

Out of plane Vibration of carbon nanotubes by stress and strain gradient theories based on Donnell's shell theory

Saeed Jafari Mehrabadi ^{a*}, Mohammad Khodadadi ^b, Tahmoores Asgari^c

^a Department of Mechanical Engineering, Islamic Azad University, Arak Branch, Arak, Iran


^{b,c} Ms.C. Student, Mechanical Engineering, Arak University, Arak, Iran

Original Article

Use your device to scan
and read the article online



Citation: Mehrabadi S J, Khodadadi M, Asgari T. Vibration of carbon nanotubes by stress and strain gradient theories based on Donnell's shell theory. *Mechanics of Advanced and Smart Materials*. 2022;1(2):201-215.

 <https://10.52547/masm.1.2.201>

KEYWORDS

Carbon nanotube,
Out of plane vibration,
Stress and strain gradient
theories,
Love and Rayleigh frequencies,
Donnell's thin shell theory.

ABSTRACT

Nowadays, micro/nano materials are widely used in various engineering applications such as nanoelectro- mechanical systems, opto-electronics, nuclear engineering, aerospace engineering, energy storage, civil engineering and etc. recently, different non-classical theories such as the couple stress, the nonlocal elasticity and the strain gradient elasticity theories have been developed to consider the size dependency behavior of the structures in small-scales. In this paper, out of plane vibration analysis of single-walled carbon nanotubes were studied using stress gradient theory, strain gradient theory and the classical theory of elasticity based on the assumptions of the Donnell's thin shell theory. To determining the free vibration parameters of the carbon nanotube, the kinetic and strain (potential) energies were obtained and will be maximized then using Rayleigh's method the natural frequency was obtained. Natural frequency of the Rayleigh and Love modes of out of plane vibration of the single wall carbon nanotubes out are estimated using stress gradient theory, strain gradient theory and the classical theory of elasticity based on the assumptions of the Donnell's thin shell theory. In order to verify the accuracy and reliability of the present study, the results were obtained in this study were compared and validated with available data in the literature. Using numerical data provided, effect of different parameters including length, thickness and radius of the single-walled carbon nanotubes on the natural frequency of the Rayleigh and Love modes are examined and discussed in detail.

Extended Abstract

1. Introduction

The most well-known non-classical theories used to study the deformation of carbon nanotubes have two distinct relationships. The first relationship presented by Eringen. The relationship proposed by Eringen is called the stress gradient theory [1] and the theory of nonlocal elasticity [2]. Another relation proposed by Mindlin and Ashle is known as the strain gradient model [3-6]. Levy et al. [14] used Low's shell theory to study the free vibration of cylindrical shells with simple supports. Pradhan et al. [15] also investigated the free vibration of shells with different boundary conditions.

2. Mathematical Formulation

We consider cylindrical single-walled carbon nanotubes to be of average length L , thickness, h and radius R as shown in Figure 1. For this single-walled carbon nanotube, the material displacements located on the center plate of the cylindrical shell in the axial, lateral, and radial directions are considered with, and, respectively.

$$u = u_0 + z \frac{\partial w}{\partial x} \quad (1)$$

* Corresponding author. Tel.: 09181604313; Fax: 08633412535

E-mail address: s-jafari@iau-arak.ac.ir

DOI: <https://10.52547/masm.1.2.201>

Received: January 08, 2022; Received in revised form: January 29, 2022; Accepted: February 06, 2022

2022 Published by Arak University Press. All rights reserved.



$$V = V_0 + z \frac{\partial w}{R \partial \theta} \tag{2}$$

$$w = w \tag{3}$$

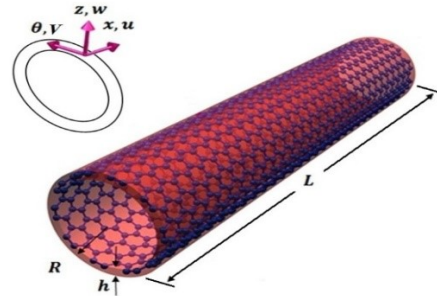


Figure 1. Carbon-nanotube, coordinates and geometrical dimensions

According to Donnell's thin-shell theory [19], the relationships between strain and displacement are as follows:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{4}$$

$$\epsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial V_0}{\partial \theta} - \frac{w}{R} \right) + z \left(\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \quad \epsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial V_0}{\partial \theta} - \frac{w}{R} \right) + z \left(\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \tag{5}$$

$$\epsilon_{\theta x} = \left(\frac{\partial u_0}{R \partial \theta} + \frac{\partial V_0}{\partial x} \right) + z \left(\frac{2}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial x} \right) \tag{6}$$

To satisfying the conditions of out of plane vibrations the displacements of the material points of the cylindrical shell in the axial, lateral and radial directions are assumed as follows:

$$u = - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{R}{n} B_n \sin(n\theta) \tag{7}$$

$$V = \sum_{n=2}^{\infty} (A_n \cos(n\theta) + B_n x \sin(n\theta)) \tag{8}$$

$$w = - \sum_{n=2}^{\infty} n (A_n \sin(n\theta) + B_n x \cos(n\theta)) \tag{9}$$

Now, by equating the maximum kinetic energy with the maximum strain energy of the rail mode frequency, the following equation is obtained:

$$\omega_R^2 = \frac{E h^2 n^6}{12 \rho R^4 (1 - \nu^2) (1 + n^2)} \tag{10}$$

Contrary to Rayleigh vibration mode, in the Love vibration mode, the axis line of cylinder does not remain parallel to the x axis of the cylinder and rotated like a rigid line. The Love's frequency mode according to its hypotheses is calculated as follows:

$$\omega_L^2 = \frac{E h^2 n^6 \left(1 + \frac{6(1 - \nu) R^2}{n^2 L^2} \right)}{12 \rho R^4 (1 - \nu^2) \left((1 + n^2) + \frac{3 R^2}{n^2 L^2} \right)} \tag{11}$$

3. Calculation of frequencies using strain gradient theory

For Love and Rayleigh frequencies such as classical states and stress gradients, we can write:

$$\omega_R^2 = \omega_{RMB}^2 (1 \mp \Phi n^2) \left(\frac{h^2 n^6}{12 (1 + n^2) R^2} \right) \tag{12}$$

$$\omega_L^2 = \omega_{RMB}^2 (1 \mp \Phi n^2) \frac{h^2 n^6 (1 + \frac{6(1-\nu)R^2}{n^2 L^2})}{12R^2 ((1 + n^2) + \frac{3R^2}{n^2 L^2})} \tag{13}$$

