



Solution of out-of-Plane vibration of moderately thick rectangular nano-plate using nonlocal sinusoidal shear deformation theory

Peyman Yousefi^{a*}, Mohammad Khodadadi^b


^{a,b} Department of Mechanical Engineering, Arak Branch, Islamic Azad University, Arak, Iran

Original Article

Use your device to scan and read the article online



Citation: Yousefi P, Khodadadi M. Solution of out-of-Plane vibration of moderately thick rectangular nano-plate using nonlocal sinusoidal shear deformation theory. *Mechanics of Advanced and Smart Materials*. 2022;1(2):231-246.

 <https://dx.doi.org/10.52547/masm.1.2.231>

KEYWORDS

Nonlocal theory,
Sinusoidal shear,
Deformation,
Out of plane vibration.

ABSTRACT

In this paper, exact close form solution for out of plane free flexural vibration of moderately thick rectangular nano-plates are presented based on nonlocal sinusoidal shear deformation theory, with assumptions of the Levy's type boundary conditions, for the first time. The aim of this study is to evaluate the effect of small-scale parameters on the frequency parameters of the moderately thick rectangular nano-plates. To describe the effects of small-scale parameters on vibrations of rectangular nanoplates, the Eringen theory is used. the Levy's type boundary conditions is a combination of six different boundary conditions; specifically, two parallel edges are simply supported and any of the other Two edges may be restrained by different combinations of free, simply supported, or clamped boundary conditions. Governing equations of motion and boundary conditions of the plate are derived by using the Hamilton's principle. The present analytical solution can be obtained with any required accuracy and can be used as benchmark. Numerical results are presented to illustrate the effectiveness of the proposed method compared to other methods reported in the literature. Finally, the effect of boundary conditions, aspect ratios, small scale parameter and thickness ratios on nondimensional natural frequency parameters and frequency ratios are examined and discussed in detail.

Extended Abstract

1. Introduction

The wide use of such structures requires investigating the vibration characteristics of plates in order to develop accurate and reliable design. The study of the free vibration of plates dates back to the 1880s, and an extensive review of the works up to 1985 has been given by Leissa in his monograph [1] and in a series of review articles [2, 3]. Leissa [4] presented analytical results for free vibration of rectangular plates. Twenty-one cases exist which involve the possible combinations of clamped, simply-supported, and free edge conditions. Exact characteristic equations are given for the six cases having two opposite sides simply-supported.

Mindlin [5, 6] employed two-dimensional theory of flexural motions of isotropic, elastic plates is deduced from the three-dimensional equations of elasticity. In Mindlin's theory, transverse shear stress is assumed to be constant through the thickness of the plate, but this assumption violates the shear stress free surface conditions on the top and bottom surfaces of the plate. Mindlin's theory satisfies constitutive relations for transverse shear stresses and shear strains by using shear correction factor.

Dozio [11] presented a comprehensive study on the use of a set of trigonometric functions, as admissible solutions in the Ritz method for general vibration analysis of rectangular orthotropic Kirchhoff plates is presented. The approach is denoted here as Trigonometric Ritz method (TRM). Since its introduction, application of TRM was limited to a very few plate

* Corresponding author:

E-mail address: p-yousefi@iau-araku.ac.ir

DOI: <https://dx.doi.org/10.52547/masm.1.2.231>

Received: January 06, 2022; Received in revised form: January 08, 2022; Accepted: February 15, 2022
2022 Published by Arak University Press. All rights reserved.



problems. The aim of this work is to extend the potential of the method on predicting natural flexural frequencies of plates with various complicating factors, including in-plane loads, elastically restrained edges, rigid/elastic concentrated masses, intermediate line and point supports or their combinations.

Sayyad and Ghugal [15] studied a variationally consistent an exponential shear deformation theory for the bi-directional bending and free vibration analysis of thick plates. In this displacement-based, refined shear deformation theory, exponential function are used in terms of thickness co-ordinate to include the effect of transverse shear deformation and rotary inertia. The number of unknown displacement variables in the proposed theory are same as that in first order shear deformation theory. Kharde et al. [16] also presented an exponential shear deformation theory for the free vibration of thick isotropic plate which uses exponential term in its displacement field to calculate the strain and stresses, satisfying the stress free boundary conditions at the top and bottom of the plate. Hence the theory obviates the need of shear correction factor. Governing differential equations and boundary conditions of the theory are obtained using the principle of virtual work.

Yang et al. [20] studied deformation behavior of materials in the micron scale has been experimentally shown to be size dependent. The size dependence can be explained using classical couple stress theory in which the full curvature tensor is used as deformation measures in addition to the conventional strain measures. Ke et al. [21] developed a Mindlin microplate model based on the modified couple stress theory for the free vibration analysis of micro-plates. This non-classical plate model contains an internal material length scale parameter related to the material microstructures and is capable of interpreting the size effect that the classical Mindlin plate model is unable to describe. The higher-order governing equations of motion and boundary conditions are derived using the Hamilton principle.

Aksencer and Aydogdu [22] studied buckling and vibration of nanoplates using nonlocal elasticity theory. The Navier type solution is used for simply supported plates and the Levy type method is used for plates with two opposite edges simply supported and remaining edges arbitrarily supported. Aghababaei and Reddy [23] studied the vibration of isotropic rectangular nanoplate using the nonlocal elasticity theories and the third-order shear deformation theory. Zhang et al. [26] presented a non-local plate model based on Eringen’s theory of non-local continuum mechanics. The basic equations for the non-local Kirchhoff and the Mindlin plate theories are derived. These non-local plate theories allow for the small-scale effect which becomes significant when dealing with micro/nano-scale plate-like structures.

In this paper, exact closed-form solutions for out of plane free flexural vibration of moderately thick rectangular nano-plates are presented based on nonlocal sinusoidal shear deformation theory, in explicit forms are presented to investigate small scale effects on the buckling of Lévy-type rectangular nanoplates based on the Eringen theory. Two other edges may be restrained by different combinations of free, simply supported, or clamped boundary conditions. Hamilton’s principle is used to derive the nonlocal equations of motion and natural boundary conditions of the nanoplate.

2. Theory of nonlocal elasticity

Using the theory of non-local elasticity, presented by Eringen, the effects of small inter-atomic forces are considered as material parameters in the constitutive equation:

$$(1 - \mu^2 \nabla^2) \sigma_{ij}^{NL} = \sigma_{ij}^L \tag{1}$$

The non-local constitutive equations of a nono-plate can be written as:

$$(1 - \mu^2 \nabla^2) \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \tag{2}$$

By $\mu = e_0 a$.

3. Plate Equation

Plate displacement field by sinusoidal deformation theory assumed as:

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2, x_3, t) &= -x_3 \frac{\partial w(x_1, x_2, t)}{\partial x_1} + \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi x_3}{h}\right) \varphi_1(x_1, x_2, t) \\ v(x_1, x_2, x_3, t) &= -x_3 \frac{\partial w(x_1, x_2, t)}{\partial x_2} + \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi x_3}{h}\right) \varphi_2(x_1, x_2, t) \\ w(x_1, x_2, x_3, t) &= w(x_1, x_2, t) \end{aligned} \tag{3}$$

By using Hamilton’s principle, the following equations of motion are obtained:

$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial x_2^2} = (1 - \mu \nabla^2) \times (I_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + I_2 (\frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial x_1^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial x_2^2}) + I_3 (\frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial x_1 \partial t^2} + \frac{\partial^3 \varphi_2}{\partial x_2 \partial t^2})) \tag{4}$$

$$\frac{\partial N_{s1}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{s21}}{\partial x_2} - N_{Tc1} = (1 - \mu \nabla^2) \times (-I_3 \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x_1} + I_4 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2}) \tag{5}$$

$$\frac{\partial N_{s2}}{\partial x_2} + \frac{\partial N_{s21}}{\partial x_1} - N_{Tc2} = (1 - \mu \nabla^2) \times (-I_3 \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x_2} + I_4 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2}) \tag{6}$$

For free vibration, we assume harmonic oscillation with respect to the time variable t as follows:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_1(X_1, X_2, t) &= \varphi_1(x_1, x_2)e^{i\omega t} \\ \tilde{\varphi}_2(X_1, X_2, t) &= \varphi_2(x_1, x_2)e^{i\omega t} \\ \tilde{w}(X_1, X_2, t) &= \frac{w(x_1, x_2)}{a}e^{i\omega t} \end{aligned} \tag{7}$$

Considering Eqs. (4-7) and after some mathematical manipulations, the following ordinary differential equation can be obtained:

$$\nabla^6 \tilde{w} + a_1 \nabla^4 \tilde{w} + a_2 \nabla^2 \tilde{w} + a_3 \tilde{w} = 0 \tag{8}$$

