

Piezoelectric Energy Harvesting from Functionally Graded Beams Using Modified Shear Deformation Theories

Korosh Khorshidi^{a*}, Mahdi Karimi^a, Mehdi Rezaeisaray^b

^a Mechanical engineering Faculty, Arak University, Arak, Iran


^b Mechanical engineering Faculty, University of Alberta, Edmonton, Canada

Original Article

Use your device to scan and read the article online



Citation: Khorshidi K, Karimi M, Rezaeisaray M. Piezoelectric Energy Harvesting from Functionally Graded Beams Using Modified Shear Deformation Theories. *Mechanics of Advanced and Smart Materials*. 2022;1(2):136-154.

 <https://10.52547/masm.1.2.136>

KEYWORDS

Energy harvesting,
Functionally graded,
Modified theories,
Piezoelectric.

ABSTRACT

In the current paper, the piezoelectric energy harvesting of inhomogeneous beams based on modified beam models is studied. Different classical boundary conditions, which are combination of free, simply and clamped, are contemplated for the structure. The beam mechanical properties are assumed to vary based on the power law along the thickness direction in which volume fractions of the ceramic and metal part can be adjusted using FG parameter. Here, various beam theories such as Euler-Bernoulli, exponential, trigonometric, hyperbolic and fifth-order are modelled using a unified formulation. These beam theories are capable of catching rotary inertia effects and transverse shear deformations. The vibrational performance of the beam is affected by the harmonic vibrations of the base. Additionally, two different types of damping including structural damping and viscous damping are modelled in the current formulation. Transverse deflection of the beam is obtained using modal expansion and then electrical power, current and voltage outputs are calculated. Ultimately, in the discussion section, the impacts of different parameters on the vibration and energy harvesting of the beam are analyzed.

Extended Abstract

1. Introduction

Due to the urgent need to generate electrical energy, the use of piezoelectric materials, especially to supply the energy required by sensors, is inevitable. In this method, using the electromechanical coupling property of the piezoelectric element, energy from ambient vibrations can be absorbed and stored [1-5]. Because battery life is limited and the cost of replacing and repairing worn-out batteries is problematic, using vibration energy, especially in wireless sensors, can reduce wasted energy to some extent. There are various methods for extracting vibrational energy such as electromagnetic and electrostatic that the use of piezoelectric patches due to high power density has been considered by many researchers [6-10], [30,31].

Functionally graded materials are a subset of smart materials in which mechanical properties such as density, Poisson's ratio, and Young's modulus change continuously from one surface to another. These materials usually are made of metal and ceramic. In fact, the high mechanical strength of metal and the high thermal resistance of ceramics have led to the use of these materials in chemical tanks and the aerospace industry.

The present paper investigates the harvested energy from a functionally graded beam with a piezoelectric layer by analytical method. First, using Hamilton method, the governing equations of the structure are obtained by considering the electromechanical coupling of the piezoelectric layer, and then by using the residual weight method, the equations are discretized and then effects of various parameters on voltage, current and output power are investigated.

* Corresponding author. Tel.: +98-86-32625720 ; Fax: +98-86-34173450

E-mail address: k-khorshidi@araku.ac.ir

DOI: <https://10.52547/masm.1.2.136>

Received: September 22, 2022; Received in revised form: October 24, 2021; Accepted: January 15, 2022

2022 Published by Arak University Press. All rights reserved.



2. Mathematical Formulation

Fig. 1 shows a two-layer beam with length L and total thickness h and cross section A . The lower layer of this structure is functionally graded and its mechanical properties are a combination of ceramic and metal, so that the lowest surface, i.e., $z = -h/2$ is pure metal and the second surface is pure ceramic. The top layer of the beam that covers the entire surface is made of piezoelectric material. Different boundary conditions are considered for the problem. The whole structure is affected by external excitation from the base W_b , which is harmonic.

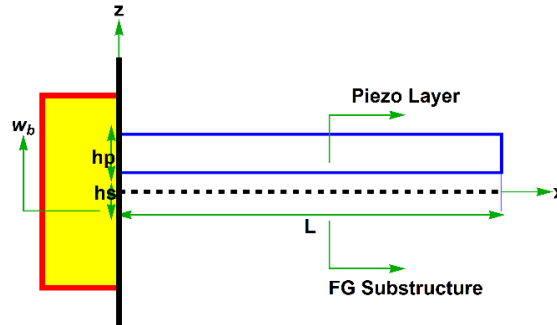


Figure 1. Geometry of the functionally graded harvester

The displacement field of the present model can be expressed as Eq. (2) as follows

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x,z,t) &= u(x,t) - (z - z_0) \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} + f(z)\zeta(x,t) \\ \tilde{w}(x,z,t) &= w(x,t) \end{aligned} \tag{1}$$

where $\tilde{u}(x,z,t)$ and $\tilde{w}(x,z,t)$ are the displacement of an arbitrary point in the directions of x, z , respectively. $u(x,t)$ and $w(x,t)$ are also the mid-plane displacement. Moreover, $\zeta(x,t)$ represents the rotation of the beam and z_0 denotes the neutral axis of the beam. According to the introduced displacement field, the strain field ϵ_{ij} and the stress field σ_{ij} can be calculated as follows

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= f(z) \frac{\partial \zeta(x,t)}{\partial x} - (z - z_0) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \\ \epsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f(z)}{\partial z} \zeta(x,t) \right) \\ \sigma^{(s)}_{xx} &= (1 + \eta \frac{\partial}{\partial t}) Q_{11}^{(s)} \epsilon_{xx} \\ \sigma^{(s)}_{xz} &= (1 + \eta \frac{\partial}{\partial t}) Q_{55}^{(s)} \epsilon_{xz} \\ \sigma^{(p)}_{xx} &= (1 + \eta \frac{\partial}{\partial t}) (Q_{11}^{(p)} \epsilon_{xx} - Q_{11}^{(p)} d_{31} E_z) \end{aligned} \tag{2}$$

where d_{31} is the piezoelectric constant and η is the Kelvin-Voigt damping constant. The superscript $k = s, p$ represents the substructure and piezoelectric layer, respectively.