4. Discussion and Results

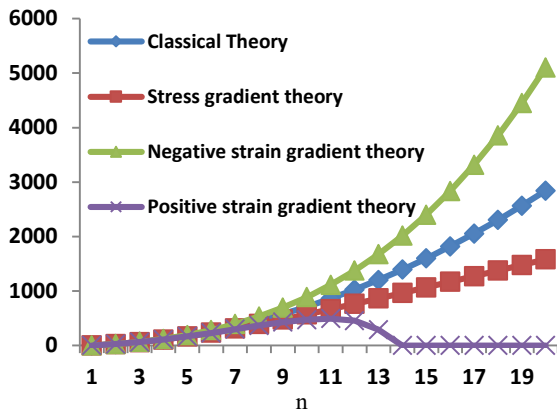


Figure 2. Rayleigh's frequency changes with lateral wave number changes

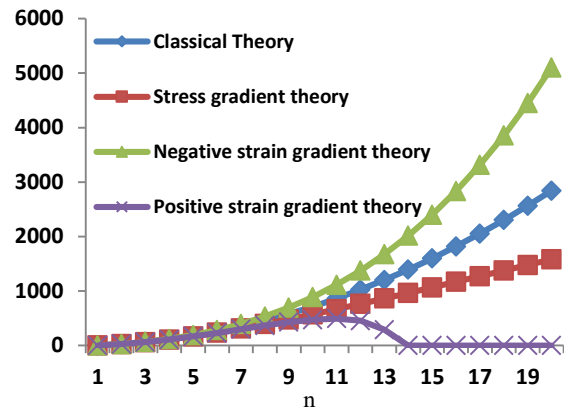


Figure 3. Love's frequency changes with lateral wave number changes

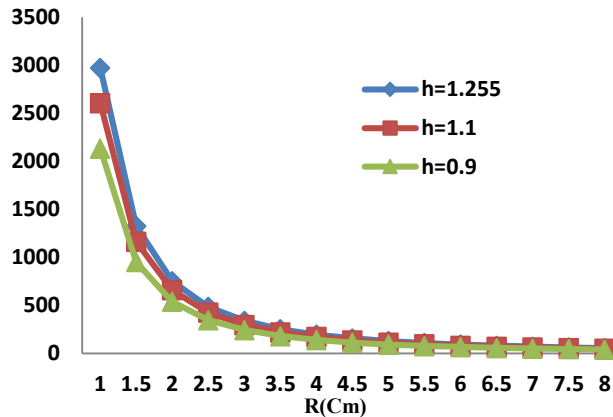


Figure 4. Rayleigh's frequency changes with radius changes in classical theory

As can be seen from Figure 2, the frequency for a positive sign strain gradient does not increase uniformly with increasing n. But after reaching a maximum value, its value is reduced, which is due to the presence of the expression in the frequency formula of this theory. Figure 3 shows the frequency chart according to Love's theory. As it turns out, the Love's frequency behavior is similar to the Rayleigh's frequency treatment. But with this difference, Love's frequency depends on the length of the cylinder, while Rayleigh's frequencies are independent of the length of the cylinder. The Love's frequencies obtained from the classical theory for all values of n are greater than the frequencies obtained from the stress gradient theory and the strain gradient theory with a positive sign. Figure 3 shows the variations of Rayleigh's frequency with respect to the radius of cylinder in classical theory. As shown in this figure, with increasing the radius of the cylinder, the Figure 3 shows the variations of Rayleigh's frequency with respect to the radius of cylinder in classical theory. As shown in this figure, with increasing the radius of the cylinder, the Rayleigh's frequency decreases, which is due to the reduction of the stiffness of the cylinder and increase its displacement, which in turn absorbs less energy for vibration.

5. Conclusions

In this paper, the Love and Rayleigh frequencies for out of plane vibrations of single-walled carbon nanotubes are obtained using two, non-local and classical theories based on the assumptions of the Donnell's thin-shell theory. It is shown that the results for the Love and Rayleigh frequencies in each theory differ from the other only by one coefficient. For example, in the classical theory, this coefficient is equal to one; in the stress gradient theory by $1/(1 + \Phi n^2)$ in the strain gradient theory by $1/(1 - \Phi n^2)$. The graph of Rayleigh and Love frequencies in strain gradient theory did not increase due to its coefficient of increase, but decreased after reaching a maximum value. As can be seen from the relations, these two frequencies increase with increasing thickness and decrease with increasing cylinder radius. It was also found that the Rayleigh frequency was not related to the length of the cylinder, but the Love frequency was related to the length of the pipe.



تحلیل ارتعاش خارج از صفحه‌ی نانو لوله‌های کربنی تک جداره با استفاده از تئورهای گرادیان کرنش و تنش بر مبنای تئوری پوسته‌ی نازک دائل

سعید جعفری مهرآبادی^{الف*}، محمد خدادادی^ب، تهمورث عسگری^ج الف

^{الف} استادیار، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد اراک، اراک، s-jafarim@iau-arak.ac.ir

^ب کارشناسی ارشد، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه اراک، اراک، m.khodadadi.msc.mechanic@gmail.com

^ج کارشناسی ارشد، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه اراک، اراک، t_asgari@arshad.araku.ac.ir

چکیده	واژگان کلیدی
<p>امروزه، مواد دارای ساختار میکرو / نانو به‌طور گسترده‌ای در کاربردهای مختلف مهندسی از قبیل سیستم‌های نانوالکترومکانیکی، علوم مربوط به نور، مهندسی هسته‌ای، مهندسی هوافضا، ذخیره انرژی، مهندسی عمران و غیره مورد استفاده قرار می‌گیرند. به‌تازگی، تئوری‌های مختلف غیر کلاسیک مانند تنش کوپل، الاستیسیته غیر محلی و گرادیان کرنش جهت در نظر گرفتن رفتار وابستگی اندازه در ساختارهای مقیاس کوچک توسعه یافته‌اند. در این مقاله، ارتعاش خارج از صفحه‌ی نانو لوله‌های کربنی تک جداره با استفاده از تئوری گرادیان تنش، تئوری گرادیان کرنش و تئوری کلاسیک الاستیسیته بر اساس فرضیات تئوری پوسته نازک دائل مورد مطالعه قرار گرفته است. جهت محاسبه پارامترهای ارتعاش آزاد نانو لوله‌های کربنی، انرژی‌های جنبشی و کرنشی (پتانسیل) را محاسبه کرده و با اکسترمم کردن این انرژی‌ها از روش انرژی ریلی فرکانس طبیعی سیستم به دست آمده است. همچنین فرکانس طبیعی مودهای ریلی و لاو ارتعاش خارج از صفحه‌ی نانو لوله‌های کربنی تک جداره با به‌کارگیری تئوری گرادیان تنش و تئوری گرادیان کرنش بر اساس فرضیات تئوری پوسته‌ی نازک دائل برآورد می‌گردد که این موضوع از مهم‌ترین نوع نوآوری‌های کار حاضر نیز می‌باشد. به‌منظور بررسی دقت و اعتبار روش تحلیلی حاضر، نتایج به‌دست‌آمده در این مقاله با نتایج ارائه‌شده در مراجع مقایسه و صحت‌گذاری گردیده است. در نتایج عددی به‌دست‌آمده، تأثیر پارامترهای مختلف از قبیل؛ طول، ضخامت و شعاع نانو لوله‌های کربنی تک جداره بر فرکانس‌های طبیعی ریلی و لاو مورد بررسی و تجزیه و تحلیل قرار گرفته است.</p>	<p>نانو لوله‌های کربنی، ارتعاش خارج از صفحه، تئوری‌های گرادیان کرنش و تنش، فرکانس‌های لاو و ریلی، تئوری پوسته‌ی نازک دائل.</p>
	تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۱۰/۱۸
	تاریخ بازنگری: ۱۴۰۰/۱۱/۰۹
	تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۱۱/۱۷

۱- مقدمه

نانو لوله‌ی کربنی، سازه‌ای است که از ذرات نانو و در ابعاد نانو ساخته شده است. قطر یک نانو لوله در حدود چند میلی‌متر است در حالی که طول آن می‌تواند به چندین میلی‌متر هم برسد. استحکام کششی این سازه‌ها گاهی ۱۰۰ برابر فولاد، رسانایی الکتریکی بسیار بالا، انعطاف‌پذیری زیاد و ... باعث کاربرد فراوان آن در صنعت شده است. پوسته‌های استوانه‌ای به‌عنوان یکی از اجزای ساختاری مهم به‌طور وسیع در صنایع دفاعی، هوافضا و همچنین صنایع نفت و پتروشیمی مورد استفاده قرار می‌گیرند. در سال‌های اخیر با کاربرد رو به گسترش پوسته‌های استوانه‌ای در این صنایع، مطالعه و شناخت پارامترهای مهم طراحی از جمله

فرکانس طبیعی در تحلیل‌های دینامیکی این سازه‌ها از اهمیت ویژه‌ای برخوردار شده است، چراکه عدم توجه به این پارامتر مهم در فرآیند طراحی ممکن است به نتایج فاجعه‌بار به علت وقوع پدیده تشدید منجر شود. از این رو مطالعه و شناخت رفتار دینامیکی این سازه‌ها از موضوعات اساسی در طراحی بهینه و کاربرد موفقیت‌آمیز آن‌ها به شمار می‌رود. بخش عمده‌ای از تحقیقات انجام‌شده تاکنون به بررسی رفتار ارتعاشی این سازه‌ها اختصاص یافته است. شعاع و طول در مدل استوانه‌ای جدار نازک به صورت شعاع و طول متوسط نانو لوله‌های کربنی تک جداره مطرح شده‌اند. ضخامت استوانه نیز فرضی است.