The final exact solutions of the displacement field are given by:

$$\begin{aligned} \tilde{w} &= W_1 + W_2 + W_3 \\ \tilde{\varphi}_1 &= C_1 W_{1,1} + C_2 W_{2,1} + C_3 W_{3,1} + C_4 W_{4,2} \\ \tilde{\varphi}_2 &= C_5 W_{1,2} + C_6 W_{2,2} + C_7 W_{3,2} + C_8 W_{4,1} \end{aligned} \tag{9}$$

where

$$\begin{aligned} \nabla^2 W_1 + \alpha_1^2 W_1 &= 0 \\ \nabla^2 W_2 + \alpha_2^2 W_2 &= 0 \\ \nabla^2 W_3 + \alpha_3^2 W_3 &= 0 \\ \nabla^2 W_4 + \alpha_4^2 W_4 &= 0 \end{aligned} \tag{10}$$

By virtue of the separation of variables method, one set of solutions for Eqs. (10) can be written as:

$$W_1 = [A_1 \sinh(\mu_1 X_2) + A_2 \cosh(\mu_1 X_2)] \sin(\theta_1 X_1) + [A_3 \sinh(\mu_1 X_2) + A_4 \cosh(\mu_1 X_2)] \cos(\theta_1 X_1) \tag{11}$$

$$W_2 = [A_5 \sinh(\mu_2 X_2) + A_6 \cosh(\mu_2 X_2)] \sin(\theta_2 X_1) + [A_7 \sinh(\mu_2 X_2) + A_8 \cosh(\mu_2 X_2)] \cos(\theta_2 X_1) \tag{12}$$

$$W_3 = [A_9 \sin(\mu_3 X_2) + A_{10} \cos(\mu_3 X_2)] \sin(\theta_3 X_1) + [A_{11} \sin(\mu_3 X_2) + A_{12} \cos(\mu_3 X_2)] \cos(\theta_3 X_1) \tag{13}$$

$$W_4 = [A_{13} \sinh(\mu_4 X_2) + A_{14} \cosh(\mu_4 X_2)] \sin(\theta_4 X_1) + [A_{15} \sinh(\mu_4 X_2) + A_{16} \cosh(\mu_4 X_2)] \cos(\theta_4 X_1) \tag{14}$$

4. Comparison studies

To confirm the reliability and the high accuracy comparison studies are conducted for the frequency ratios (ratios of nano-plate frequency to plate frequency) of square plates ($b/a = 1$) presented in table (1). Plate was fully simply supported with thickness to length ratios ($h/a = 0.1$) and non-local parameter ($\xi^2 = \mu/a^2 = 0, 0.2, 0.4, 0.6$).

Table 1. Comparison study of frequency ratios

N,m	$\xi^2 =$	0	0.2	0.4	0.6
1,1	Present	1	0.7475	0.4903	0.3512
	Ref[23]	1	0.7477	0.4904	0.3512
	Ref[26]	1	0.7475	0.4904	0.3512
1,2	Present	1	0.5798	0.3352	0.2308
	Ref[23]	1	0.5801	0.3353	0.2309
	Ref[26]	1	0.5799	0.3353	0.2308
2,1	Present	1	0.5798	0.3352	0.2308
	Ref[23]	1	0.5801	0.3353	0.2309
	Ref[26]	1	0.5799	0.3353	0.2308
2,2	Present	1	0.4903	0.2708	0.1843
	Ref[23]	1	0.4906	0.2708	0.1844
	Ref[26]	1	0.4904	0.2708	0.1844

Good agreement is achieved.

5. Results and Discussion

By using the exact closed-form characteristic equations given in the previous section, computed frequency ratios of free vibrations of Lévy-type rectangular plates with different combinations of boundary conditions present in table (2). Results are

given for various values of non-local parameter and two different aspect ratios. For all calculations here, thickness to length ratios ($h/a = 0.1$) and Poisson's ratio has been taken as 0.3.

Table 2. Frequency ratios of free vibrations

BC	b/a	$\xi^2 = 0$	0.2	0.4	0.6
<i>SSSC</i>	1	1	0.7475	0.4783	0.3411
	2	1	0.8158	0.5762	0.4252
<i>SCSC</i>	1	1	0.7315	0.4717	0.3356
	2	1	0.8139	0.5734	0.4227
<i>SSSF</i>	1	1	0.8551	0.6334	0.4775
	2	1	0.8540	0.6320	0.4764
<i>SFSC</i>	1	1	0.8563	0.6372	0.4822
	2	1	0.8530	0.6311	0.4822
<i>SFSF</i>	1	1	0.8612	0.6493	0.4974
	2	1	0.8510	0.6377	0.4792

6. Conclusions

Following results can be made from present work:

- Natural frequencies are considerably reduced by increasing the non-local parameters from 0 to 0.6, because the plate stiffness is more than nano-plate.
- The lowest and highest values of natural frequency correspond to *SFSF* and *SCSC* rectangular plates, respectively. This is due to the fact that higher constraints at the edges increase the flexural rigidity of the plate, leading to a higher frequency response.
- Affect of non-local parameter on natural frequency of plate with conditions that happened the highest natural frequency (aspect ratios, boundary conditions and non-local parameter) is more than the other plate conditions.



حل ارتعاش برون - صفحه‌ای نانو ورق نسبتاً ضخیم بر اساس تئوری غیرمحلّی تغییر شکل برشی سینوسی

پیمان یوسفی الف*، محمد خدادادی ب

الف استادیار، گروه مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد اراک، اراک، ایران، p-yousefi@iau-arak.ac.ir

ب کارشناسی ارشد مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد اراک، اراک، ایران، m.khodadadi.msc.mechanic@gmail.com

چکیده	واژگان کلیدی
در این مقاله به حل تحلیلی ارتعاش برون صفحه‌ای نانو ورق‌های مستطیلی نسبتاً ضخیم بر اساس تئوری غیرمحلّی تغییر شکل برشی سینوسی اصلاح شده با در نظر گرفتن شرایط مرزی لوی برای اولین بار پرداخته شده است. هدف اصلی این تحقیق بررسی اثر مقیاس کوچک بر پارامترهای فرکانسی نانو ورق‌های مستطیلی نسبتاً ضخیم می‌باشد. برای توصیف تأثیرات مقیاس کوچک بر ارتعاش خارج از صفحه‌ی نانو ورق مستطیلی از تئوری غیر محلّی ارینگن استفاده شده است. شرایط مرزی لوی مشتمل بر شش حالت مختلف شامل دو ضلع موازی ورق مستطیلی دارای تکیه‌گاه ساده و اضلاع دیگر ترکیبی از شرایط مرزی ساده، گیردار و آزاد می‌باشند. معادلات حاکم بر حرکت و شرایط مرزی با استفاده از اصل همپلتون به دست آمده است. دقت روش حاضر بدون احتیاج به هرگونه تقریبی می‌تواند به عنوان معیار مرجع مورد استفاده قرار گیرد. کارایی نتایج عددی حاصله با نتایج ارائه شده در مراجع معتبر که از سایر روش‌ها به دست آمده‌اند اعتبارسنجی شده است، در پایان به بررسی تأثیر شرایط مرزی مختلف، نسبت ضخامت به طول، پارامتر مقیاس کوچک و نسبت عرض به طول روی پارامتر بی بعد فرکانسی و نسبت فرکانسی (نسبت فرکانس طبیعی نانو ورق به فرکانس طبیعی ورق) با در نظر گرفتن جزئیات مورد بحث پرداخته شده.	تئوری غیرمحلّی، تغییر شکل برشی سینوسی، ارتعاش برون صفحه‌ای.
	تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۱۰/۱۶
	تاریخ بازنگری: ۱۴۰۰/۱۰/۱۸
	تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۱۱/۲۶

۱- مقدمه

کاربرد وسیع ورق‌ها در صنعت و نیز هندسه‌ی جالب توجه آن که می‌تواند مسئله‌ی سازه‌های دوبعدی را در برداشته باشد، موجب تلاش‌های بسیاری برای حل مسائل استاتیکی و دینامیک ورق گردیده است. ورق یک عنصر سازه‌ای است که یک بعد آن در مقایسه با دو بعد دیگر کوچک می‌باشد. ورق دارای سفتی خمشی است در حالی که غشاء دارای سفتی خمشی نمی‌باشد. سفتی خمشی از آنجا ناشی می‌شود که ضخامت ورق در مقایسه با غشاء به‌طور قابل ملاحظه‌ای بزرگ‌تر است. در طول سالیان تئوری‌های حل مسئله‌ی ورق توسعه‌ی روزافزون داشته که هم‌زمان به ساده و دقیق کردن حل مسئله منجر شده است. ورق‌ها عناصر سازه‌ای مهمی می‌باشند که در بسیاری از موارد کاربرد دارند. در مهندسی عمران، پنل‌های مسطح در انواع سازه‌های فولادی و بتنی موجود است. ورق‌ها در صنایع هوافضا برای ساخت هواپیما، موشک و در صنایع دریایی برای ساخت انواع زیردریایی و کشتی کاربرد دارند. در مهندسی مکانیک ورق‌ها به عنوان دیسک‌های چرخان در سیستم‌های ترمز و قسمت‌هایی از کلاچ مشاهده می‌گردند. همچنین به عنوان پنل‌های مسطح در بدنه‌ی ماشین‌ها وجود دارند. ورق‌ها به عنوان محفظه در بسیاری از تجهیزات الکترونیکی و الکترونیکی نیز مورد استفاده قرار می‌گیرند. ورق‌ها دارای شکل‌های گوناگون مستطیلی، دایروی، لوزی، مثلثی و دوزنقه‌ای می‌باشند. لوح‌های فشرده در واقع ورق‌های دایروی هستند.