In order to obtain the governing equations, we must first calculate the strain energies U , the kinetic energy T , and the work done by external forces W as follows

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \left(\left(\sum_{i=1}^2 \int_{V^{(i)}} (\sigma_{xx}^{(i)} \epsilon_{xx} + 2\sigma_{xz}^{(i)} \epsilon_{xz}) dV^{(i)} \right) - \left(\int_{V^{(p)}} D_z E_z dV^{(p)} \right) \right), (i = p, s) \\ T &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^2 \int_{V^{(i)}} \rho^{(i)} \left(\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} \right)^2 \right) dV^{(i)} \right), (i = p, s) \\ W &= \frac{1}{2} \int_A \left(m \frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} + c_a \frac{\partial w_b}{\partial t} \right) w dA \end{aligned} \tag{3}$$

in which $V^{(i)}$ and $\rho^{(i)}$ represent the volume and density of the i -th layer, respectively. D_z is the electrical displacement in the z direction, c_a denotes the viscous damping. By substituting the strain and kinetic energies of the structure in Hamilton's principle, the differential equations of motion are obtained.

3. Results and Discussion

In order to validate the method, the frequency parameters of the first four modes of a beam have been compared with previous articles in Table 1. It can be seen that the proposed model and formulation has acceptable accuracy in calculating natural frequencies. In other comparison study, the first three resonant frequencies of a beam integrated with piezoelectric layer are listed in Table 2. As seen in this validation also, there is an excellent agreement between our formulation and published paper [1]. The reason for the small difference in the calculation of natural frequencies using different models is due to the difference in the expansion of the transverse shear stress in the direction of the beam thickness.

To better describe the results, following parameters are defined

$$\begin{aligned} V_f &= \frac{v(t)}{-\omega^2 Y_0 e^{i\omega t}} \\ I_f &= \frac{i(t)}{-\omega^2 Y_0 e^{i\omega t}} \\ P_f &= \frac{P(t)}{(-\omega^2 Y_0 e^{i\omega t})^2} \end{aligned} \tag{4}$$

Table 1. Comparison of the first four frequencies of a beam with previous work [30]

ESDT	$\bar{\omega}_1$	9.8435
	$\bar{\omega}_2$	39.066
	$\bar{\omega}_3$	86.791
	$\bar{\omega}_4$	151.683
TSDT	$\bar{\omega}_1$	9.8437
	$\bar{\omega}_2$	39.070
	$\bar{\omega}_3$	86.807
	$\bar{\omega}_4$	151.733
HSDT	$\bar{\omega}_1$	9.8440
	$\bar{\omega}_2$	39.074
	$\bar{\omega}_3$	86.829
	$\bar{\omega}_4$	151.798
FOSDT	$\bar{\omega}_1$	9.8434
	$\bar{\omega}_2$	39.066
	$\bar{\omega}_3$	86.789
	$\bar{\omega}_4$	151.682
[30]	$\bar{\omega}_1$	9.8696
	$\bar{\omega}_2$	39.4784
	$\bar{\omega}_3$	88.8264
	$\bar{\omega}_4$	157.9136

Table 2. The first three resonant frequencies of a beam with piezoelectric layer

ESDT	ω_1 (Hz)	47.806
	ω_2 (Hz)	299.482
	ω_3 (Hz)	838.097
TSDT	ω_1 (Hz)	47.806
	ω_2 (Hz)	299.480
	ω_3 (Hz)	838.084
HSDT	ω_1 (Hz)	47.805
	ω_2 (Hz)	299.478
	ω_3 (Hz)	838.072
FOSDT	ω_1 (Hz)	47.806
	ω_2 (Hz)	299.483
	ω_3 (Hz)	838.099
[31]	ω_1 (Hz)	47.800
	ω_2 (Hz)	299.60
	ω_3 (Hz)	838.20

Fig. 2 shows the frequency response of the electric power of a functionally graded beam with a piezoelectric layer for different electrical resistances. Unlike voltage and current diagrams, which behave monotonically with respect to electrical resistance, the output power behavior is more complex. Depending on the excitation frequency, increasing electrical resistance sometimes decreases and sometimes increases power. The reason for this behavior is that the electric power is equal to the product of the voltage multiplied by the electric current. In fact when load resistance increase, electric voltage increases while the electric current decreases.

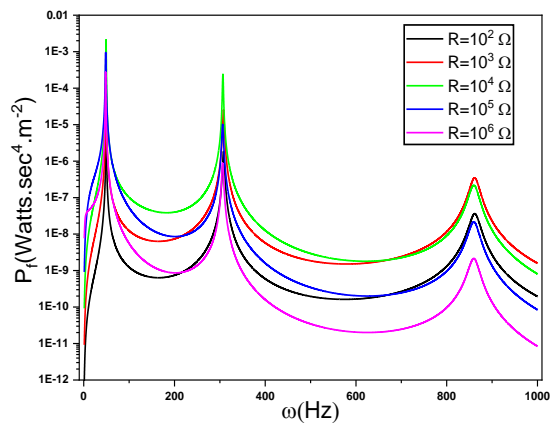
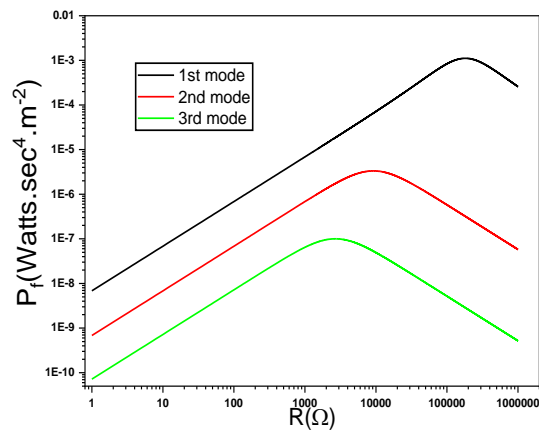
**Figure 2. Frequency response of output power for different values of load resistance****Figure 3. Frequency response of output power for different values of mode number**

Fig. 3 shows the effect of load resistance on the output power for the first three modes of a functionally graded beam. As expected, increasing the load resistance has an increasing and decreasing effect on the voltage and current, respectively. However, the rate of these changes is such that as the load resistance gradually increases, its effect on the output voltage decreases, meaning that its increase has approximately no effect on the output voltage at very high resistances. Additionally, it is observed that regardless of the mode number, the power first increases and then decreases when the load resistance rises. Therefore an optimal resistance can be obtained, where the output power is maximum.