معروف‌ترین تئوری‌های غیر کلاسیک که برای مطالعه‌ی تغییر شکل نانولوله‌های کربنی به کار گرفته شده‌اند دارای دو رابطه‌ی متمایز هستند. رابطه اول که توسط ارینگن ارائه گردید. رابطه ارائه شده توسط ارینگن، تئوری گرادیان تنش [۱] و تئوری الاستیسیته غیر محلی [۲] نام دارد. رابطه دیگر که توسط میندلین و اشل ارائه گردیده است، به نام مدل گرادیان کرنش معروف است [۳-۶]. اگر پارامترهای معرف ساختار نانو در هر دو رابطه صفر قرار داده شود همان قانون هوک برای مواد الاستیک خطی به دست می‌آید. انتخاب علامت مثبت یا منفی در مدل گرادیان کرنش منجر به تغییرات مهمی در رفتار دینامیکی نانولوله‌های کربنی تک جداره می‌شود. برای مثال شی هانگ و همکاران این تغییرات را بررسی کرده‌اند [۷]. پارامتر دما می‌تواند بسیار تأثیرگذار باشد برای نمونه، خدادادی و همکارانش [۸] با در نظر گرفتن اثرات حرارتی، تحلیل ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی را انجام دادند. آن‌ها معادلات حرکت را بر اساس تئوری پوسته لاو^۱ و روابط سینماتیکی ون کارمن^۲ به دست آوردند. مورمو و همکاران [۹] اثرات حرارت را در نانولوله‌های کربنی مستقر بر بستر الاستیک را بررسی کرده‌اند. بخششی و خورشیدی [۱۰] ارتعاش آزاد ورق‌های نانو مستطیلی تابعی مدرج در محیط حرارتی با استفاده از تئوری تنش کوپل اصلاح‌شده با ملاحظات فرضیات تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول مورد تحلیل و بررسی قرار دادند. تئوری تنش کوپل اصلاح‌شده یک تئوری غیر کلاسیک می‌باشد. پوسته‌های استوانه‌ای شکل می‌توانند انواع حالت‌های ارتعاشی را از خود نشان دهند برای نمونه ملک زاده و همکاران [۱۱] به بررسی انواع حالات ارتعاشی پرداخته‌اند. برای یک لوله‌ی نانو کربنی تک جداره‌ی فرضی و برای علامت مثبت تئوری، فرکانس مد تنفس شعاعی افزایش یافته است و زمانی که علامت منفی بررسی گردد عکس این حالت رخ می‌دهد. بعلاوه تئوری گرادیان کرنش با علامت مثبت، فرکانسی را که محاسبه می‌کند با آزمایش‌ها و مدل شبکه‌ی بلوری مطابقت دارد [۱۲]. در غیاب شرایط مرزی کشش و جابجایی، پوسته‌ی نازک ساخته شده از ماده‌ی الاستیک خطی، همگن و ایزوتروپیک مدهای لاو و ریلی^۳ ارتعاشات خارج از صفحه را نشان می‌دهد [۱۳]. لوی و همکارانش [۱۴] با استفاده از تئوری پوسته لاو ارتعاش آزاد پوسته استوانه‌ای با تکیه‌گاه‌های ساده را مورد مطالعه قرار دادند. پرادهان و همکاران [۱۵] نیز ارتعاش آزاد پوسته‌ها با شرایط مرزی مختلف را بررسی نمودند. به منظور بررسی رفتار ارتعاشی پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی، راه حل تحلیلی توسط انصاری و درویش [۱۶] ارائه گردید. همچنین رحیمی و همت‌نژاد [۱۷] در تحقیقی تحلیل رفتار ارتعاشی پوسته‌ای مدرج تابعی با تکیه‌گاه‌های حلقوی در راستای طولی را بررسی کرده‌اند. داس و همکارانش [۱۸] با استفاده از تئوری پوسته‌ی نازک فلاگ به بررسی رفتار ارتعاشی نانو لوله‌های کربنی تک جداره پرداختند.

در این مقاله پارامتر فرکانسی برای مدل‌های ارتعاشی لاو و ریلی برای لوله‌های نانو کربنی تک جداره با استفاده از تئوری‌های نانو (غیر کلاسیک) بر اساس فرضیات تئوری پوسته‌ی نازک دانل^۴ برای اولین بار به دست آورده شده است. برای این منظور روابط بین کرنش و جابجایی برای پوسته‌ی نانولوله استوانه‌ای شکل با فرضیات رفتار دینامیکی خارج از صفحه‌ای تعمیم داده شده است. با استفاده از روابط تنش-کرنش برای هریک از تئوری‌های مفروض (تئوری گرادیان تنش و تئوری گرادیان کرنش) روابط تنش-کرنش محاسبه گردیده است با توجه به روابط کرنش-جابجایی و تنش-کرنش حاصله انرژی‌های جنبشی و کرنشی (پتانسیل) نانولوله‌های کربنی تک جداره به دست آمده‌اند. سپس با اکستریم نمودن انرژی‌ها و با به کارگیری روش انرژی، فرکانس‌های لاو و ریلی به دست آورده شده است. در ادامه فرکانس‌های به دست آمده در هر تئوری با تئوری‌های دیگر مقایسه شده است و تأثیر

¹ Love's shell theory

² Von karman

³ Rayleigh and Love modes

⁴ Donnell's shell theory

پارامترهای مختلف بر فرکانس‌های لای و ریلی مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته است. در نهایت جهت صحت‌گذاری نتایج حاصله با روش حاضر با به‌کارگیری تئوری پوسته نازک دانیل با نتایج ارائه شده در مراجع معتبر، که از تئوری پوسته‌ی نازک فلاگ استفاده کرده‌اند، مقایسه شده است.