*نویسنده مسئول؛

عمده کارهای انجام شده برای مطالعه رفتار ارتعاشی ورق‌ها با به‌کارگیری تئوری ورق نازک صورت پذیرفته که به‌عنوان مجموعه‌ای مدون و کامل در این زمینه تا سال ۱۹۶۹ می‌توان به کتاب ارتعاش ورق‌های لیسا [۱]، اشاره نمود. همچنین می‌توان به کارهای بعدی لیسا در این خصوص [۲ و ۳]، اشاره نمود. قابل‌توجه‌ترین و فراگیرترین کار لیسا در این زمینه، تحلیل ارتعاش آزاد ورق‌های نازک مستطیلی برای تمام ۲۱ حالت شرایط مرزی کلاسیک است که کاری قابل‌توجه، با دقت بالا و قابل ارجاع می‌باشد [۴]. لیسا در این مقاله همچنین به حل دقیق معادله‌های مشخصه‌ی ورق‌های نازک مستطیلی با دو لبه‌ی موازی دارای تکیه‌گاه ساده، پرداخته است. در تحلیل ورق‌های نازک، از اثر تغییر فرم برشی و اینرسی دورانی صرف‌نظر شده است که این فرضیات تئوری کلاسیک برای ورق نازک موجب بروز خطا در نتایج حاصله می‌گردد، با افزایش ضخامت ورق این خطا افزایش می‌یابد. جهت بهبود نقایص تئوری ورق نازک کلاسیک، تئوری ورق نسبتاً ضخیم میندلین ارائه گردید [۵ و ۶] که تئوری مرتبه‌ی اول تغییر فرم برشی نامیده می‌شود. در این تئوری که برای ورق‌های نسبتاً ضخیم صادق می‌باشد، اینرسی دورانی و اثر تغییر فرم برشی برای جبران خطای ناشی از توزیع تنش برشی لحاظ می‌گردند. حل مسائل مقدار ویژه ورق‌های ضخیم جهت تعیین فرکانس‌های طبیعی در طول سال‌های گذشته به روش‌های مختلف عددی انجام پذیرفته. حسینی هاشمی و همکاران [۷] به بررسی و تحلیل ارتعاش آزاد یک ورق مستطیلی از جنس مواد هدفمند نسبتاً ضخیم بر اساس تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی پرداخته‌اند. در مطالعه آن‌ها فرکانس طبیعی ورق برای ۶ حالت از ترکیب شرایط مرزی مختلف ورق با دو لبه موازی ساده و سایر لبه‌ها ترکیبی از شرایط مرزی ساده، آزاد و گیردار با استفاده از حل دقیق به دست آمده است. یکی از مزایای این تحقیق دقت بسیار بالای روش پیشنهادی است. خورشیدی [۸] به بررسی تأثیر فشار هیدرواستاتیکی بر ارتعاش ورق مستطیلی کوپل با سیال پرداخته است. در این مقاله از ورق ایزوتروپ و تئوری کلاسیک استفاده شده و فرکانس ورق کوپل با سیال برای شرایط مرزی کاملاً ساده و کاملاً گیردار به دست آمده است. خورشیدی و فرهادی [۹] به بررسی ارتعاش آزاد ورق کامپوزیت مستطیلی در تماس با سیال محدود پرداخته‌اند. در این تحقیق از تئوری‌های کلاسیک، مرتبه اول تغییر شکل برشی و مرتبه سوم تغییر شکل برشی استفاده شده است. ملک‌زاده و همکاران [۱۰] ارتعاش آزاد ورق ساخته‌شده از مواد هدفمند را با به‌کارگیری تئوری سه‌بعدی الاستیسیته مورد بررسی قرار دادند. در این تحقیق از یک روش نیمه تحلیلی که متشکل است از روش تفاضل مربعات و حل سری که برای حل معادلات حرکت استفاده شده بکار گرفته شده است. همچنین به صفحات با دو لبه‌ی مخالف بر تکیه‌گاه ساده و شرایط مرزی اختیاری در لبه‌های دیگر توجه شده. دوزیو [۱۱] بر اساس تئوری مثلثاتی به تحلیل ارتعاش ورق‌های مستطیلی کیرشهف با استفاده از روش ریلی-ریتز پرداخته. رنگو و همکاران [۱۲] به تحلیل ارتعاشات آزاد ورق‌های کامپوزیت پرداخته‌اند. آن‌ها در این تحقیق با استفاده از روش کار مجازی معادلات حرکت را به دست آورده و با استخراج ماتریس‌های جرم و سختی برای ورق و تعیین مقادیر ویژه فرکانس طبیعی ورق را برای ضخامت‌های مختلف مورد بررسی قرار دادند. منتاری و سوارز [۱۳] کمانش ورق‌های کامپوزیت را با استفاده از تئوری مرتبه اول برشی بر پایه‌ی تئوری‌های سینوسی و نمایی مورد بررسی قرار دادند و با بکارگیری اصل کار مجازی معادلات تعادل را برای سازه استخراج کردند و نتایج عددی این تحقیق با حل سه‌بعدی و تئوری تغییر شکل مرتبه‌ی بالا مقایسه شده است که نشان‌دهنده‌ی دقت بالای این روش می‌باشد. تونسی و همکاران [۱۴] به تحلیل کمانش ترموالاستیک ورق با استفاده از تئوری تغییر شکل مثلثاتی پرداختند آن‌ها در این تحقیق به تحلیل تأثیر بار حرارتی در خمش ورق‌ها پرداختند در این تئوری مؤلفه‌های جابجایی با استفاده از سری‌های مثلثاتی در راستای ضخامت ورق ارائه شده است. صیاد و قوگال [۱۵] کمانش و ارتعاش آزاد ورق‌های ضخیم ایزوتروپیک را با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی نمایی مورد بررسی قرار دادند. در این تحقیق توابع نمایی در راستای ضخامت بکار گرفته شده و جابجایی شامل تغییر شکل عرضی برشی و اینرسی دورانی است. همچنین شرایط مرزی و معادلات سیستم با استفاده از روش کار مجازی به دست آمده‌اند و با حل عددی ورق‌های مربعی و مستطیلی با تکیه‌گاه ساده روابط جابجایی، تنش و فرکانس‌ها را مورد توجه قرار دادند و نتایج حاصله را با نتایج حاصل از سایر مقالات مقایسه کردند. صیاد تئوری‌های مختلف تغییر شکل برشی را برای ارتعاشات آزاد تیرهای ضخیم ایزوتروپیک مورد بررسی قرار داد. تئوری‌ها شامل توابع پارابولیک، سینوسی، هایپربولیک و نمایی در جهت ضخامت هستند. در این تحقیق شرایط مرزی و معادلات دیفرانسیل با استفاده از اصل کار مجازی به دست آورده شده و نتایج به‌دست‌آمده‌ی خمش و فرکانس طبیعی را برای تیر با تکیه‌گاه ساده با نتایج سایر مقالات مقایسه شده است. خارد و همکاران [۱۶] ارتعاشات ورق‌های ایزوتروپیک را با استفاده

از تئوری تغییر شکل نمایی مورد بررسی قرار دادند. در این تحقیق معادلات دیفرانسیل و شرایط مرزی با استفاده از اصل کار مجازی به دست آورده شده و نتایج حاصله با نتایج سایر تئوری‌های تغییر شکل برشی و حل دقیق موجود در سایر مقالات مقایسه شده است.