4. Conclusions

In the present paper, the modeling of a functionally graded harvester with a piezoelectric layer is performed analytically. Firstly, the differential governing equations of the structure are obtained using Hamilton's principle based on modified shear deformation theories, and then modal expansion method is utilized to solve them. The mechanical properties of the host layer continuously change in the thickness direction. Two types of structural and viscous damping are modeled for the harvester. After validating the model with valid references, the effects of various parameters on the electric voltage, current and output power are discussed in detail.



برداشت انرژی پیزوالکتریک از تیرهای تابعی مدرج با استفاده از تئوری‌های تغییر شکل برشی اصلاح‌شده

کوروش خورشیدی^{الف*}، مهدی کریمی^ب، مهدی رضایی سرای^پ

^{الف} دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه اراک، اراک، ایران K-khorshidi@araku.ac.ir

^ب کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه اراک، اراک، ایران Karimimsc@gmail.com

^پ دکتری، مهندسی مکانیک، دانشگاه آلبرتا، ادمونتون، کانادا Meh.rezaei@gmail.com

چکیده	واژگان کلیدی
در مقاله‌ی حاضر به بررسی برداشت انرژی از تیرهای ناهمگن با لایه پیزوالکتریک با استفاده از تئوری‌های اصلاح‌شده پرداخته شده است. شرایط مرزی کلاسیک متفاوتی که ترکیب حالات مختلف گیردار، آزاد و ساده می‌باشد برای تیر لحاظ شده است. خواص سازه پایه به‌صورت توانی در راستای ضخامت تغییر می‌کند به طوری که با تغییر پارامتر توانی درصدهای حجمی متفاوتی از سرامیک و فلز در مدل‌سازی لحاظ می‌گردد. با استفاده از یک فرمولاسیون عمومی، مدل‌های تیر مختلفی از قبیل اویلر-برنولی، نمایی، مثلثاتی، هایپربولیکی و مرتبه پنج در نظر گرفته شده است. مدل‌های اصلاح‌شده مورد استفاده در این پژوهش قادر به لحاظ کردن اینرسی‌های دورانی و تغییر شکل‌های برشی عرضی می‌باشند. ارتعاشات سازه متأثر از تحریک هارمونیک پایه می‌باشد و همچنین دو نوع دمپینگ سازه‌ای و لژج برای تیر مدل‌سازی شده است. با استفاده از بسط مودال، جابجایی عرضی تیر ناشی از تحریک به دست می‌آید و سپس توان، جریان و ولتاژ خروجی محاسبه می‌شود. در قسمت تحلیل به بررسی تأثیر پارامترهای مختلف بر مشخصات ارتعاشی و برداشت انرژی سیستم بررسی می‌شود.	برداشت انرژی، تابعی مدرج، تئوری‌های اصلاح‌شده، پیزوالکتریک.
	تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۰۶/۳۱
	تاریخ بازنگری: ۱۴۰۰/۰۸/۰۲
	تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۱۰/۲۵

۱- مقدمه

با توجه به نیاز مبرم به تولید انرژی الکتریکی، استفاده از مواد پیزوالکتریک به‌ویژه جهت تأمین انرژی مورد نیاز حسگرها اجتناب‌ناپذیر است. در این روش با استفاده از خاصیت کوپلینگ الکترومکانیکی المان پیزوالکتریک، می‌توان انرژی حاصل از ارتعاشات محیط را جذب و ذخیره کرد [۲-۶]. از آنجایی که عمر باتری‌ها محدود می‌باشد و هزینه‌ی تعویض و تعمیر باتری‌های فرسوده نیز مشکل‌ساز می‌باشد، استفاده از انرژی ارتعاشات خصوصاً در حسگرهای بی‌سیم می‌تواند تا حدودی باعث کاهش انرژی اتلافی شود. روش‌های مختلفی برای برداشت انرژی ارتعاشاتی از جمله الکترومغناطیس و الکترواستاتیک وجود دارد که استفاده از وصله‌های پیزوالکتریک به دلیل چگالی توان بالا مورد توجه بسیاری از پژوهشگران قرار گرفته است [۷-۱۲].

یکی از رایج‌ترین سازه‌های مورد استفاده برای برداشت انرژی استفاده از تیر یکسر درگیر با یک یا چند لایه پیزوالکتریک می‌باشد. از آنجایی که فرکانس‌های طبیعی این سازه مقادیر کمتری دارد راحت‌تر می‌توان شرایط تشدید را برای آن فراهم کرد.

علاوه بر این دمپینگ^۱ سازه‌ای این نوع شرط مرزی نیز نسبت به سایر شرایط مرزی مقدار کمتری می‌باشد. فیرسول و همکاران [۱۳] به برداشت انرژی از یک تیر با لایه‌های پیزوالکتریک به روش تجربی پرداختند. آن‌ها با استفاده از یک جرم متمرکز فرکانس‌های طبیعی سازه را تغییر می‌دادند تا به فرکانس نیروی محیطی نزدیک شود و تشدید رخ دهد. یوشرانی و همکاران [۱۴] به بررسی برداشت انرژی از تیر منقطع با لایه‌های پیزوالکتریک با روش شبیه‌سازی و تجربی پرداختند. در حقیقت آن‌ها با گسسته کردن تیر توانستند از دامنه وسیع‌تری از فرکانس‌های سازه انرژی بگیرند و در نتیجه توان خروجی را افزایش دادند. در پژوهشی دیگر همانی و همکاران [۱۵] به بررسی اثرات نا بالانسی خارجی بر میزان برداشت انرژی از تیر پرداختند. آن‌ها نا بالانسی‌های متحرک اعمال‌شده را یک‌بار به صورت متمرکز و بار دیگر به صورت پیوسته مدل کردند. به‌طور کلی در مبحث برداشت انرژی حاصل از ارتعاشات سه روش شبیه‌سازی، مدل گسسته و مدل پیوسته بیش از روش‌های دیگر مورد استقبال پژوهشگران قرار گرفته است. به‌عنوان مثال استفن [۱۶] به بررسی جامع میزان توان خروجی حاصل از سیستم یک درجه آزادی به روش تحلیلی پرداخت و نشان داد که میزان انرژی خالص منتقل‌شده از ارتعاشات پایه از طریق دمپینگ بسیار متأثر از فرکانس تحریک می‌باشد. ارتوک و اینمان [۱] به مقایسه‌ی مدل یک درجه آزادی و تیر اویلر-برنولی^۲ پرداختند و نشان دادند که مدل یک درجه آزادی می‌تواند باعث ایجاد خطاهای قابل‌توجهی در مدل‌سازی شود و حتماً می‌بایستی از یک فاکتور تصحیح در هنگام استفاده از این مدل استفاده کرد. رضایی سرای و همکاران [۱۷] به طراحی و ساخت یک برداشت‌کننده انرژی چند درجه آزادی که قابلیت استخراج انرژی از سه فرکانس طبیعی اول را داشت، پرداختند. سفتی غیرخطی لحاظ شده در مدل آن‌ها باند وسیع‌تری را برای برداشت انرژی از هر مود ارتعاشی فراهم می‌کرد.