۲- معادلات حاکم بر نانو پوسته‌ی کربنی استوانه‌ای

نانولوله‌ی کربنی تک جداره استوانه‌ای شکل به طول L ، ضخامت h و شعاع متوسط R مطابق شکل ۱ در نظر می‌گیریم. برای این نانولوله‌ی کربنی تک جداره، جابجایی‌های نقاط مادی واقع بر صفحه‌ی میانی پوسته‌ی استوانه‌ای شکل در جهت‌های محوری، جانبی و شعاعی به ترتیب با u ، V و w در نظر گرفته می‌شود. جهت تحلیل ارتعاش نانولوله‌ی کربنی نشان داده شده در شکل ۱ به دلیل نازک بودن جدار، تئوری پوسته نازک که اثرات تنش برشی در راستای ضخامت و اینرسی دورانی لحاظ نمی‌گردد، مورد استفاده قرار گرفته است. بر اساس فرضیات این تئوری میدان جابجایی نانولوله‌ی کربنی جهت ارتعاش خمشی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود [۱۹]:

$$u = u_0 + z \frac{\partial w}{\partial x} \quad (۱)$$

$$V = V_0 + z \frac{\partial w}{R \partial \theta} \quad (۲)$$

$$w = w \quad (۳)$$

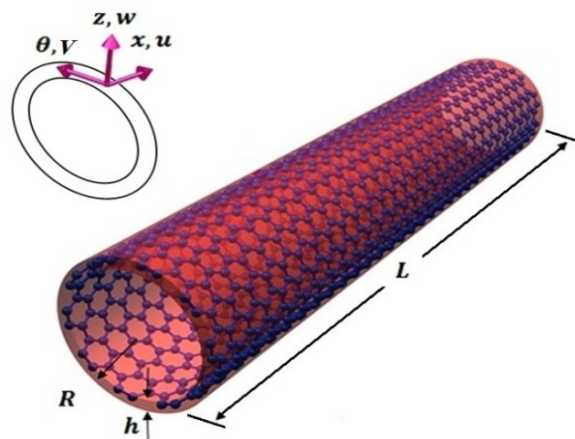
که u_0 و V_0 به ترتیب جابجایی‌های صفحه میانی به ترتیب در راستاهای x و θ می‌باشند. برای یک پوسته‌ی استوانه‌ای شکل نازک بر اساس تئوری پوسته‌ی نازک دانیل [۱۹]، روابط بین کرنش و جابجایی به صورت زیر ارائه می‌گردد:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (۴)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial V_0}{\partial \theta} - \frac{w}{R} \right) + z \left(\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \quad (۵)$$

$$\varepsilon_{\theta x} = \left(\frac{\partial u_0}{R \partial \theta} + \frac{\partial V_0}{\partial x} \right) + z \left(\frac{2}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial x} \right) \quad (۶)$$

در ارتعاش خارج از صفحه، جابجایی غیر کششی رخ می‌دهد به این معنا که المان‌های روی صفحه‌ی میانی هیچ‌گونه کرنشی را تحمل نمی‌کنند و مقدار ε_{xx} برای کل جسم صفر می‌باشد. پس طبق روابط (۱ تا ۳) با توجه به اینکه برای صفحه‌ی میانی $z = 0$ است، می‌توان رابطه γ -الف تا γ -ج را نوشت:



شکل ۱. نمایش نانولوله کربنی، دستگاه مختصات و ابعاد

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (۷-الف)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} - \frac{w}{R} = 0 \quad (۷-ب)$$

$$\frac{\partial u}{R \partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (۷-ج)$$

جهت ارضای شرایط ارائه شده در روابط (۷) جابجایی‌های نقاط مادی پوسته‌ی استوانه‌ای شکل در جهت‌های محوری، جانبی و شعاعی به صورت زیر فرض می‌شوند:

$$u = - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{R}{n} B_n \sin(n\theta) \quad (۸)$$

$$V = \sum_{n=2}^{\infty} (A_n \cos(n\theta) + B_n x \sin(n\theta)) \quad (۹)$$

$$w = - \sum_{n=2}^{\infty} n (A_n \sin(n\theta) + B_n x \cos(n\theta)) \quad (۱۰)$$

که در آن A_n و B_n ضرایب خطی غیر معین که تابع زمان می‌باشند و n عدد نیم موج در راستای جانبی می‌باشد. توجه داشته باشید که مدهای خارج از صفحه برای $n \geq 2$ تعریف شده‌اند. بنابراین در ارتعاشات خارج از صفحه مقدار کرنش در نقاط دیگر به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\varepsilon_{xx} = z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = z k_1 \quad (۱۱-الف)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = z \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} = z k_2 \quad (۱۱-ب)$$

$$\varepsilon_{\theta x} = z \frac{2}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial x} = 2z\tau \quad (۱۱-ج)$$

که در آن k_1 و k_2 بیانگر تغییرات انحناء می‌باشند و τ تغییرات پیچش را نشان می‌دهد. اگر از تغییرات جابجایی در راستای محور به دلیل ناچیز بودن صرف نظر گردد لذا $k_1 = 0$ یا به عبارتی $\varepsilon_{xx} = 0$ را نتیجه می‌دهد.

۳- محاسبه‌ی فرکانس مدهای خارج از صفحه

۳-۱- محاسبه‌ی فرکانس‌ها با استفاده از تئوری کلاسیک الاستیسیته:

با فرض حالت تنش صفحه‌ای برای استوانه‌ی نازک (به دلیل فرض پوسته‌ی نازک بودن)، رابطه‌ی بین تنش کلاسیک و کرنش برای ماده ایزوتروپیک الاستیک خطی بر اساس تئوری الاستیسیته کلاسیک به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1 - \nu^2} \nu z k_1 \quad (۱۲-الف)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{E}{1 - \nu^2} z k_2 \quad (۱۲-ب)$$

$$\sigma_{\theta x} = \frac{E}{1 + \nu^2} z \tau \quad (۱۲-ج)$$

که E مدول الاستیسیته^۵ و ν ضریب پواسان^۶ می‌باشد. برای یک سازه الاستیک خطی انرژی کل کرنشی کلاسیک به صورت زیر نتیجه می‌گردد.

$$U^l = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xx}\epsilon_{xx} + \sigma_{\theta\theta}\epsilon_{\theta\theta} + \sigma_{\theta x}\epsilon_{\theta x}) R dx d\theta dz \quad (13)$$

با جایگذاری روابط (۱۱ و ۱۲) در رابطه (۱۳) و استفاده از روابط (۸ تا ۱۰) انرژی کل کرنش به صورت رابطه (۱۳) ساده‌تر می‌گردد. در این روابط سختی خمشی به صورت $D = E h^3 / (12(1 - \nu^2))$ تعریف می‌گردد:

$$U^l = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\pi D n^4}{R} (L A_n^2 + (\frac{n^2}{3R^2} L^3 + 2(1 - \nu)L) B_n^2) \quad (14)$$

انرژی جنبشی کلاسیک برای پوسته استوانه‌ای شکل به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$T^l = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} (u^2 + V^2 + W^2) R dx d\theta dz \quad (15)$$

با جایگذاری روابط (۸-۱۰) در رابطه (۱۵) داریم

$$T^l = \pi \rho L R h \sum_{n=2}^{\infty} \left((1 + n^2) \left(\frac{\partial A_n}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{R^2}{n^2} + L^2 \frac{(1 + n^2)}{3} \right) \left(\frac{\partial B_n}{\partial t} \right)^2 \right) \quad (16)$$

