_d در نقاط مورد بحث نمایش می‌دهد. چنانکه در این شکل دیده می‌شود، در هر دو موقعیت مورد بحث، بیشترین مقدار COS3 زمانی به دست می‌آید که ثابت زمانی کنترل مشتقی برابر صفر باشد $(T_d=0)$ ، اما در هر صورت حداکثر مقدار COS3 از مقدار ایده آل ۱ دارای فاصله قابل توجهی است. با توجه به شکل ۴ و مطابق معیار مذکور پیشنهاد می‌شود که از یک کنترلر تناسبی خالص استفاده شود. اما چنانکه در شکل ۴ نیز دیده می‌شود، اساساً در موقعیت ۱ نمی‌توان با هیچ مقداری از ضریب فیدبک K_P نمی‌توان سیستم را پایدار نمود، هر چند که در مقادیر خاصی از K_P می‌توان به مرز پایداری بسیار نزدیک شد. این شکل همچنین نشان می‌دهد که در موقعیت ۲ می‌توان به ازای مقدار خاصی از ضریب فیدبک $(K_P = -832000)$ سیستم را پایدار نمود و با مقایسه با دیگر نقاط ورق، فیدبک جایابی این نقطه می‌تواند با کمترین مقدار ولتاژ سیستم را به پایداری برساند (شکل ۱۰). اما برای وجود یک عملکرد کنترلی مناسب، باید با افزایش ضریب تناسب فیدبک، به اندازه کافی از مرز پایداری دور شد. اما مشاهده می‌شود که با کمی افزایش K_P ، سیستم دوباره وارد محدوده ناپایداری می‌شود و در نتیجه ناحیه پایداری بسیار تنگ است.

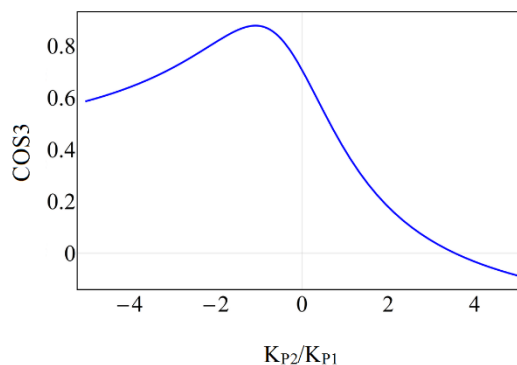


شکل ۹ تغییرات معیار COS3 (کوسینوس زاویه بین بردار ضرایب فیدبک LQR و بردار ضرایب فیدبک کنترلر تناسبی-مشتقی) بر حسب ثابت زمانی T_d در موقعیت از سطح ورق

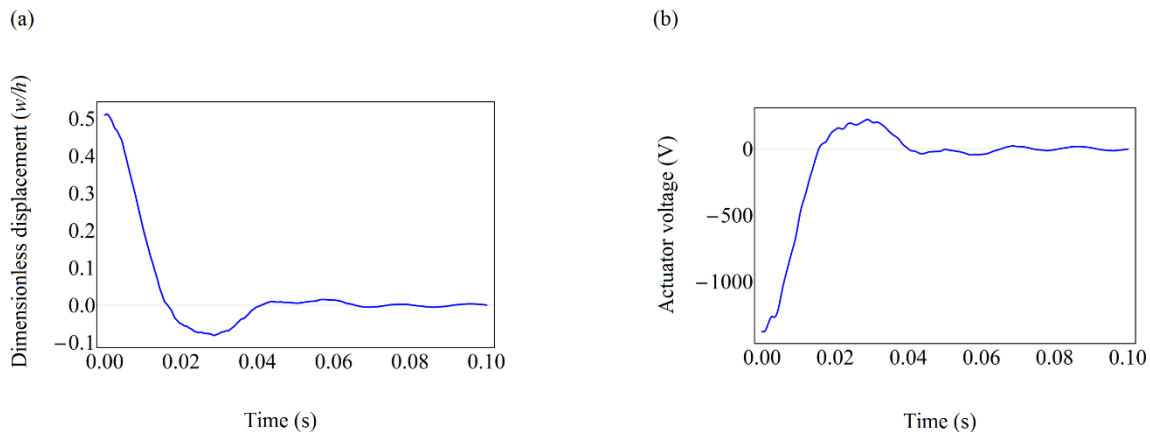


شکل ۱۰ پاسخ زمانی بدست آمده با تئوری ورق نسبتاً ضخیم برای جابجایی ورق (در موقعیت $(x,y)=(a,b/4)$) و ولتاژ کنترلی با فرض استفاده از کنترلر تناسبی (فیدبک جابجایی $((x_s,y_s)=(0.36,0.21))$). ضریبی از شکل مود اول ورق به عنوان شرایط اولیه و فشار دینامیکی $\lambda=290$ در نظر گرفته شده است.