مواد تابعی مدرج دسته‌ای از مواد هدفمند می‌باشند که خواص مکانیکی مانند چگالی، نسبت پواسون و مدول ینگ در آن‌ها به‌صورت پیوسته از یک سطح تا سطح دیگر تغییر می‌کنند. معمولاً این مواد ترکیبی از فلز و سرامیک می‌باشند و در یک سطح فلز خالص و در سطح دیگر سرامیک خالص وجود دارد. در واقع مقاومت مکانیکی بالای فلز و مقاومت حرارتی بالای سرامیک باعث استفاده این مواد در مخازن شیمیایی و صنایع هوافضایی شده است. در سالیان اخیر ارتعاشات این مواد مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته است [۱۸-۲۳]. فاتحی و فرید [۲۴] به تحلیل برداشت انرژی از ارتعاشات غیرخطی مواد ناهمگن در راستای ضخامت با استفاده از تیر اویلر-برنولی و روش المان محدود پرداختند. در مقاله‌ای دیگر امینی و همکاران [۲۵] به تأثیر جرم و نیروی متحرک به ولتاژ و توان خروجی از برداشت‌کننده تابعی مدرج پرداختند. آن‌ها از روش انتگرال‌گیری نیومارک^۳ به‌منظور بررسی اثرات سرعت اجرام بر مشخصات ارتعاشی تیر استفاده کردند. تائو و همکاران [۲۶] به برداشت انرژی با استفاده از المان‌های پیزوالکتریک از ورق‌های تقویت‌شده با نانولوله‌های تابعی مدرج پرداختند. آن‌ها با لحاظ کردن مؤلفه‌های غیرخطی کرنش بر پایه‌ی تئوری برشی مرتبه اول به برداشت انرژی از چند مود اول ارتعاشی پرداختند. چا و همکاران [۲۷] به برداشت انرژی با استفاده از تیر کامپوزیتی با رویه‌ی تابعی مدرج تحت تأثیر جریان آب با شرایط مرزی مختلف پرداختند. آن‌ها نشان دادند که توان خروجی با افزایش عمق آب کاهش می‌یابد. جیانگ و همکاران [۲۸] پژوهشی در زمینه‌ی برداشت انرژی با استفاده از مواد ماکروالیاف از یک تیر یکسر درگیر دارای جرم متمرکز انجام دادند. آن‌ها همچنین به کمک روش آزمایشگاهی به بررسی پارامترهای مرتبط با ماده هوشمند موجود در سازه بر توان و ولتاژ خروجی پرداختند. تحلیل غیرخطی برداشت انرژی پیزوالکتریک با استفاده از ورق‌های تقویت‌شده با نانولوله‌های تابعی مدرج تحت تأثیر میدان‌های حرارتی و مکانیکی توسط رفیعی و همکاران [۲۹] انجام شد. معادلات موجود در تحلیل آن‌ها از تئوری کلاسیک پیروی می‌کرد و از روش گلرکین برای گسسته‌سازی آن‌ها استفاده شد. با توجه به منابع موجود در ادبیات تحقیق، دیده می‌شود که تاکنون پژوهشی در زمینه‌ی برداشت انرژی از تیرهای پیزوالکتریک با لایه تابعی مدرج به کمک تئوری‌های برشی اصلاح‌شده انجام نشده است. پژوهش حاضر گامی در جهت پر کردن این خلأ پژوهشی می‌باشد.

مقاله حاضر به بررسی برداشت انرژی از تیر تابعی مدرج با لایه پیزوالکتریک به روش تحلیلی پرداخته است. ابتدا با استفاده از روش همپلتون معادلات حاکم بر رفتار ارتعاشی سازه با در نظر گرفتن کوپلینگ الکترومکانیکی سازه به دست می‌آید و سپس

¹ Damping

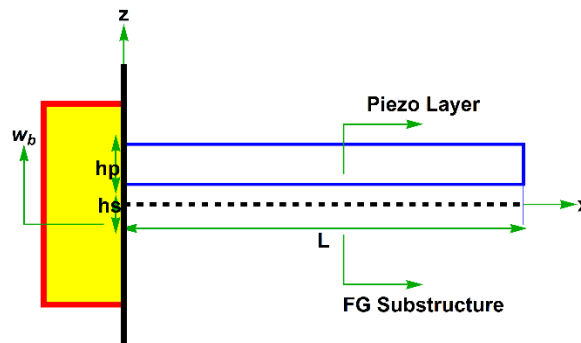
² Euler-Bernoulli beam

³ Newmark's integration method

با استفاده از روش باقیمانده وزنی به گسسته سازی معادلات و بررسی اثرات مختلف بر ولتاژ، جریان و توان خروجی برای شرایط مرزی متفاوت تیر پرداخته می‌شود. فرمول‌بندی مدل حاضر به گونه‌ای است که به‌طور کلی تئوری‌های تیر مختلفی را با در نظر گرفتن اینرسی‌های دورانی و تغییر شکل‌های برشی لحاظ می‌کند.