هنگام رخ داد مد ارتعاشی ریلی، خط محوری استوانه در امتداد و موازی با محور x باقی‌مانده و هیچ‌گونه کرنش و تغییر شکلی را تحمل نمی‌کند. پس روابط زیر برای مد ریلی صادق است:

$$u = 0 \quad (17)$$

$$V = a_n \sin(n\omega t) \cos(n\theta) \quad (18)$$

$$w = a_n \sin(n\omega t) \sin(n\theta) \quad (19)$$

حال با مساوی قرار دادن ماکزیمم انرژی جنبشی با ماکزیمم انرژی کرنشی فرکانس مد ریلی ω_R به صورت رابطه زیر به دست آورده می‌شود:

$$\omega_R^2 = \frac{E h^2 n^6}{12 \rho R^4 (1 - \nu^2) (1 + n^2)} \quad (20)$$

هنگام رخ داد مد ارتعاشی لائو برعکس مد ریلی خط محوری استوانه موازی و در امتداد x باقی‌مانده بلکه مانند یک خط صلب چرخش می‌کند. فرکانس مد لائو ω_L نیز با توجه به فرضیات آن به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$u = -b_n \frac{R}{n} \sin(n\omega t) \sin(n\theta) \quad (21)$$

$$V = x b_n \sin(n\omega t) \cos(n\theta) \quad (22)$$

$$W = -n x b_n \sin(n\omega t) \sin(n\theta) \quad (23)$$

⁵ Modulus of elasticity

⁶ Poisson's ratio

$$\omega_L^2 = \frac{Eh^2n^6(1 + \frac{6(1-\nu)R^2}{n^2L^2})}{12\rho R^4(1-\nu^2)((1+n^2) + \frac{3R^2}{n^2L^2})} \quad (24)$$

اگر فرکانس مد تنفس شعاعى، ω_{RMB} ، را به صورت زیر تعريف کنيم، آنگاه می توان ω_L و ω_R را بر حسب آن نوشت:

$$\omega_{RMB}^2 = \frac{E}{\rho R^2(1-\nu^2)} \quad (25)$$

$$\omega_R^2 = \omega_{RMB}^2 \left(\frac{h^2n^6}{12(1+n^2)R^2} \right) \quad (26)$$

$$\omega_L^2 = \omega_{RMB}^2 \frac{h^2n^6 \left(1 + \frac{6(1-\nu)R^2}{n^2L^2} \right)}{12R^2 \left((1+n^2) + \frac{3R^2}{n^2L^2} \right)} \quad (27)$$

۳-۲- محاسبه ی فرکانس ها با استفاده از تئوری گرادیان تنش:

رابطه ی ساختاری زیر برای تانسور تنش غیر محلی T بیان شده است [۹]، که در آن l مشخصه ی طول خارجی است.

$$T = \int (|x-x'|, \frac{ae_0}{l}) C\varepsilon(x') dv(x') \quad (28)$$

فرم دیفرانسیلی رابطه ی (۲۸) به صورت زیر است:

$$(1 - (ae_0)^2 \nabla^2) T = C\varepsilon \quad (29)$$

با استفاده از رابطه های (۱۲)، رابطه ی بین تنش غیر محلی T و کرنش به صورت زیر به دست می آید:

$$(1 - (ae_0)^2 \nabla^2) T_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2} \nu z k_1 \quad (30)$$

$$(1 - (ae_0)^2 \nabla^2) T_{\theta\theta} = \frac{E}{1-\nu^2} z k_2 \quad (31)$$

$$(1 - (ae_0)^2 \nabla^2) T_{x\theta} = \frac{E}{1+\nu^2} z \tau \quad (32)$$

با حل این معادلات، روابط زیر به دست می آید که در روابط حاصله $\Phi = (ae_0/R)^2$ می باشد:

$$T_{xx} = \frac{Evz}{R^2(1-\nu^2)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^3}{(1+\Phi n^2)} \times [A_n \sin(n\theta) + B_n x \sin(n\theta)] \quad (33)$$

$$T_{\theta\theta} = \frac{Ez}{R^2(1-\nu^2)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^3}{(1+\Phi n^2)} \times [A_n \sin(n\theta) + B_n x \sin(n\theta)] \quad (34)$$

$$T_{x\theta} = \frac{-Ez}{R(1+\nu)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{(1+\Phi n^2)} [B_n \cos(n\theta)] \quad (35)$$

در حالت غیر کلاسیک انرژی کل کرنشی U^{nl} به صورت زیر بازنویسی می شوند:

$$U^{nl} = \frac{Eh^3}{12R^3(1-\nu^2)(1+\Phi n^2)} \sum_{n=2}^{\infty} [n^6(LA_n^2 + \frac{1}{3}L^3B_n^2) + \frac{E\pi h^3 n^4}{6R(1+\nu)} LB_n^2] \quad (36)$$

انرژی جنبشی در حالت کلاسیک و غیر محلی از رابطه (۱۶) حاصل می شود. در این حالت نیز مانند حالت کلاسیک می توان

با مساوی قرار دادن ماکزیمم انرژی‌ها، فرکانس‌های لائو و ریلی را محاسبه کرد:

$$\omega_R^2 = \frac{\omega_{RMB}^2}{(1 + \Phi n^2)} \left(\frac{h^2 n^6}{12(1 + n^2)R^2} \right) \quad (37)$$

$$\omega_L^2 = \frac{\omega_{RMB}^2}{(1 + \Phi n^2)} \frac{h^2 n^6 \left(1 + \frac{6(1 - \nu)R^2}{n^2 L^2} \right)}{12R^2 \left((1 + n^2) + \frac{3R^2}{n^2 L^2} \right)} \quad (38)$$

همان‌طور که اشاره شد ضریب $1/(1 + \Phi n^2)$ باعث تفاوت فرکانس‌ها در این حالت با حالت کلاسیک گردیده است. که با صفر قرار دادن پارامتر غیرمحملی در روابط (۳۷ و ۳۸)، روابط (۲۰ و ۲۴) به‌دست می‌آیند.

۳-۳- محاسبه‌ی فرکانس‌ها با استفاده از تئوری گرادیان کرنش:

بر اساس این تئوری، رابطه‌ی بین تنش غیر محلی T و کرنش به‌صورت زیر به‌دست می‌آید [۱۵]:

$$T = C(1 \pm (a e_0)^2 \nabla^2) \varepsilon \quad (39)$$

با استفاده از روابط (۱۲) رابطه‌ی بین مؤلفه‌های تنش غیر محلی T و کرنش به‌صورت زیر نتیجه می‌گردد:

$$T_{xx} = (1 \mp \Phi n^2) \frac{E}{1 - \nu^2} \nu z k_1 \quad (40)$$

$$T_{\theta\theta} = (1 \mp \Phi n^2) \frac{E}{1 - \nu^2} z k_2 \quad (41)$$

$$T_{x\theta} = (1 \mp \Phi n^2) \frac{E}{1 + \nu^2} z \tau \quad (42)$$

در این حالت نیز انرژی کل کرنشی به‌صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$U^{nl} = \frac{E\pi h^3}{12R(1 + \nu)} \sum_{n=2}^{\infty} \left[(1 \mp \Phi n^2) n^4 \times \frac{n^2}{(1 - \nu)R^2} (LA_n^2 + \frac{1}{3}L^3 B_n^2) + 2LB_n^2 \right] \quad (43)$$

برای فرکانس‌های لائو و ریلی مانند حالت‌های کلاسیک و گرادیان تنش می‌توان نوشت:

$$\omega_R^2 = \omega_{RMB}^2 (1 \mp \Phi n^2) \left(\frac{h^2 n^6}{12(1 + n^2)R^2} \right) \quad (44)$$

$$\omega_L^2 = \omega_{RMB}^2 (1 \mp \Phi n^2) \frac{h^2 n^6 \left(1 + \frac{6(1 - \nu)R^2}{n^2 L^2} \right)}{12R^2 \left((1 + n^2) + \frac{3R^2}{n^2 L^2} \right)} \quad (45)$$

همان‌طور که مشخص است ضریب $1 \mp \Phi n^2$ باعث تفاوت این فرکانس‌ها با دو تئوری قبلی شده است.