بررسی رفتار دینامیکی نانو ورق‌ها و نانو تیرها امری ضروری برای مهندسان به حساب می‌رود. سازه‌ها در مقیاس کوچک رفتار متفاوتی از خود نشان می‌دهند به همین دلیل عدم دقت لازم برای تحلیل نانو ورق‌ها با استفاده از تئوری‌های کلاسیک ثابت شده است از تئوری‌های رایج در زمینه‌ی تحلیل نانو ورق‌ها می‌توان به تئوری غیرمحلی [۱۷]، تنش کوپل [۱۸] و گرادیان کرنش [۱۹] اشاره کرد. برای اولین بار یانگ [۲۰] تئوری تنش کوپل اصلاح‌شده را پیشنهاد کرد. بر اساس آن تانسور تنش کوپل متقارن بوده و تنها شامل یک پارامتر مقیاس طول است. کی و همکاران [۲۱] به بررسی ارتعاش میکرو ورق میندلین با استفاده از تئوری تنش کوپل اصلاح‌شده پرداخته‌اند. اکسنسر و همکاران [۲۲] ارتعاش و کمانش نانو ورق را با تئوری غیرمحلی انجام دادند. آقابابایی و همکاران [۲۳] ارتعاش نانو ورق را با تئوری غیرمحلی مورد بررسی قرار دادند. نتاراجن و همکاران [۲۴] به بررسی ارتعاش نانو ورق‌های تابعی مدرج با استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی غیرمحلی پرداخته‌اند. حسینی هاشمی و همکاران [۲۵] به بررسی ارتعاش نانو ورق‌های مستطیلی با به‌کارگیری تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی بر اساس تئوری الاستیسیته غیر محلی پرداختند. زهانگ و همکاران [۲۶] با استفاده از تئوری غیر محلی بر اساس تئوری تغییر شکل مرتبه اول برشی ورق و حل ناویه به بررسی ارتعاش نانو ورق‌های مستطیلی با تکیه‌گاه‌های ساده پرداخته‌اند.

در مطالعه‌ی حاضر حل دقیق ارتعاش خارج از صفحه‌ی نانو ورق‌های مستطیلی نسبتاً ضخیم با استفاده از تئوری غیرمحلی تغییر شکل سینوسی اصلاح‌شده برای شش شرط مرزی لوی برای اولین بار مورد بررسی قرار گرفته است. برای توصیف تأثیرات مقیاس کوچک بر ارتعاش خارج از صفحه‌ی نانو ورق مستطیلی از تئوری غیرمحلی ارینگن استفاده شده است. شرایط مرزی لوی شامل ورق مستطیلی با دو ضلع موازی دارای تکیه‌گاه ساده و اضلاع دیگر ترکیبی از شرایط مرزی ساده، گیردار و آزاد می‌باشند. معادلات حاکم بر حرکت و شرایط مرزی با استفاده از اصل همیلتون به دست آمده است. نتایج حاصله از این مقاله با نتایج ارائه شده در مراجع معتبر که از روش‌های تحلیلی و عددی برای بررسی ارتعاش خارج از صفحه‌ی نانو ورق مستطیلی نسبتاً ضخیم استفاده کرده‌اند، اعتبارسنجی شده است، نهایتاً تأثیر پارامترهای مختلف از قبیل شرایط مرزی مختلف، نسبت ضخامت به طول، پارامتر مقیاس کوچک و نسبت عرض به طول روی پارامتر بی‌بعد فرکانسی و نسبت فرکانسی با در نظر گرفتن جزئیات مورد بحث و بررسی قرار گرفته است.

۲- رابطه بندی معادلات دینامیکی حاکم بر رفتار ارتعاشی نانو ورق

۲-۱- تئوری غیرمحلی الاستیسیته

در تئوری کلاسیک محلی، بین تنش و کرنش در هر نقطه یک تناظر یک به یک برقرار است. بدین معنی که حالت تنش یک نقطه فقط تابعی منحصر به فرد از کرنش در همان نقطه است. در حالی که در مدل الاستیسیته‌ی غیر محلی که توسط ارینگن در اوایل دهه‌ی ۸۰ میلادی مطرح شد، حالت تنش در یک نقطه خاص تابعی از حالت کرنش در تمام نقاط جسم است. رابطه‌ی انتگرالی زیر بیانگر این تئوری می‌باشد [۲۵].

$$\sigma(X) = \int \alpha(|\hat{X} - X|, \tau) C \varepsilon(\hat{X}) dv(\hat{X}) \quad (1)$$

در رابطه‌ی فوق $\alpha(|\hat{X} - X|, \tau)$ تابع قدر مطلق غیر محلی، $|\hat{X} - X|$ فاصله‌ی بین نقطه‌ی X و نقطه‌ی دلخواه \hat{X} و نیز C تانسور مرتبه چهارم الاستیسیته است. τ برابر $e_0 a/l$ می‌باشد که در آن a طول باند شبکه‌ی فضایی کرن، l طول مشخصه‌ی خارجی و e_0 نیز پارامتر ثابتی است که به جنس ماده و مواد تشکیل‌دهنده‌ی آن بستگی دارد و با استفاده از نتایج تجربی برای نانو ساختارها تعیین می‌گردد. استفاده از فرم انتگرالی معادله‌ها و تجزیه تحلیل آن مشکل است. در اکثر مواقع فرم دیفرانسیلی به شکل انتگرالی معادله‌ها ترجیح داده می‌شود. رابطه‌ی (۱) را می‌توان به فرم دیفرانسیلی زیر بازنویسی کرد:

$$(1 - \mu \nabla^2) \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (2)$$

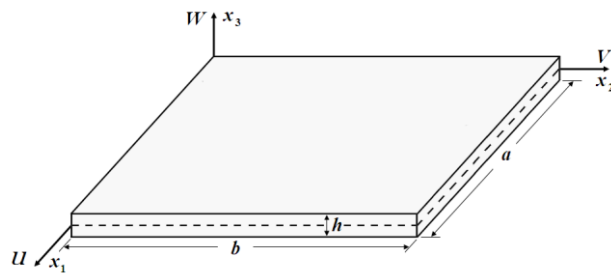
$$\mu = \tau l = e_0 a \quad (۳)$$

در رابطه‌های (۲) و (۳):

C_{ijkl} : تانسور سختی الاستیک برای الاستیسیته‌ی ایزوتروپیک کلاسیک، σ_{ij} : تانسور تنش غیر محلّی و μ پارامتر مقیاس کوچک هستند. پارامتر مقیاس کوچک برای هر ماده‌ی خاص با استفاده از آزمایش‌های مناسب تعیین می‌شود. با قرار دادن $\mu = 0$ در رابطه‌ی (۲) معادله‌ی بین تنش و کرنش در تئوری کلاسیک محلّی به دست خواهد آمد که بیانگر این مطلب می‌باشد که کرنش در هر نقطه تنها تابعی از تنش در همان نقطه خواهد بود.

۲-۲- به دست آوردن معادلات حاکم بر حرکت

با توجه به شکل (۱)، a ، b و h به ترتیب طول، عرض و ضخامت ورق می‌باشند. لبه‌های موازی با محور x_2 به صورت تکیه-گاه ساده در نظر گرفته می‌شوند، و به‌های موازی با محور x_1 ترکیبی از شرایط مرزی دیگر می‌باشند.



شکل ۱. ورق مستطیلی، دستگاه مختصات و جهت محورها

با توجه به تئوری تغییر شکل سینوسی اصلاح‌شده میدان جابجایی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$u(x_1, x_2, x_3, t) = -x_3 \frac{\partial w(x_1, x_2, t)}{\partial x_1} + \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi x_3}{h}\right) \varphi_1(x_1, x_2, t) \quad (۴)$$

$$v(x_1, x_2, x_3, t) = -x_3 \frac{\partial w(x_1, x_2, t)}{\partial x_2} + \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi x_3}{h}\right) \varphi_2(x_1, x_2, t) \quad (۵)$$

$$w(x_1, x_2, x_3, t) = w(x_1, x_2, t) \quad (۶)$$

در روابط (۴) تا (۶)، φ_1 و φ_2 اینرسی‌های چرخشی به ترتیب حول محورهای x_1 و x_2 ، u ، v و w مؤلفه‌های جابجایی به ترتیب در راستاهای x_1 ، x_2 و x_3 می‌باشند. بر اساس اصل همیلتون معادلات حاکم بر حرکت به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial x_2^2} = (1 - \mu \nabla^2) \times \left(I_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + I_2 \left(\frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial x_1^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial x_2^2} \right) + I_3 \left(\frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial x_1 \partial t^2} + \frac{\partial^3 \varphi_2}{\partial x_2 \partial t^2} \right) \right) \quad (۷)$$

$$\frac{\partial N_{s1}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{s21}}{\partial x_2} - N_{Tc1} = (1 - \mu \nabla^2) \times \left(-I_3 \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x_1} + I_4 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right) \quad (۸)$$

$$\frac{\partial N_{s2}}{\partial x_2} + \frac{\partial N_{s21}}{\partial x_1} - N_{Tc2} = (1 - \mu \nabla^2) \times \left(-I_3 \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x_2} + I_4 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \right) \quad (۹)$$