۲- مدل سازی ریاضی

در شکل ۱ یک تیر دولایه به طول L و ضخامت کلی h و سطح مقطع A مشاهده می‌شود. لایه پایینی این سازه تابعی مدرج بوده و خواص مکانیکی در آن ترکیبی از سرامیک و فلز می‌باشد به طوری که پایین‌ترین سطح یعنی $z = -h/2$ از فلز خالص و دومین سطح از سرامیک خالص تشکیل شده است. لایه بالایی تیر که کل سطح را می‌پوشاند از پیزوالکتریک ساخته شده است. شرایط مرزی متفاوتی برای مسئله در نظر گرفته شده که به‌عنوان نمونه در شکل ۱ فقط حالت یکسر گیردار آن نشان داده شده است. کل سازه تحت تأثیر تحریک خارجی ناشی از پایه W_b که هارمونیک می‌باشد قرار می‌گیرد.



شکل ۱ مدل هندسی تیر تابعی مدرج با پیزوالکتریک

با توجه به اینکه لایه تابعی مدرج از رابطه توانی پیروی می‌کند می‌توان از رابطه ۱ برای محاسبه مدول یانگ E ، نسبت پواسون ν و چگالی ρ استفاده کرد.

$$P_s = (P_c - P_m) \left(\frac{z}{h_s} + \frac{h}{2h_s} \right)^\alpha \quad (1)$$

در این رابطه P خواص مکانیکی ماده تابعی مدرج بوده و زیروندهای c و m بیانگر خواص سرامیک و فلز می‌باشند. میدان جابجایی مدل حاضر را می‌توان به صورت رابطه ۲ بیان کرد.

$$\tilde{u}(x, z, t) = u(x, t) - (z - z_0) \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} + f(z) \zeta(x, t) \quad (2)$$

$$\tilde{w}(x, z, t) = w(x, t)$$

در رابطه فوق، $\tilde{u}(x, z, t)$ ، $\tilde{w}(x, z, t)$ جابجایی تیر در جهات x ، z می‌باشند و $u(x, t)$ ، $w(x, t)$ نیز جابجایی صفحه‌ی میانی تیر هستند. $\zeta(x, t)$ معرف چرخش تیر می‌باشد. در با توجه به اینکه تابع $f(z)$ چه توزیعی داشته باشد، تئوری‌های اصلاح‌شده متفاوتی مطابق با جدول ۱ ارائه شده است. تابع مذکور به گونه‌ای تغییر می‌کند که شرط سطوح عاری از تنش را برای سازه ارضا می‌نماید. لازم به ذکر است که z_0 حل تار خنثی را برای سازه مشخص می‌کند و برابر است با:

$$z_0 = \frac{\int_z E z dz}{\int_z E dz} \quad (3)$$

جدول ۱ تئوری‌های مختلف برشی اصلاح شده

تئوری		$f(z)$
اویلر-برنولی	EBB	0
نمایی	ESDT	$ze^{-2(\frac{z}{h})^2}$
مثلثاتی	TSDT	$\frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)$
هایپربولیکی	HSDT	$h \sin\left(\frac{z}{h}\right) - z \cosh\left(\frac{1}{2}\right)$
مرتبه پنجم	FOSDT	$z\left(\frac{1}{h} - \frac{2z^2}{h^3} + \frac{8z^4}{5h^5}\right)$

با توجه به میدان جابجایی معرفی شده، می‌توان میدان کرنش ε_{ij} و تنش σ_{ij} را به صورت زیر محاسبه کرد.

$$\varepsilon_{xx} = f(z) \frac{\partial \zeta(x, t)}{\partial x} - (z - z_0) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \quad (۴)$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f(z)}{\partial z} \zeta(x, t) \right)$$

$$\sigma_{xx}^{(s)} = \left(1 + \eta \frac{\partial}{\partial t}\right) Q_{11}^{(s)} \varepsilon_{xx}$$

$$\sigma_{xz}^{(s)} = \left(1 + \eta \frac{\partial}{\partial t}\right) Q_{55}^{(s)} \varepsilon_{xz} \quad (۵)$$

$$\sigma_{xx}^{(p)} = \left(1 + \eta \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(Q_{11}^{(p)} \varepsilon_{xx} - Q_{11}^{(p)} d_{31} E_z \right)$$

d_{31} ثابت پیزوالکتریک است و η معرف ثابت دمپینگ کلون-ویت می‌باشد. بالانویس $k = s, p$ معرف لایه تابعی مدرج و پیزوالکتریک می‌باشد و ثوابت الاستیک Q_{ij} نیز برابرند با:

$$Q_{11}^{(k)} = E^{(k)}$$

$$Q_{55}^{(k)} = \frac{E^{(k)}}{2(1 + \nu^{(k)})} \quad (۶)$$

انرژی‌های کرنشی U ، جنبشی T و کار نیروهای خارجی W را محاسبه کرد.

$$U = \frac{1}{2} \left(\left(\sum_{i=1}^2 \int_{V^{(i)}} (\sigma_{xx}^{(i)} \varepsilon_{xx} + 2\sigma_{xz}^{(i)} \varepsilon_{xz}) dV^{(i)} \right) - \left(\int_{V^{(p)}} D_z E_z dV^{(p)} \right) \right), \quad (i = p, s) \quad (۷)$$

$$T = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^2 \int_{V^{(i)}} \rho^{(i)} \left(\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} \right)^2 \right) dV^{(i)} \right), \quad (i = p, s) \quad (۸)$$

$$W = \frac{1}{2} \int_A \left(m \frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} + c_a \frac{\partial w_b}{\partial t} \right) w dA \quad (۹)$$

در رابطه فوق $V^{(i)}$ و $\rho^{(i)}$ به ترتیب معرف حجم محصور و چگالی لایه‌ی i ام می‌باشد. D_z جابجایی الکتریکی در راستای z و A سطح مقطع تیر می‌باشد. همچنین c_a بیانگر دمپینگ لزج می‌باشد. با جایگذاری انرژی‌های کرنشی و جنبشی سازه در اصل همیلتون می‌توان به معادلات ارتعاشی زیر دست یافت.