۴- اعتبار سنجی روش حاضر با مراجع

در این قسمت نتایج به‌دست‌آمده برای فرکانس‌های ریلی و لائو ارتعاش خارج از صفحه‌ی نانولوله‌های کربنی تک جداره با استفاده از روابط کرنش جابجایی دائل، با مرجع [۱۸] که از روابط کرنش جابجایی فلاگ^۷ استفاده کرده است، اعتبار سنجی شده است. فرکانس‌های ارائه‌شده در جداول، بر اساس مقادیر $\omega_{RMB} = 145.364$ ، $R = 7.42$ ، $h = 1.255$ و $ae_0 = 145.363$ به‌دست آمده‌اند:

در جدول‌های ۱ تا ۳ پنج مد فرکانس ریلی در این مقاله با مرجع [۱۸] مقایسه و اختلاف آن‌ها بیان گردیده است. برای حالت فرکانس لائو نیز دقیقاً مقادیر اختلاف با حالت مشابه فرکانس ریلی برابر است. همان‌طور که جداول ۱ تا ۳ مشخص است فرکانس‌های به‌دست‌آمده در این مطالعه بیشتر از فرکانس‌های مرجع می‌باشد، دلیل این اختلاف تفاوت در مقادیر پیچش (τ) و انحناء (k_2),

⁷ Flügge strain- displacement relationship

در این دو تئوری می‌باشد.

همان‌طور که از مقایسه‌ی نتایج این مطالعه با مرجع [۱۸] در جداول ۱ تا ۳ مشخص است، به دلیل تفاوت تئوری استفاده‌شده در این مقاله در مقادیر پیچش (τ) و انحناء (k_2) با تئوری استفاده‌شده در مرجع [۱۸]، فرکانس‌های ریلی و لائو محاسبه‌شده در این مطالعه نسبت به مرجع بزرگ‌تر می‌باشند. همان‌طور که از نتایج جداول ۱ تا ۳ پیداست بین نتایج حاصل از این مقاله که با استفاده از تئوری پوسته‌ی نازک دائل استخراج گردیده است با نتایج ارائه‌شده در مراجع تطابق بسیار خوبی برقرار می‌باشد.

جدول ۱ مقایسه‌ی پنج مد فرکانس ریلی ($10^3 \times (\text{cm}^{-1})$) برای تئوری کلاسیک با مرجع [۱۸]

شماره مد	مطالعه حاضر	مرجع [۱۸]	اختلاف (%)
۱	۱/۵۹۴۴	۱/۵۸۷۳	۰/۴۴
۲	۱/۸۱۴۶	۱/۸۰۷۵	۰/۳۸
۳	۲/۰۴۸۹	۲/۰۴۱۸	۰/۳۳
۴	۲/۲۹۷۵	۲/۲۹۰۴	۰/۳۰
۵	۲/۸۳۷۳	۲/۸۳۰۲	۰/۲۶

جدول ۲ مقایسه‌ی پنج مد فرکانس ریلی ($10^3 \times (\text{cm}^{-1})$) برای تئوری گرادیان تنش با مرجع [۱۸]

شماره مد	مطالعه حاضر	مرجع [۱۸]	اختلاف (%)
۱	۱/۰۶۲۱	۱/۰۵۷۴	۰/۴۵
۲	۱/۱۶۵۰	۱/۱۶۰۴	۰/۳۹
۳	۱/۲۶۸۳	۱/۳۲۱۰	۰/۳۰
۴	۱/۳۷۱۸	۱/۳۶۷۶	۰/۳۳
۵	۱/۴۷۵۵	۱/۴۷۱۴	۰/۲۷

جدول ۳ مقایسه‌ی پنج مد فرکانس ریلی ($10^3 \times (\text{cm}^{-1})$) برای تئوری گرادیان کرنش با علامت منفی با مرجع [۱۸]

شماره مد	مطالعه حاضر	مرجع [۱۸]	اختلاف (%)
۱	۲/۳۹۳۴	۲/۳۸۲۸	۰/۴۴
۲	۲/۸۲۶۳	۲/۸۱۵۳	۰/۳۹
۳	۳/۳۱۰۱	۳/۲۹۸۶	۰/۳۴
۴	۳/۸۴۷۸	۳/۸۳۵۹	۰/۳۱
۵	۴/۴۴۲۶	۴/۴۳۰۳	۰/۲۷

۵- تجزیه و تحلیل نتایج عددی

در این بخش با استفاده از سه تئوری معرفی‌شده فرکانس مدهای ریلی و لائو ارتعاش خارج از صفحه‌ی پوسته‌ی استوانه‌ای شکل محاسبه شده‌اند. در شکل‌های ۲ و ۳ فرکانس‌های لائو و ریلی با تئوری‌های مختلف بررسی شده است، در شکل‌های ۴ تا ۶ تأثیر پارامترهای طول، شعاع و ضخامت بر فرکانس‌های لائو و ریلی بررسی شده است.

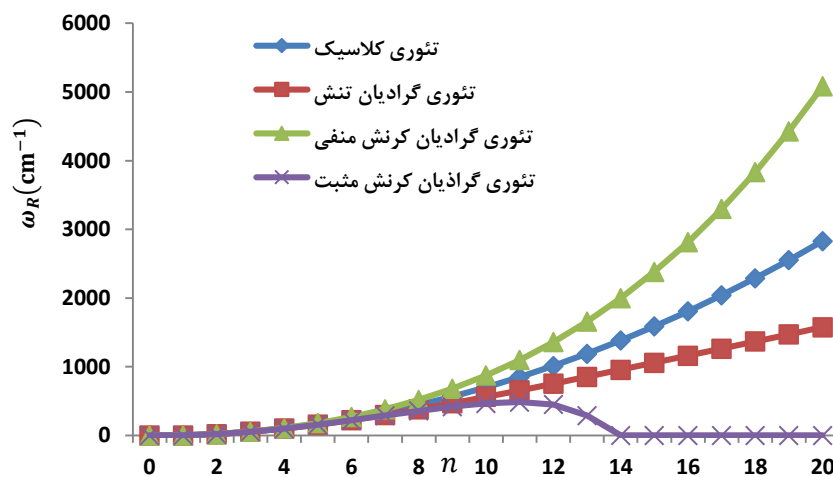
در شکل ۲ فرکانس‌های ریلی به‌دست‌آمده از تئوری کلاسیک برای تمامی n ها از فرکانس‌های به‌دست‌آمده با تئوری گرادیان تنش و گرادیان کرنش با علامت مثبت بزرگ‌تر است. ولی فرکانس‌های به‌دست‌آمده از گرادیان کرنش با علامت منفی از کلاسیک نیز بزرگ‌تر است. برای کلاسیک، شکل نمودار فرکانس به‌صورت درجه دوم، برای گرادیان تنش به‌صورت خطی و برای گرادیان کرنش با علامت منفی به‌صورت درجه سوم می‌باشد. همان‌طور که از شکل ۲ مشخص است فرکانس برای گرادیان کرنش با علامت مثبت به‌طور یکنواخت با افزایش n ، افزایش نیافته بلکه بعد از رسیدن به یک مقدار ماکزیمم از مقدار آن کاسته می‌گردد که این به دلیل وجود عبارت $1 \mp \Phi n^2$ در فرمول فرکانس این تئوری می‌باشد. می‌توان نشان داد فرکانس ریلی برای تئوری گرادیان کرنش با علامت مثبت هنگامی ماکزیمم است که:

$$n_{\max} = \sqrt{\frac{2}{3\Phi}} = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{R}{a e_0}} \quad (۴۸)$$