چنانکه گفته شد در دو موقعیت تعیین شده توسط معیار پیشنهادی رابطه ۲۵ نمی توان با فیدبک تناسبی و یا مشتقی-تناسبی به عملکرد کنترلی مناسب رسید. اما ممکن است بتوان با فیدبک هم‌زمان جابجایی هر دو نقطه مذکور، به عملکرد کنترلی LQR نزدیک تر شد. برای بررسی این موضوع معیار ارائه شده در رابطه ۲۵ را این بار برای رسیدن به بهترین ترکیب از فیدبک تناسبی نقاط مورد بحث مورد استفاده قرار داده ایم. شکل ۱۱ تغییرات معیار $COS3$ را بر حسب نسبت ضرایب فیدبک تناسبی دو موقعیت مورد بحث را نمایش می دهد. ملاحظه می شود که در نسبت $K_{P2}/K_{P1}=-1.1$ به بیشترین مقدار $COS3$ می رسیم که مقدار آن برابر 0.89 است و فاصله زیادی تا مقدار ایده آل ۱ ندارد. با توجه به این مورد یک کنترلر تناسبی ترکیبی با نسبت ترکیب $K_{P2}/K_{P1}=-1.1$ برای کنترل فلاتر ورق در فشار دینامیک $\lambda=290$ به کار گرفته شد. شکل ۱۲ عملکرد کنترلی مربوطه را به ازای $K_{P1}=1800000$ نمایش می دهد. مشاهده می گردد این بار رفتار کنترلی به دست آمده بسیار خوب بوده و به لحاظ حداکثر مقدار ولتاژ کنترلی و زمان پاسخگویی، قابل مقایسه با رفتار کنترلی LQR (شکل ۵) می باشد. به این ترتیب می توان ادعا کرد با کمک معیار معرفی شده در رابطه ۲۵ می توان نقاطی از ورق را یافت که فیدبک جابجایی آن ها می تواند رفتاری قابل مقایسه با کنترلر LQR ایجاد نماید.



شکل ۹ تغییرات معیار $COS3$ (کسینوس زاویه بین بردار ضرایب فیدبک LQR و بردار ضرایب فیدبک کنترلی تناسبی-ترکیبی) بر حسب نسبت ضرایب فیدبک های تناسبی



شکل ۱۲ پاسخ زمانی به دست آمده با تئوری ورق نسبتاً ضخیم برای جایابی ورق (در موقعیت $(x,y)=(a,b/4)$ و ولتاژ کنترلی با فرض استفاده از کنترلر تناسبی (فیدبک جایابی ترکیبی نقاط $(x_s,y_s)=(0.28,0)$ و $(x_s,y_s)=(0.36,0.21)$). ضریبی از شکل مود اول ورق به عنوان شرایط اولیه و فشار دینامیکی $\lambda=290$ در نظر گرفته شده است.

۴- نتیجه گیری

در بسیاری از مطالعات تئوریک و تجربی که در زمینه کنترل ارتعاش ورق منتشر شده است، از وصله‌های پیزوالکتریکی که بر روی سطح ورق تعبیه شده‌اند، به عنوان محرک استفاده شده است. از آنجایی که این وصله‌ها می‌توانند مودهای ارتعاشی مختلفی را تحت تأثیر قرار دهند، ولتاژ اعمالی به این وصله‌ها را به صورت ترکیبی از فیدبک متغیرهای دینامیکی مختلف سازه در نظر می‌گیرند. از سوی دیگر استفاده از یک تخمین‌گر متغیرهای حالت، موجب افزایش هزینه و پیچیدگی‌های اجرایی می‌گردد. در مطالعه حاضر تلاش شده است که با بررسی و مطالعه معادلات حاکم، محل مناسب برای سنسورهای ارتعاشی را به گونه‌ای انتخاب کرد که بتوان بدون استفاده از تخمین‌گر، با فیدبک مستقیم سیگنال خروجی سنسورها ناپایداری ورق‌های نازک در جریان سوپرسونیک را به شکل مؤثری کنترل نمود. برای یافتن بهترین نقاط جهت فیدبک جایابی، کنترلر LQR به عنوان کنترلر مرجع مورد استفاده قرار گرفته شده است. سپس یک معیار برای یافتن نقاطی از ورق که ترکیب فیدبک جایابی آن‌ها می‌تواند نزدیک‌ترین رفتار کنترلی با کنترلر LQR را ایجاد نماید، ارائه گردید. نتایج عددی ارائه شده نشان می‌دهد می‌توان با کمک معیار معرفی شده نقاطی از ورق را یافت که فیدبک جایابی آن‌ها می‌تواند رفتاری قابل مقایسه با کنترلر LQR ایجاد نماید. روشی که در اینجا ارائه گردید، ممکن است تنها برای مسائل خاصی مانند کنترل ارتعاشات ورق قابل استفاده باشد که محل قرارگیری حسگرها در دست طراح قرار دارد و ممکن است برای دیگر مسائل کنترلی قابل استفاده نباشد یا آنکه نتایج قابل قبولی ارائه ندهد. در این مطالعه همچنین نشان داده شد تئوری ورق نازک به دلیل آنکه تنش‌های برشی را ناچیز فرض می‌نماید، نمی‌تواند نتایج قابل اطمینانی برای موضوع کنترل فلاتر ورق‌ها به کمک وصله‌های پیزوالکتریک را ارائه نماید.