برآیندهای تنش، ممان‌های اینرسی و ثوابت به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$(N_{s1}, N_{s2}, N_{s12}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}) \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi x_3}{h}\right) dx_3 \quad (۱۰)$$

$$(N_{Tc1}, N_{Tc2}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{31}, \sigma_{32}, \sigma_{12}) \frac{\partial \left[\frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi x_3}{h}\right) \right]}{\partial x_3} dx_3 \quad (۱۱)$$

$$I_1 = \rho h, \quad I_2 = \frac{\rho h^3}{12},$$

$$I_3 = \rho \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x_3^2 \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi x_3}{h}\right) dx_3, \quad I_4 = \rho \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[\frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi x_3}{h}\right)\right]^2 dx_3 \quad (۱۲ الف - د)$$

حال با جایگذاری روابط (۱۰) تا (۱۲) در روابط (۷) تا (۹) و استفاده از روابط زیر به منظور بی‌بعد سازی معادلات:

$$X_1 = \frac{x_1}{a}, \quad X_2 = \frac{x_2}{a}, \quad \eta = \frac{b}{a}, \quad \tau = \frac{h}{a}, \quad \xi^2 = \frac{\mu}{a^2}, \quad (۱۳)$$

$$\tilde{w} = \frac{w}{a}, \quad \tilde{\varphi}_1 = \varphi_1, \quad \tilde{\varphi}_2 = \varphi_2$$

$$\beta = a\omega^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}}, \quad D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \quad (۱۴)$$

$$\tilde{\varphi}_1(X_1, X_2, t) = \varphi_1(x_1, x_2) e^{i\omega t}, \quad \tilde{\varphi}_2(X_1, X_2, t) = \varphi_2(x_1, x_2) e^{i\omega t} \quad (۱۵)$$

$$\tilde{w}(X_1, X_2, t) = \frac{w(x_1, x_2)}{a} e^{i\omega t} \quad (۱۶)$$

که در روابط بالا ω فرکانس طبیعی دورانی و β فرکانس طبیعی بی‌بعد می‌باشند. همچنین نماد (\sim) بیانگر حالت بی‌بعد پارامتر است. در نهایت معادله‌های بی‌بعد حرکت به این صورت به دست می‌آیند:

$$\left(1 - \frac{\xi^2 \beta^2 \tau^2}{12}\right) \nabla^4 \tilde{w} + \left(\frac{\beta^2 \tau^2}{12} + \xi^2 \beta^2\right) \nabla^2 \tilde{w} - \beta^2 \tilde{w} \quad (۱۷)$$

$$+ (12a_0 + a_0 \xi^2 \beta^2 \tau^2) \nabla^2 (\tilde{\varphi}_{1,1} - \tilde{\varphi}_{2,2}) - (2a_0 \beta^2 \tau^2) (\tilde{\varphi}_{1,1} - \tilde{\varphi}_{2,2}) = 0,$$

$$\left(1 - \frac{\xi^2 \beta^2 \tau^2}{12}\right) \nabla^2 \tilde{w}_{,1} + \left(\frac{\beta^2 \tau^2}{12}\right) \tilde{w}_{,1} + \left(\frac{-b_0(1-\nu)}{2a_0} + \frac{b_0 \xi^2 \beta^2 \tau^2}{12a_0}\right) \nabla^2 \tilde{\varphi}_1 \quad (۱۸)$$

$$- \left(\frac{b_0(1+\nu)}{2a_0}\right) (\tilde{\varphi}_{1,1} - \tilde{\varphi}_{2,2})_{,1} + \left(\frac{c_0(1-\nu)}{2\tau^2 a_0} - \frac{\beta^2 \tau^2}{12}\right) \tilde{\varphi}_1 = 0,$$

$$\left(1 - \frac{\xi^2 \beta^2 \tau^2}{12}\right) \nabla^2 \tilde{w}_{,2} + \left(\frac{\beta^2 \tau^2}{12}\right) \tilde{w}_{,2} + \left(\frac{-b_0(1-\nu)}{2a_0} + \frac{b_0 \xi^2 \beta^2 \tau^2}{12a_0}\right) \nabla^2 \tilde{\varphi}_2 \quad (۱۹)$$

$$- \left(\frac{b_0(1+\nu)}{2a_0}\right) (\tilde{\varphi}_{1,1} - \tilde{\varphi}_{2,2})_{,2} + \left(\frac{c_0(1-\nu)}{2\tau^2 a_0} - \frac{\beta^2 \tau^2}{12}\right) \tilde{\varphi}_2 = 0.$$

در روابط بالا ν به ترتیب مدول الاستیسیته و ضریب پواسون می‌باشند. سایر ثوابت به صورت زیر تعریف می‌گردند:

$$a_0 = \frac{1}{h^3} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x_3 \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi x_3}{h}\right) dx_3 \quad (۲۰)$$

$$b_0 = \frac{1}{h^3} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[\frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi x_3}{h}\right)\right]^2 dx_3 \quad (۲۱)$$

$$c_0 = \frac{1}{h^3} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[\frac{d}{dx_3} \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi x_3}{h}\right)\right]^2 dx_3 \quad (۲۲)$$

بر اساس تئوری اصلاح‌شده‌ی سینوسی شرایط مرزی برای اضلاع موازی محور x_1 به صورت زیر است:

تکیه‌گاه ساده:

$$\tilde{w} = 0, \quad \tilde{\varphi}_1 = 0, \quad M_2 = 0, \quad N_{s2} = 0 \quad (۲۳)$$

تکیه‌گاه گیردار:

$$\tilde{w} = 0, \quad \tilde{\varphi}_1 = 0, \quad \tilde{\varphi}_2 = 0, \quad \tilde{w}_{,2} = 0 \quad (۲۴)$$

تکیه‌گاه آزاد:

$$Q = 0, \quad N_{s12} = 0, \quad M_2 = 0, \quad N_{s2} = 0 \quad (۲۵)$$

۳-۲- حل دقیق معادلات حرکت

به منظور اعمال حل دقیق ابتدا از معادلات (۱۸) و (۱۹) نسبت به x_1 و x_2 مشتق گرفته و سپس با جمع روابط حاصل با یکدیگر می‌توان نوشت:

$$\left(1 - \frac{\xi^2 \beta^2 \tau^2}{12}\right) \nabla^4 \tilde{w} + \left(\frac{\beta^2 \tau^2}{12}\right) \nabla^2 \tilde{w} + \left(\frac{-b_0}{a_0} + \frac{b_0 \xi^2 \beta^2 \tau^2}{12a_0}\right) \nabla^2 (\tilde{\varphi}_{1,1} - \tilde{\varphi}_{2,2}) - \left(\frac{(1-\nu)c_0}{2\tau^2 a_0} - \frac{b_0 \beta^2 \tau^2}{12a_0}\right) (\tilde{\varphi}_{1,1} - \tilde{\varphi}_{2,2}) = 0 \quad (۲۶)$$

حال با استفاده از معادلات (۲۶) و (۱۷) تابع پتانسیل $\tilde{\varphi}_{1,1} - \tilde{\varphi}_{2,2}$ به صورت زیر به دست خواهد آمد:

$$(\tilde{\varphi}_{1,1} - \tilde{\varphi}_{2,2}) = e_1 \nabla^4 \tilde{w} + e_2 \nabla^2 \tilde{w} + e_3 \tilde{w} \quad (۲۷)$$

که در آن:

$$e_1 = -\frac{(12a_0^2 - b_0)\tau^2(-12 + \xi^2 \beta^2 \tau^2)}{72a_0 c_0(1 + \nu)} \quad (۲۸)$$

$$e_2 = -\frac{\beta^2 \tau^2(12a_0^2 \tau^2 + b_0(12\xi^2 + \tau^2))}{72a_0 c_0(-1 + \nu)} \quad (۲۹)$$

$$e_3 = \frac{b_0 \beta^2 \tau^2}{6a_0 c_0 - 6a_0 c_0 \nu} \quad (۳۰)$$

با جایگذاری معادله‌ی (۲۷) در معادله‌ی (۱۷) می‌توان نوشت:

$$\nabla^6 \tilde{w} + a_1 \nabla^4 \tilde{w} + a_2 \nabla^2 \tilde{w} + a_3 \tilde{w} = 0 \quad (۳۱)$$