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} = I_1 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial t^2 \partial x} + I_3 \frac{\partial^2 \zeta(x,t)}{\partial t^2} \quad (10)$$

$$\frac{\partial P_x}{\partial x} - \frac{1}{2} R_z = I_4 \frac{\partial^2 \zeta(x,t)}{\partial t^2} + I_5 \frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial t^2 \partial x} + I_3 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

$$-\frac{\partial^2 S_x}{\partial x^2} = -I_6 \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial t^2 \partial x^2} - I_2 \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial t^2 \partial x} - I_5 \frac{\partial^3 \zeta(x,t)}{\partial t^2 \partial x} + I_1 \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial t^2} + c_a \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial t} + c_a \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} + I_1 \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}$$

منتجه‌های تنش و اینرسی‌های دورانی رابطه فوق نیز به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\{M_x, P_x, S_x\} = \sum_{i=1}^2 \int_{A^{(i)}} \sigma_{xx}^{(i)} \{1, f(z-z_0), -(z-z_0)\} dA^{(i)} \quad (11)$$

$$\{Q_z, R_z\} = \sum_{i=1}^2 \int_{A^{(i)}} \sigma_{xz}^{(i)} \{1, f'(z-z_0)\} dA^{(i)}$$

$$\{I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6\} = \sum_{i=1}^2 \int_{A^{(i)}} \rho^{(i)} \{1, -(z-z_0), f(z-z_0), f^2(z-z_0), -(z-z_0)f(z-z_0), (z-z_0)^2\} dA^{(i)} \quad (12)$$

در روابط فوق $i = p, s$ و $A^{(i)}$ سطح مقطع لایه‌ی i ام می‌باشد.

علاوه بر رابطه ۵، رابطه‌ی ساختاری دیگری نیز به صورت رابطه‌ی ۱۳ برای لایه پیزوالکتریک می‌توان نوشت.

$$D_z = Q_{11}^{(p)} d_{31} \varepsilon_{xx} - \varepsilon_{33}^s \frac{v(t)}{h_p} \quad (13)$$

ε_{33}^s معرف ثابت پیزوالکتریک در کرنش ثابت است. با جایگذاری مقدار کرنش محوری از رابطه ۴ در رابطه ۱۳، می‌توان بار الکتریکی $q(t)$ را به صورت زیر محاسبه کرد.

$$q(t) = \int_A (Q_{11}^{(p)} d_{31} \left(f(z) \frac{\partial \zeta(x,t)}{\partial x} - (z-z_0) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right) - \varepsilon_{33}^s \frac{v(t)}{h_p}) dx \quad (14)$$

نهایتاً با توجه به اینکه تغییرات بار الکتریکی نسبت به زمان برابر است با جریان الکتریکی، داریم:

$$i(t) = \int_A (Q_{11}^{(p)} d_{31} \left(f(z) \frac{\partial^2 \zeta(x,t)}{\partial x \partial t} - (z-z_0) \frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} \right) dx - b \frac{\varepsilon_{33}^s}{h_p} \frac{dv(t)}{dt} \quad (15)$$

با استفاده از قانون اهم نیز مقدار ولتاژ الکتریکی در مداری با مقاومت R برابر است با

$$v(t) = Ri(t) = R \int_A (Q_{11}^{(p)} d_{31} \left(f(z) \frac{\partial^2 \zeta(x,t)}{\partial x \partial t} - (z-z_0) \frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} \right) dx - Rb \frac{\varepsilon_{33}^s}{h_p} \frac{dv(t)}{dt} \quad (16)$$

۳- حل معادلات

دستگاه معادلات ۱۰ و ۱۶ به صورت کوپل هم‌زمان با یکدیگر حل می‌شوند. در اینجا از روش حل گلرکین برای سازه مورد

مطالعه استفاده می‌شود. با توجه به شرایط مرزی مندرج در جدول ۲ می‌توان توابع سعی را انتخاب نمود و سپس با استفاده از آن میدان جابجایی را به صورت زیر نوشت. منظور از C لبه گیردار، F لبه آزاد و S لبه با تکیه‌گاه ساده می‌باشد.

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{i=1}^N \frac{dX_r(x)}{dx} \eta_r(t) \\ w(x,t) &= \sum_{i=1}^N X_r(x) \eta_r(t) \\ \zeta(x,t) &= \sum_{i=1}^N \frac{dX_r(x)}{dx} \eta_r(t) \end{aligned} \quad (17)$$

جدول ۲ شرایط مرزی و توابع سعی استفاده شده در مدل حاضر

شرط مرزی	$X_r(x)$
S-S	$\sin\left(\frac{\pi\lambda_r x}{L}\right)$
C-S	$\sin\left(\frac{\pi\lambda_r x}{L}\right)\left(\cos\left(\frac{\pi\lambda_r x}{L}\right) - 1\right)$
C-F	$-\cos\left(\frac{\lambda_r x}{L}\right) + \cosh\left(\frac{\lambda_r x}{L}\right) - \frac{(\sinh(\lambda_r) - \sin(\lambda_r))\left(\sinh\left(\frac{\lambda_r x}{L}\right) - \sin\left(\frac{\lambda_r x}{L}\right)\right)}{\cos(\lambda_r) + \cosh(\lambda_r)}$

پس از جایگذاری رابطه ۱۷ در سیستم معادلات خطی و استفاده از روش قطری کردن ماتریس‌ها می‌توان توابع زمانی مجهول $\eta_r(t)$ را محاسبه کرد. نهایتاً با جایگذاری میدان مؤلفه‌های جابجایی محاسبه شده در رابطه ۱۶، مقدار ولتاژ الکتریکی محاسبه می‌شود.

۴- نتایج و بحث

به منظور اعتبارسنجی روش، چهار پارامتر فرکانس طبیعی اول یک تیر در حالت ارتعاش آزاد با مقالات پیشین مقایسه شده است. مشاهده می‌شود که مدل و فرمولاسیون ارائه شده از دقت قابل قبولی در محاسبه‌ی فرکانس‌های طبیعی برخوردار است. علت تفاوت ناچیز در محاسبه فرکانس‌های طبیعی با استفاده از مدل‌های مختلف، تفاوت در بسط تنش برشی عرضی در راستای ضخامت تیر می‌باشد.