۵- مراجع

- [1] Bailey T, Hubbard Jr J E. Distributed piezoelectric-polymer active vibration control of a cantilever beam. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 1985;8:605-611.
- [2] Hagood N W, Von Flotow A. Damping of structural vibrations with piezoelectric materials and passive electrical networks. *Journal of sound and vibration*. 1991;146:243-268.
- [3] Agnes G S. Active/passive piezoelectric vibration suppression. 2193;24-34.
- [4] Sadri A M, Wright J R, Wynne R J. Modelling and optimal placement of piezoelectric actuators in isotropic plates using genetic algorithms. *Smart materials and structures*. 1999;8:490.

- [5] da Rocha T L, da Silva S, Lopes Jr V, Brasil A, Solteira-Sp I. Optimal location of piezoelectric sensor and actuator for flexible structures.1807-1814.
- [6] Qiu Z-c, Zhang X-m, Wu H-x, Zhang H-h. Optimal placement and active vibration control for piezoelectric smart flexible cantilever plate. *Journal of sound and vibration*. 2007;301:521-543.
- [7] Farhadi S, Hosseini-Hashemi S H. Active vibration suppression of moderately thick rectangular plates. *Journal of Vibration and Control*. 2011;17:2040-2049.
- [8] Farhadi S, Hosseini-Hashemi S. Flutter stabilization of cantilevered plates using a bonded patch. *Acta mechanica*. 2011;219:241-254.
- [9] Xue Y, Li J, Li F, Song Z. Flutter and thermal buckling properties and active control of functionally graded piezoelectric material plate in supersonic airflow. *Acta Mechanica Solida Sinica*. 2020;33:692-706.
- [10] Kuriakose V M, Sreehari V M. Study on passive flutter control of damaged composite laminates with piezoelectric patches employing finite element method. *Composite Structures*. 2021;269:114021.
- [11] Wei T, Tian Z, Yingsong G U, Zhichun Y. Supersonic flutter control and optimization of metamaterial plate. Elsevier; 2021. p. 15-20.
- [12] Swain P K, Tiwari P, Maiti D K, Singh B N, Maity D. Active flutter control of delaminated composite plate using active fiber composite patches. *Thin-Walled Structures*. 2022;172:108856.
- [13] Patil M J, Hodges D H. Output feedback control of the nonlinear aeroelastic response of a slender wing. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2002;25:302-308.
- [14] Dardel M, Bakhtiari-Nejad F. Limit cycle oscillation control of wing with static output feedback control method. *Aerospace Science and Technology*. 2013;24:147-160.
- [15] Singh K V, Black C, Kolonay R. Active aeroelastic output feedback control with partial measurements by the method of receptances. *Aerospace Science and Technology*. 2019;86:47-63.
- [16] Zhang K, Manaffam S, Marzocca P, Behal A. Robust output feedback control for aeroelastic vibration suppression of a 2-DOF airfoil under quasi-steady flow. *Journal of Vibration and Control*. 2018;24:4604-4619.
- [17] Stanford B K. Gradient-based aeroservoelastic optimization with static output feedback. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2019;42:2314-2318.
- [18] Ricci S, Toffol F, Marchetti L, De Gaspari A, Chardi J V, Riccobene L, Fonte F, Mantegazza P. Design and Experimental Validation of Gust Load Alleviation Systems based on Static Output Feedback.0441.