در رابطه فوق:

$$a_1 = \frac{2(3c_0(-1 + \nu) + \beta^2 \tau^2(12a_0^2 \tau^2 - b_0(6\xi^2 + \tau^2)))}{\tau^2(12a_0^2 - b_0)(-12 + \xi^2 \beta^2 \tau^2)} \quad (۳۲)$$

$$a_2 = \frac{\beta^2(12a_0^2 \beta^2 \tau^6 - 6c_0(12\xi^2 + \tau^2) - b_0 + \xi^2 \beta^2 \tau^2 \tau^4)}{\tau^2(12a_0^2 - b_0)(-12 + \xi^2 \beta^2 \tau^2)^2}, \quad (۳۳)$$

$$a_3 = \frac{-12\beta^2(6c_0(1 + \nu) + b_0 \beta^2 \tau^4)}{\tau^2(12a_0^2 - b_0)(-12 + \xi^2 \beta^2 \tau^2)^2} \quad (۳۴)$$

می‌توان معادله‌ی (۳۱) را به صورت زیر بیان کرد:

$$\tilde{w} = W_1 + W_2 + W_3 \quad (۳۵)$$

$$\nabla^2 W_1 + \alpha_1^2 W_1 = 0 \quad (۳۶)$$

$$\nabla^2 W_2 + \alpha_2^2 W_2 = 0 \quad (۳۷)$$

$$\nabla^2 W_3 + \alpha_3^2 W_3 = 0 \quad (۳۸)$$

در روابط فوق α_1^2 ، α_2^2 و α_3^2 به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\alpha_1^2 = -p_1 = \frac{-1}{6U} \left(2^{\frac{4}{3}}(a_1^2 - 3a_2) - 2a_1 U + 2^{\frac{2}{3}} U^2\right) \quad (۳۹)$$

$$\alpha_2^2 = -p_2 = \frac{-1}{12U} \left(2i2^{\frac{1}{3}}(i + \sqrt{3})(a_1^2 - 3a_2) - 4a_1 U - 2^{\frac{2}{3}}(i + \sqrt{3})U^2\right) \quad (۴۰)$$

$$\alpha_3^2 = -p_3 = \frac{-1}{12U} \left(-2i2^{\frac{1}{3}}(-i + \sqrt{3})(a_1^2 - 3a_2) - 4a_1U + 2^{\frac{2}{3}}(i + \sqrt{3})U^2 \right) \quad (41)$$

$$U = \left(-2a_1^3 + 9a_1a_2 - 27a_3 + \sqrt{-4(a_1^2 - 3a_2)^3 + (2a_1^3 - 9a_1a_2 + 27a_3)^2} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (42)$$

با قرار دادن معادلات (۲۷) و (۳۵) در معادله‌ی (۱۷)، چرخش‌ها به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\tilde{\varphi}_1 = C_1W_{1,1} + C_2W_{2,1} + C_3W_{3,1} + C_4W_{4,2}, \quad (43)$$

$$\tilde{\varphi}_2 = C_5W_{1,2} + C_6W_{2,2} + C_7W_{3,2} + C_8W_{4,1}. \quad (44)$$

با جایگذاری روابط (۴۳) و (۴۴) در معادلات (۱۸) ثابت C_i به دست می‌آیند:

$$C_i = \frac{a_0\tau^2(\beta^2\tau^2 + \alpha_i^2(12 + \xi^2\beta^2\tau^2))}{6c_0(-1 + v) - b_0\tau^2(\beta^2\tau^2 + \alpha_i^2(-12 + \xi^2\beta^2\tau^2))}, \quad C_4 = C_8 = 1 \quad (45)$$

و توابع W_4 در شرایط زیر صدق می‌کنند:

$$\nabla^2 W_4 + \alpha_4^2 W_4 = 0 \quad (46)$$

و

$$\alpha_4^2 = \frac{6c_0(-1 + v) + b_0\beta^2\tau^4}{b_0\tau^2(6 - 6v + \xi^2\beta^2\tau^2)}. \quad (47)$$

حال با استفاده از روش جداسازی متغیرها معادلات (۳۶) تا (۳۸) و (۴۶) دارای دسته جوابی به فرم زیر هستند:

$$W_1 = [A_1 \sinh(\mu_1 X_2) + A_2 \cosh(\mu_1 X_2)] \sin(\theta_1 X_1) + [A_3 \sinh(\mu_1 X_2) + A_4 \cosh(\mu_1 X_2)] \cos(\theta_1 X_1) \quad (49)$$

$$W_2 = [A_5 \sinh(\mu_2 X_2) + A_6 \cosh(\mu_2 X_2)] \sin(\theta_2 X_1) + [A_7 \sinh(\mu_2 X_2) + A_8 \cosh(\mu_2 X_2)] \cos(\theta_2 X_1) \quad (50)$$

$$W_3 = [A_9 \sin(\mu_3 X_2) + A_{10} \cos(\mu_3 X_2)] \sin(\theta_3 X_1) + [A_{11} \sin(\mu_3 X_2) + A_{12} \cos(\mu_3 X_2)] \cos(\theta_3 X_1) \quad (51)$$

$$W_4 = [A_{13} \sinh(\mu_4 X_2) + A_{14} \cosh(\mu_4 X_2)] \sin(\theta_4 X_1) + [A_{15} \sinh(\mu_4 X_2) + A_{16} \cosh(\mu_4 X_2)] \cos(\theta_4 X_1) \quad (52)$$

باید توجه داشت که در روابط (۴۹) تا (۵۲) شرایط زیر برقرار هستند:

$$\alpha_1^2 = \mu_1^2 - \theta_1^2, \quad \theta_1^2 > 0, \quad \mu_1^2 > 0, \quad (53)$$

$$\alpha_2^2 = \mu_2^2 - \theta_2^2, \quad \theta_2^2 > 0, \quad \mu_2^2 > 0, \quad (54)$$

$$\alpha_3^2 = \mu_3^2 + \theta_3^2, \quad \theta_3^2 > 0, \quad \mu_3^2 > 0, \quad (55)$$

$$\alpha_4^2 = \mu_4^2 - \theta_4^2, \quad \theta_4^2 > 0, \quad \mu_4^2 > 0. \quad (56)$$

۳- اعتبارسنجی نتایج با مراجع

در این بخش نتایج به دست آمده برای نانو ورق مربعی با استفاده از تئوری غیرمحملی اصلاح‌شده‌ی سینوسی، با مراجع [۲۳] و [۲۶] که از حل تحلیلی ناویر به ترتیب با استفاده از تئوری‌های مرتبه اول برشی و مرتبه سوم برشی نسبت فرکانسی نسبت را برای ورق با چهار تکیه‌گاه ساده به دست آورده‌اند مقایسه شده است.

نسبت فرکانسی به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$\frac{\beta^{nl}}{\beta^l} = \text{نسبت فرکانسی} \quad (57)$$

که β^{nl} بیانگر فرکانس بی‌بعد برای مواد نانو و β^l فرکانس بی‌بعد برای مواد غیر نانو می‌باشد. لازم به ذکر است که در تمامی مراحل محاسبه ضریب پواسون 0.3 در نظر گرفته شده است. جدول (۱) برای ورق مربعی ($\eta = 1$) با تکیه‌گاه‌های چهار طرف ساده، نسبت ضخامت به طول 0.1 ($\tau = 0.1$)، مقادیر مختلف پارامتر بی‌بعد غیرمحملی ($\xi^2 = 0, 0.2, 0.4, 0.6$) و شماره مودهای (m, n) بوده است.

جدول ۱. مقایسه‌ی نسبت فرکانسی با مراجع ($b/a = 1$)

(m,n)	روش	$\xi^2 = 0$	$\xi^2 = 0.2$	$\xi^2 = 0.4$	$\xi^2 = 0.6$
(۱و۱)	مرجع [۲۶]	۱/۰۰	۰/۷۴۷۵	۰/۴۹۰۴	۰/۳۵۱۲
	مرجع [۲۳]	۱/۰۰	۰/۷۴۷۷	۰/۴۹۰۴	۰/۳۵۱۲
	تحقیق حاضر	۱/۰۰	۰/۷۴۷۵	۰/۴۹۰۳	۰/۳۵۱۲
(۱و۲)	مرجع [۲۶]	۱/۰۰	۰/۵۷۹۹	۰/۳۳۵۳	۰/۲۳۰۸
	مرجع [۲۳]	۱/۰۰	۰/۵۸۰۱	۰/۳۳۵۳	۰/۲۳۰۹
	تحقیق حاضر	۱/۰۰	۰/۵۷۹۸	۰/۳۳۵۲	۰/۲۳۰۸
(۲و۱)	مرجع [۲۶]	۱/۰۰	۰/۵۷۹۹	۰/۳۳۵۳	۰/۲۳۰۸
	مرجع [۲۳]	۱/۰۰	۰/۵۸۰۱	۰/۳۳۵۳	۰/۲۳۰۹
	تحقیق حاضر	۱/۰۰	۰/۵۷۹۸	۰/۳۳۵۲	۰/۲۳۰۸
(۲و۲)	مرجع [۲۶]	۱/۰۰	۰/۴۹۰۴	۰/۲۷۰۸	۰/۱۸۴۴
	مرجع [۲۳]	۱/۰۰	۰/۴۹۰۶	۰/۲۷۰۸	۰/۱۸۴۴
	تحقیق حاضر	۱/۰۰	۰/۴۹۰۳	۰/۲۷۰۸	۰/۱۸۴۳

با توجه به جدول (۱) مشخص است که انطباق بسیار مناسبی بین نتایج حاصل از حل دقیق در این مقاله با حل‌های تحلیلی ارائه‌شده در مراجع برقرار است. همان‌طور که از جدول (۱) قابل مشاهده است اختلاف اندکی بین نتایج تئوری اصلاح‌شده و مرجع [۲۶] که از تئوری میندلین استفاده کرده است وجود دارد. این اختلاف از آنجا ناشی می‌شود که در تئوری میندلین تنش‌های برشی عرضی در سطوح آزاد بالا و پایین ورق صفر نگردیده و برای اصلاح آن از ضریب تصحیح استفاده می‌شود، حال آنکه در تئوری اصلاح‌شده تنش‌های برشی عرضی در سطوح آزاد بالا و پایین ورق صفر گردیده و نیازی به ضریب تصحیح نیست.