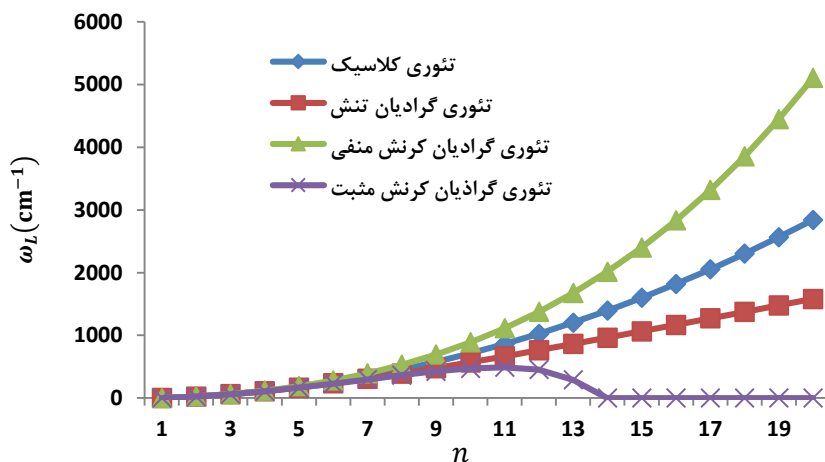
مقدار فرکانس ریلی متناظر با این مقدار عدد موج به صورت زیر به دست می‌آید:

$$(\omega_R^2)_{\max} = \frac{Eh^2}{82\rho(a e_0)^2(1 - \nu^2)} \quad (۴۹)$$

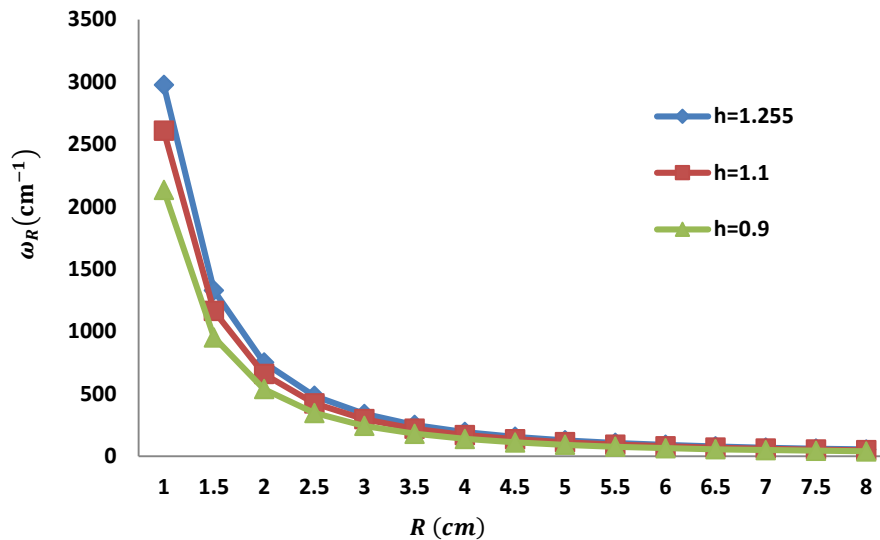
همان‌طور که از رابطه‌ی (۴۹) مشخص است فرکانس ماکزیمم ریلی به طور مستقیم به شعاع بستگی ندارد. بنابراین فرکانس ماکزیمم در حدود $n \approx 10.9392$ رخ می‌دهد و بعلاوه فرکانس در اطراف عدد موج ماکزیمم تغییرات محسوسی از خود نشان نمی‌دهد. در شکل ۳ نمودار فرکانس‌های لائو نشان داده شده است، همان‌طور که مشخص است رفتار فرکانس لائو نیز شبیه فرکانس ریلی است اما با این تفاوت که فرکانس لائو به طول لوله نیز وابسته است در حالی که فرکانس‌های ریلی مستقل از طول لوله می‌باشند. فرکانس‌های لائو بدست آمده از تئوری کلاسیک برای تمامی n ها از فرکانس‌های بدست آمده با تئوری گرادیان تنش و گرادیان کرنش با علامت مثبت بزرگتر است. ولی فرکانس‌های بدست آمده از گرادیان کرنش با علامت منفی از کلاسیک نیز بزرگتر است. برای کلاسیک، شکل نمودار فرکانس به صورت درجه دوم، برای گرادیان تنش به صورت خطی و برای گرادیان کرنش با علامت منفی به صورت درجه سوم می‌باشد. همان‌طور که از شکل ۲ مشخص است فرکانس برای گرادیان کرنش با علامت مثبت به طور یکنواخت با افزایش n ، افزایش نیافته بلکه بعد از رسیدن به یک مقدار ماکزیمم از مقدار آن کاسته می‌گردد که این به دلیل وجود عبارت $1 - \Phi n^2$ در فرمول فرکانس این تئوری می‌باشد. می‌توان نشان داد فرکانس ریلی برای تئوری گرادیان کرنش با علامت مثبت هنگامی ماکزیمم است که $n \approx 10.9392$ باشد.