جدول ۳ مقایسه فرکانس‌های طبیعی تیر با مدل حاضر

ESDT	$\bar{\omega}_1$	9.8435
	$\bar{\omega}_2$	39.066
	$\bar{\omega}_3$	86.791
	$\bar{\omega}_4$	151.683
TSDT	$\bar{\omega}_1$	9.8437
	$\bar{\omega}_2$	39.070
	$\bar{\omega}_3$	86.807
	$\bar{\omega}_4$	151.733
HSDT	$\bar{\omega}_1$	9.8440
	$\bar{\omega}_2$	39.074
	$\bar{\omega}_3$	86.829
	$\bar{\omega}_4$	151.798
FOSDT	$\bar{\omega}_1$	9.8434
	$\bar{\omega}_2$	39.066
	$\bar{\omega}_3$	86.789
	$\bar{\omega}_4$	151.682
مرجع [۳۰]	$\bar{\omega}_1$	9.8696
	$\bar{\omega}_2$	39.4784
	$\bar{\omega}_3$	88.8264
	$\bar{\omega}_4$	157.9136

خواص مکانیکی استفاده شده برای ماده پیزوالکتریک و تابعی مدرج توسط جدول ۴ ارائه شده است. به غیر از مواردی که بیان می شود از ورودی های این جدول برای استخراج نتایج عددی استفاده می شود. در جدول ۵ نیز سه فرکانس اول تیر یکسر درگیر با لایه پیزوالکتریک توسط مدل های مختلف مقایسه شده است. در اینجا نیز تطابق خوبی بین مدل حاضر و پژوهش های گذشته مشاهده می شود.

جدول ۴ مشخصات هندسی و خواص مکانیکی استفاده شده در مدل حاضر

خواص کلی تیر	$h(mm)$	0.9
	$L(mm)$	100
	$b(mm)$	20
خواص لایه پیزوالکتریک	$h_p(mm)$	0.4
	$E^{(P)}(GPa)$	66
	$\nu^{(p)}$	0.3
	$\rho^{(P)}(Kg/m^3)$	7800
	$d_{31}(pm/V)$	-190
	$\epsilon_{33}^s(nF/m)$	15.93
	$R(\Omega)$	10^5
خواص لایه تابعی مدرج	$h_s(mm)$	0.5
	$E_c(GPa)$	100
	$E_m(GPa)$	70
	$\rho_c(Kg/m^3)$	7165
	$\rho_m(Kg/m^3)$	2702
	$\nu_m = \nu_c$	0.3
	α	1

جدول ۵ مقایسه فرکانس های طبیعی تیر متشکل از لایه پیزوالکتریک با مدل حاضر

ESDT	$\omega_1(Hz)$	47.806
	$\omega_2(Hz)$	299.482
	$\omega_3(Hz)$	838.097
TSDT	$\omega_1(Hz)$	47.806
	$\omega_2(Hz)$	299.480
	$\omega_3(Hz)$	838.084
HSDT	$\omega_1(Hz)$	47.805
	$\omega_2(Hz)$	299.478
	$\omega_3(Hz)$	838.072
FOSDT	$\omega_1(Hz)$	47.806
	$\omega_2(Hz)$	299.483
	$\omega_3(Hz)$	838.099
مرجع [۳۱]	$\omega_1(Hz)$	47.800
	$\omega_2(Hz)$	299.60
	$\omega_3(Hz)$	838.20

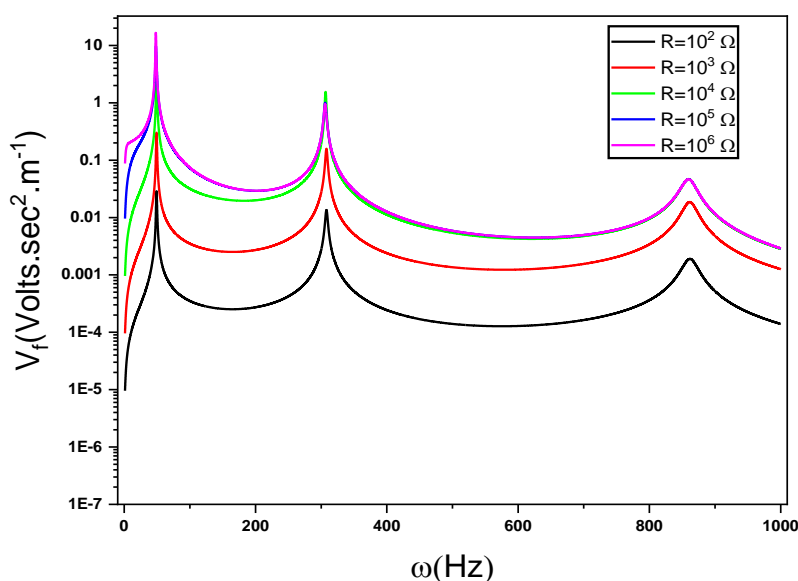
به منظور تفسیر راحت تر نتایج به دست آمده، پاسخ فرکانسی ولتاژ الکتریکی V_f ، پاسخ فرکانسی جریان الکتریکی I_f و پاسخ فرکانسی توان خروجی P_f را به صورت زیر تعریف می نماییم.

$$\begin{aligned}
 V_f &= \frac{v(t)}{-\omega^2 Y_0 e^{i\omega t}} \\
 I_f &= \frac{i(t)}{-\omega^2 Y_0 e^{i\omega t}} \\
 P_f &= \frac{P(t)}{(-\omega^2 Y_0 e^{i\omega t})^2}
 \end{aligned}
 \tag{۱۵}$$

در رابطه ۱۵، ω و Y_0 به ترتیب دامنه و فرکانس نیروی تحریک می باشند. در ادامه به بررسی تأثیر پارامترهای مختلف به

مشخصات ارتعاشی و برداشت انرژی تیر تابعی مدرج با لایه پیزوالکتریک پرداخته می‌شود. لازم به ذکر است که از سه مود اول ارتعاشی در پاسخ بسط مودال^۴ تیر برای استخراج نتایج عددی استفاده شده است. همچنین شایان ذکر است که در استخراج نتایج عددی از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه پنجم (FOSDT) استفاده شده است.