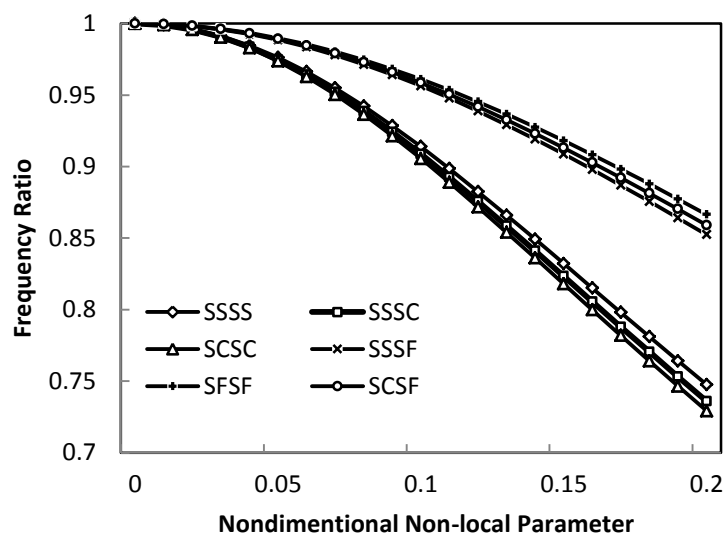
۴- بحث و بررسی نتایج عددی

در این بخش ابتدا نسبت‌های فرکانسی (نسبت فرکانس طبیعی نانو ورق به فرکانس طبیعی ورق) برای پنج شرط مرزی متفاوت و دو نسبت عرض به طول (η) ۱ و ۲ با نسبت ضخامت به طول 0.1 ، جهت مود (۱و۱) ارائه شده است. با توجه به جدول‌های (۱) و (۲) و شکل (۲) و (۳) می‌توان دریافت که با افزایش مقدار پارامتر غیرمحملی، تأثیر مقیاس کوچک بیشتر شده و فرکانس طبیعی بی‌بعد ورق نیز کاهش می‌یابد. این پدیده دلالت بر آن دارد که ورق‌ها با ابعاد نانو و افزایش تأثیر مقیاس کوچک باعث می‌شود سازه نرم‌تر گردیده که به همین دلیل فرکانس‌های طبیعی نیز کاهش می‌یابند. بر این اساس فرکانس طبیعی بی‌بعد محاسبه‌شده با تئوری غیرمحملی نسبت به آنچه تئوری‌های محلی پیش‌بینی کرده‌اند کوچک‌تر است که این موضوع برای همه‌ی شرایط مرزی صادق است.

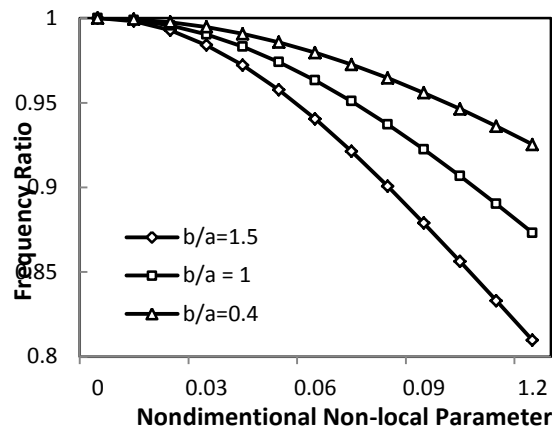
می‌توان مشاهده کرد که کمترین نسبت فرکانسی مربوط به ورق مستطیلی با شرایط مرزی SCSC و بیشترین نسبت فرکانسی مربوط به ورق مستطیلی با شرایط مرزی SFSF است؛ زیرا شرایط مرزی SCSC سخت‌ترین و شرایط مرزی SFSF نرم‌ترین حالت را ایجاد می‌کنند. به عبارتی اثر مقیاس کوچک بر فرکانس‌های طبیعی بزرگ‌تر، کاهش شدیدتر فرکانس است. همچنین با توجه به شکل ۳ با کاهش نسبت عرض به طول و با توجه به شکل ۴ برای مودهای بالاتر ارتعاش، نسبت فرکانسی کاهش یافته است.

جدول ۲. تأثیر پارامتر مقیاس کوچک بر نسبت فرکانسی با شرایط مرزی مختلف

BC	η	$\xi^2 = 0$	$\xi^2 = 0.12$	$\xi^2 = 0.14$	$\xi^2 = 0.16$
SSSC	$\eta = 1$	۱/۰۰	۰/۷۳۷۳	۰/۴۷۸۳	۰/۳۴۱۱
	$\eta = 2$	۱/۰۰	۰/۸۱۵۸	۰/۵۷۶۲	۰/۴۲۵۲
SCSC	$\eta = 1$	۱/۰۰	۰/۷۳۱۵	۰/۴۷۱۷	۰/۳۳۵۶
	$\eta = 2$	۱/۰۰	۰/۸۱۳۹	۰/۵۷۳۴	۰/۴۲۲۷
SSSF	$\eta = 1$	۱/۰۰	۰/۸۵۵۱	۰/۶۳۳۴	۰/۴۷۷۵
	$\eta = 2$	۱/۰۰	۰/۸۵۴۰	۰/۶۳۲۰	۰/۴۷۶۴
SFSC	$\eta = 1$	۱/۰۰	۰/۸۵۶۳	۰/۶۳۷۲	۰/۴۸۲۲
	$\eta = 2$	۱/۰۰	۰/۸۵۳۰	۰/۶۳۱۱	۰/۴۸۲۲
SFSF	$\eta = 1$	۱/۰۰	۰/۸۶۱۲	۰/۶۴۹۳	۰/۴۹۷۴
	$\eta = 2$	۱/۰۰	۰/۸۵۱۰	۰/۶۳۷۷	۰/۴۷۹۲

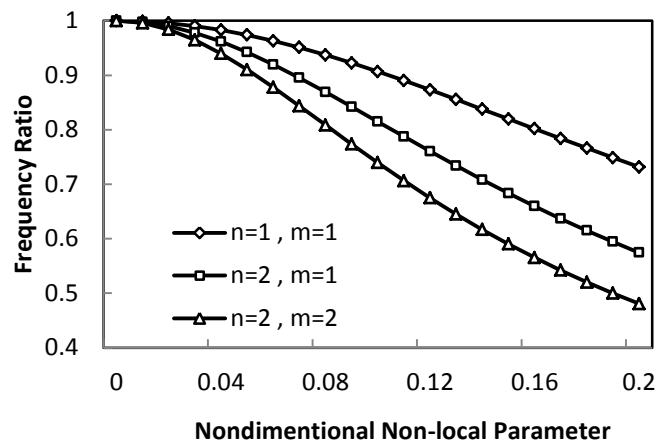


شکل ۲. تغییرات نسبت فرکانسی بی‌بعد با پارامتر بی‌بعد غیر محلی، نسبت ضخامت به طول ۰/۱ و نسبت طول به عرض ۱ برای شرایط مرزی مختلف.