شکل ۲ تغییرات فرکانس ریلی با تغییرات عدد موج جانبی

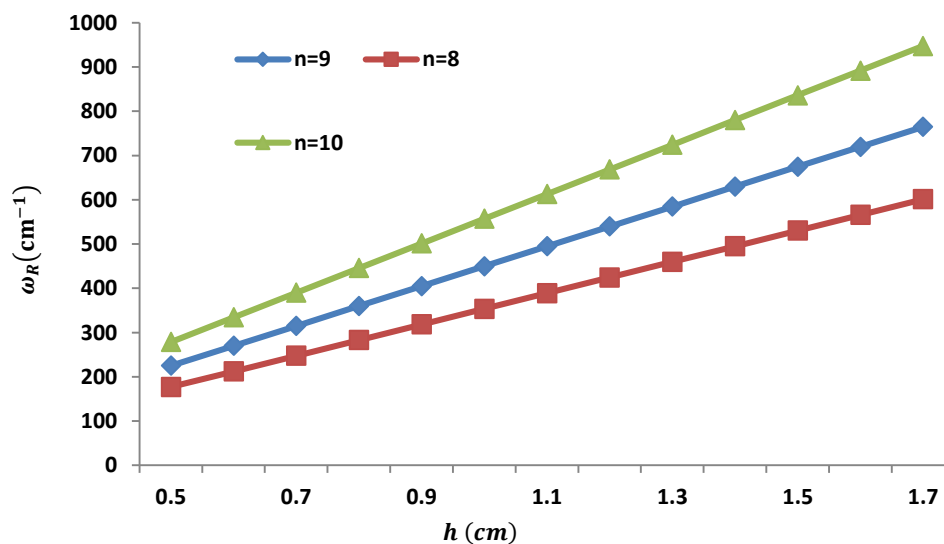


شکل ۳ تغییرات فرکانس لائو با تغییرات عدد موج جانبی

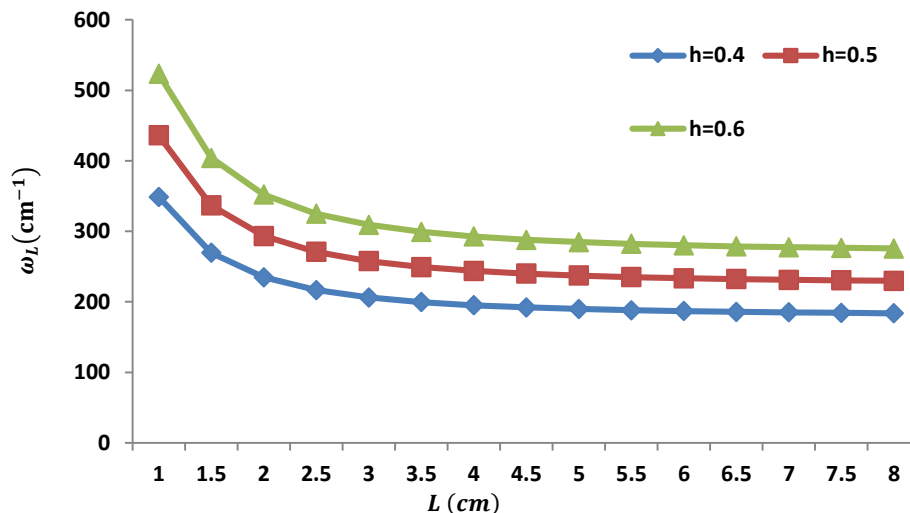


شکل ۴ تغییرات فرکانس ریلی با شعاع در حالت کلاسیک

تغییرات فرکانس ریلی در یک مد ارتعاشی با فرض ضخامت ثابت بر حسب تغییرات شعاع استوانه، به صورت شکل ۴ می‌باشد. در این شکل فرکانس ریلی برای استوانه با شماره مود جانبی ثابت، به ازای ضخامت‌های مختلف با تغییرات شعاع رسم شده است. همانطور که در این شکل مشخص است با افزایش شعاع استوانه، فرکانس ریلی کاهش می‌یابد که دلیل این امر کاهش سختی استوانه و افزایش جایجایی آن می‌باشد که خود باعث جذب انرژی کمتر برای ارتعاش می‌گردد. در شکل ۵ تغییرات فرکانس ریلی نسبت به ضخامت در سه مود جانبی مختلف و شعاع ثابت نشان داده شده است. می‌توان نتیجه گرفت که فرکانس ریلی در هر یک از تئوری‌های بکار رفته به یک صورت با افزایش ضخامت افزایش می‌یابد. بدیهی است که با افزایش ضخامت سختی استوانه افزایش یافته که این امر سبب افزایش در انرژی کرنشی و افزایش فرکانس می‌گردد. همانطور که از روابط (۲۶)، (۳۷ و ۴۴) مشخص است فرکانس‌های ریلی به طول استوانه بستگی ندارند. تغییرات فرکانس لائو با شعاع و ضخامت همانند فرکانس ریلی می‌باشد. اما بر خلاف فرکانس ریلی، فرکانس لائو به صورت شکل ۶ با طول استوانه تغییر می‌کند



شکل ۵ تغییرات فرکانس ریلی با تغییرات ضخامت



شکل ۶ تغییرات فرکانس لار با تغییرات طول

با توجه به شکل ۶ با کاهش طول استوانه، نا پایداری استوانه کاهش یافته که نتیجه‌ی آن کاهش تغییر شکل و نهایتاً افزایش فرکانس طبیعی می‌گردد.

۶- نتیجه گیری

در این مقاله فرکانس‌های لار و ریلی برای ارتعاشات خارج از صفحه‌ی نانو لوله‌های کربنی تک جداره با استفاده از دو تئوری غیر محلی الاستیسیته و تئوری کلاسیک بر اساس فرضیات تئوری پوسته‌ی نازک دائل بدست آورده شده‌اند. نشان داده شده که نتایج حاصل برای فرکانس‌های لار و ریلی در هر تئوری فقط بوسیله‌ی یک ضریب با تئوری‌های دیگر متفاوت شده است. به عنوان مثال در تئوری کلاسیک این ضریب برابر یک، در تئوری گرادیان تنش $1/(1+\Phi n^2)$ ، گرادیان کرنش با علامت مثبت $1-\Phi n^2$ و با علامت منفی به صورت $1+\Phi n^2$ است.

نمودار فرکانس‌های ریلی و لار در تئوری گرادیان کرنش با علامت مثبت به دلیل ضریب خود با افزایش n ، افزایش نیافته بلکه بعد از رسیدن به یک مقدار ماکزیمم از مقدار آن کم شده تا در نهایت به صورت موهومی ظاهر گردد. همانطور که از روابط بدست آمده مشخص است این دو فرکانس با افزایش ضخامت افزایش یافته و با افزایش شعاع لوله کاهش می‌یابد. همچنین مشخص شده که فرکانس ریلی ارتباطی با طول لوله نداشته ولی فرکانس لار به طول لوله وابسته شده است.

۷- مراجع

- [1] Eringen A C. On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves. Journal of applied physics. 1983;54:4703-4710.
- [2] Varzandian G A, Ziaei S. Analytical solution of non-Linear free vibration of thin rectangular plates with various boundary conditions based on non-Local theory. Mechanical Engineering. 2017;48.
- [3] Mindlin R D, Eshel N N. On first strain-gradient theories in linear elasticity. International Journal of Solids and Structures. 1968;4:109-124.
- [4] Darvizeh M, Darvizeh A, Ansari R, Alijani A. One-and two-dimensional analysis of large deformations of beams using continuum mechanics theory. Modares Mechanical Engineering. 2011;11:33-40 (In Persian).
- [5] Abbasi M. Investigation of the size effect on the vibrational behavior of an AFM microcantilever with a sidewall probe, using strain gradient elasticity theory. Modares Mechanical Engineering. 2014;13:90-99 (In Persian).
- [6] Blevins R D, Plunkett R. Formulas for natural frequency and mode shape. Journal of Applied Mechanics. 1980;47:461.

- [7] Shi M X, Li Q M, Huang Y. A nonlocal shell model for mode transformation in single-walled carbon nanotubes. *Journal of Physics: Condensed Matter*. 2009;21:455301.
- [8] Haddadpour H, Mahmoudkhani S, Navazi H M. Free vibration analysis of functionally graded cylindrical shells including thermal effects. *Thin-walled structures*. 2007;45:591-599.
- [9] Murmu T, Pradhan S C. Thermo-mechanical vibration of a single-walled carbon nanotube embedded in an elastic medium based on nonlocal elasticity theory. *Computational Materials Science*. 2009;46:854-859.
- [10] Bakhsheshy A, Khorshidi K. Free vibration of functionally graded rectangular nanoplates in thermal environment based on the modified couple stress theory. *Modares Mechanical Engineering*. 2015;14:323-330 (In Persian).
- [11] Malekzadeh P, Heydarpour Y. Free vibration analysis of rotating functionally graded cylindrical shells in thermal environment. *Composite Structures*. 2012;94:2971-2981.
- [12] Gupta S S, Bosco F G, Batra R C. Breakdown of structural models for vibrations of single-wall zigzag carbon nanotubes. *Journal of applied physics*. 2009;106:063527.
- [13] Love A E H. *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. Cambridge university press. 2013.
- [14] Loy C T, Lam K Y, Reddy J N. Vibration of functionally graded cylindrical shells. *International Journal of Mechanical Sciences*. 1999;41:309-324.
- [15] Pradhan S C, Loy C T, Lam K Y, Reddy J N. Vibration characteristics of functionally graded cylindrical shells under various boundary conditions. *Applied Acoustics*. 2000;61:111-129.
- [16] Ansari R, Darvizeh M. Prediction of dynamic behaviour of FGM shells under arbitrary boundary conditions. *Composite Structures*. 2008;85:284-292.
- [17] Rahimi G, Hematnezhad, M. Analysis vibration of FGM shells with annelid supports. in *Proceedings of the first International Conference on Acoustics and Vibration, Tehran, Iran*. 2011 (In Persian).
- [18] Das S L, Mandal T, Gupta S S. Inextensional vibration of zig-zag single-walled carbon nanotubes using nonlocal elasticity theories. *International Journal of Solids and Structures*. 2013;50:2792-2797.
- [19] Amabili M. *Nonlinear vibrations and stability of shells and plates*. Cambridge University Press. 2008.