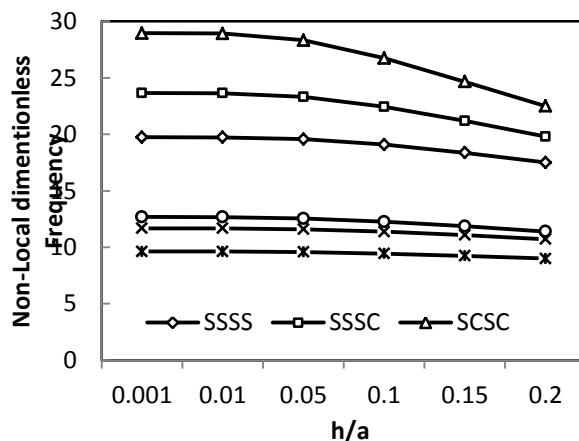


شکل ۳. تغییرات نسبت فرکانسی با پارامتر بی‌بعد غیرمحلی، شرط مرزی SCSC و نسبت ضخامت به طول ۰/۱ برای نسبت طول به عرض مختلف.

با توجه به شکل (۴)، تأثیر پارامتر غیرمحلی بر فرکانس طبیعی بی‌بعد ورق در مودهای بالاتر و نسبت عرض به طول کمتر، محسوس‌تر می‌باشد، به بیان دیگر هنگامی که برهم‌کنش میان اتم‌ها افزایش یابد تأثیر پارامتر غیرمحلی هم محسوس‌تر می‌گردد.



شکل ۴. تغییرات نسبت فرکانسی با پارامتر بی‌بعد غیرمحلی، ورق با شرایط مرزی SCSC، نسبت ضخامت به طول ۰/۱ و طول به عرض ۱ برای مودهای ارتعاشی مختلف.



شکل ۵. تغییرات فرکانس بی‌بعد غیر محلی با نسبت ضخامت به طول، نانو ورق با پارامتر غیرمحلی ۰/۲ برای شرایط مرزی مختلف.

با توجه به شکل (۵)، به‌طور کلی تغییرات فرکانس بی‌بعد غیر محلی به نسبت ضخامت به طول در مقایسه با سایر پارامترها کمتر می‌باشد، از این رو برای یک نسبت طول به عرض، پارامتر غیر محلی، شرایط مرزی و شماره مود ثابت، مقدار نسبت فرکانسی با تغییر نسبت ضخامت به طول تغییر چندانی نمی‌کند.

۵- نتیجه‌گیری

در مطالعه‌ی حاضر حل دقیق ارتعاش خارج از صفحه‌ی نانو ورق‌های مستطیلی نسبتاً ضخیم با استفاده از تئوری غیر محلی تغییر شکل سینوسی اصلاح شده برای شش شرط مرزی لوی برای اولین بار مورد بررسی قرار گرفته است. با توجه به جدول (۲) و شکل‌های (۲) تا (۵) به راحتی می‌توان دریافت فرکانس‌های حاصله از تئوری غیر محلی نسبت به تئوری‌های محلی کمتر است، دلیل این امر آن است که مواد نانو دارای ساختار نرم‌تر و منعطف‌تر نسبت به مواد غیر نانو هستند. همچنین از بین شرایط مرزی مختلف مورد بررسی شرط مرزی *SFSF* به دلیل سطوح آزاد خود دارای سختی کمتر و در نتیجه کمترین فرکانس طبیعی می‌باشد، در نقطه‌ی مقابل شرط مرزی *SCSC* به دلیل دارا بودن بیشترین لبه‌ی گیردار و در نتیجه سختی بیشتر دارای بیشترین فرکانس طبیعی می‌باشد. تئوری ارائه شده در این مقاله تئوری اصلاح شده‌ی سینوسی است، در این تئوری همانند تئوری مرتبه سوم ردی، تنش‌های برشی عرضی در سطوح آزاد بالا و پایین صفر می‌شود حال آنکه در تئوری میندلین چنین نبوده و نیاز به ضریب اصلاح می‌باشد بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که تئوری اصلاح شده‌ی سینوسی نسبت به تئوری میندلین بهتر رفتار ارتعاشی ورق را شبیه‌سازی می‌کند و جواب‌های حاصله از آن دارای دقت بیشتری می‌باشد.

۶- مراجع

- [1] Leissa A.W. Vibration of plates, NASA, 1969.
- [2] Leissa A.W. Recent Research in Plate Vibrations: classical theory. The Shock and Vibration Digest. 1977; 10(9):13-24.
- [3] Leissa A.W. Recent research in plate vibrations: complicating effects. The Shock and Vibration Digest. 1977; 11(9):1973-1976.
- [4] Leissa, A.W. The free vibration of rectangular plates. Journal of Sound and Vibration. 1973; 3(31):257-293.
- [5] Mindlin R.D. Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates. International Journal of Pressure Vessels and Piping. 1951; 15(67):220-231.
- [6] Mindlin R.D, Schacknow A, Deresiewicz H. Flexural vibration of rectangular plates, Journal of Applied Mechanics. 1956; 1(23):430-433.
- [7] Hosseini-Hashemi Sh, Rokni Damavandi Taher H, Akhavan H, Omid M. Free vibration of functionally graded rectangular plates using first-order shear deformation plate theory, Applied Mathematical Modelling. 2010; 5(35):1276-1291.
- [8] Khorshidi K. Effect of hydrostatic pressure and depth of fluid on the vibrating rectangular plates partially in contact with a fluid, Applied Mechanics and Materials. 2011; 110-116:927-935.
- [9] Khorshidi K, Farhadi S. Free vibration analysis of a laminated composite rectangular plate in contact with a bounded fluid, Composite Structures. 2013; 45(104):176-186.
- [10] Malekzadeh P, Fiouz A.R, Sobhrouyan M. Three-dimensional free vibration of functionally graded truncated conical shells subjected to thermal environment. International Journal of Pressure Vessels and Piping. 2012; 12(89):210-221.
- [11] Dozio L. On the use of the Trigonometric Ritz method for general vibration analysis of rectangular Kirchhoff plates. Thin-Walled Structures. 2011; 1(49):129-144.
- [12] Rangoa R.F, Nallim L.G, Oller S. Formulation of enriched macro elements using trigonometric shear deformation theory for free vibration analysis of symmetric laminated composite plate assemblies. Composite Structures. 2015; 13(119):38-49.
- [13] Mantari J, Soares C.G. A trigonometric plate theory with unknowns and stretching effect for advanced composite plates. Composite Structures. 2014; 5(107):396-405.

- [14] Tounsi A, Houari M.S.A, Benyoucef S, Bedia E.A.A. A refined trigonometric shear deformation theory for thermoelastic bending of functionally graded sandwich plates. *Aerospace Science and Technology*. 2013; 1(24):209-220.
- [15] Sayyad A.S, Ghugal Y.M. Bending and free vibration analysis of thick isotropic plates by using exponential shear deformation theory. *Applied and Computational mechanics*. 2012; 2(100):290-299.
- [16] Kharde S.B, Mahale A.K, Bhosale K.C, Thorat S.R. Flexural vibration of thick isotropic plates by using exponential shear deformation theory. *International Journal of Emerging Technology and Advanced Engineering*. 2013; 1(3):369-374.
- [17] Yang Y, Zhang L, Lim C.W. Wave propagation in double-walled carbon nanotubes on a novel analytically nonlocal Timoshenko-beam model. *Journal of Sound and Vibration*. 2011; 330(8):1704-1717.
- [18] Ke L.L, Wang Y.S. Flow-induced vibration and instability of embedded double-walled carbon nanotubes based on a modified couple stress theory. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*. 2011; 43(5):1031-1039.
- [19] Wang L. Wave propagation of fluid-conveying single-walled carbon nanotubes via gradient elasticity theory. *Computational Materials Science*. 2010; 4(49):761-766.
- [20] Yang F, Chong A.C.M, Lam D.C.C, Tong P. Couple stress based strain gradient theory for elasticity. *International Journal of Solids and Structures*. 2002; 10(39):235-243.
- [21] Ke L.L, Wang Y.S, Yang J, Kitipornchai S. Free vibration of size-dependent mindlin microplates based on the modified couple stress theory. *Journal of Sound and Vibration*. 2012; 1(333):94-106.
- [22] Aksencer T, Aydogdu M. Levy type solution method for vibration and buckling of nanoplates using nonlocal elasticity theory. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*. 2011; 43(4):954-959.
- [23] Aghababaei R, Reddy J. Nonlocal third-order shear deformation plate theory with application to bending and vibration of plates. *Journal of Sound and Vibration*. 2009; 326(1):277-289.
- [24] Natarajan S, Chakraborty S, Thangavel M, Bordas S, Rabczuk T. Size-dependent free flexural vibration behavior of functionally graded nanoplates. *Computational Materials Science*. 2012; 30(65):74-80.
- [25] Hosseini-Hashemi Sh, Zare M, Nazemnezhad R. An exact analytical approach for free vibration of Mindlin rectangular nano-plates via nonlocal elasticity. *Composite Structures*. 2013; 2(100):290-299.
- [26] Zhang P.Q, Lee H.P, Wang C.M, Reddy J.N. Non-local elastic plate theories. *Proceedings of the Royal Society*. 2007; 2088(463):32-40.