شکل ۲ پاسخ فرکانسی ولتاژ تیر تابعی مدرج با لایه پیزوالکتریک را به ازای مقاومت‌های الکتریکی متفاوت نمایش می‌دهد. مطابق شکل، ولتاژ خروجی برای تمامی مودهای ارتعاشی در تمامی فرکانس‌های تحریک با افزایش مقاومت الکتریکی زیاد می‌شود. این بدان معنی است که در مقاومت‌های خیلی پایین که حالت اتصال کوتاه برقرار است کمینه ولتاژ خروجی و در مقاومت‌های زیاد که حالت مدار باز برقرار است بیشینه ولتاژ خروجی را می‌توان از سیستم گرفت. علاوه بر این مشاهده می‌شود که با افزایش مقاومت الکتریکی، فرکانس تشدید مقدار کمی افزایش می‌یابد. به عبارتی قله‌ی نمودارها با افزایش مقاومت الکتریکی کمی متمایل به سمت راست می‌شود. به عنوان مثال به ازای مقدار مقاومت الکتریکی ۱۰۰ و ۱۰۰۰۰۰۰ اهم به ترتیب بیشینه ولتاژ الکتریکی در فرکانس‌های تحریک ۴۸.۱ و ۴۹.۲ هرتز به دست می‌آید.



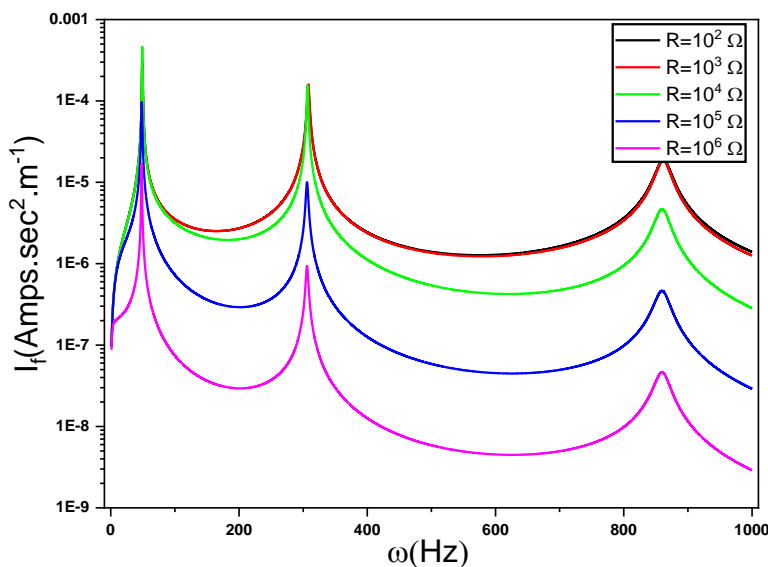
شکل ۲ پاسخ فرکانسی ولتاژ خروجی به ازای مقاومت‌های مختلف

در شکل ۳ پاسخ فرکانسی جریان الکتریکی تیر تابعی مدرج با لایه پیزوالکتریک به ازای مقاومت‌های الکتریکی متفاوت نمایش داده شده است. در اینجا برخلاف آنچه در مورد ولتاژ الکتریکی مشاهده شد، مقدار جریان الکتریکی با مقاومت الکتریکی رابطه‌ی عکس داشته و بیشینه مقدار جریان الکتریکی در حالت نزدیک به اتصال کوتاه به دست می‌آید. همچنین دیده می‌شود که در فرکانس‌های تحریک بالاتر اختلاف بین نمودارها در حالت رزونانس زیادتر شده و این بدین معنی است که تأثیر مقاومت الکتریکی بر خروجی جریان در فرکانس‌های بالاتر بیشتر می‌شود.

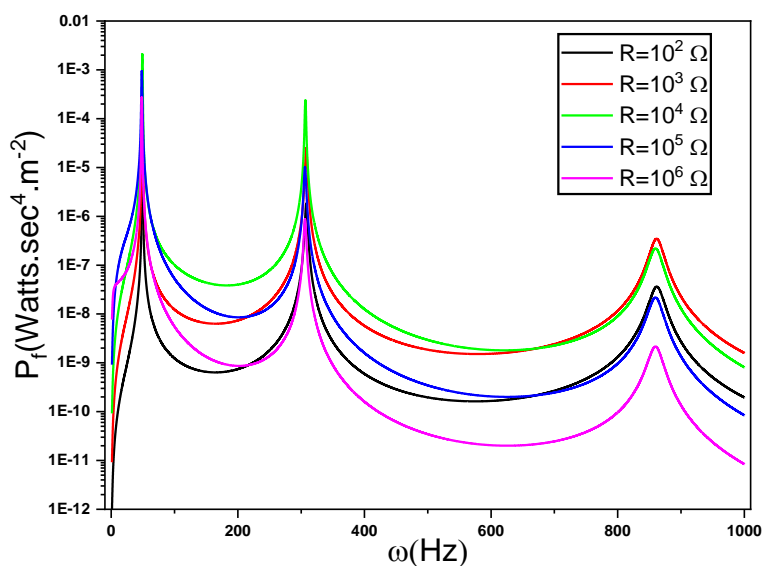
در شکل ۴ پاسخ فرکانسی توان الکتریکی تیر تابعی مدرج با لایه پیزوالکتریک به ازای مقاومت‌های الکتریکی متفاوت نمایش داده شده است. برخلاف نمودارهای ولتاژ و جریان که رفتاری یکنوا را نسبت به مقاومت الکتریکی داشتند، در اینجا رفتار توان خروجی پیچیده‌تر می‌باشد و بسته به مقدار فرکانس تحریک افزایش مقاومت الکتریکی گاهی باعث کاهش و گاهی باعث افزایش توان می‌شود. دلیل این رفتار این است که توان الکتریکی برابر است با حاصل ضرب ولتاژ در جریان الکتریکی و افزایش مقاومت، یکی از این دو پارامتر را افزایش (ولتاژ) و دیگری را کاهش (جریان الکتریکی) می‌دهد. به ازای مقاومت‌های استفاده شده در استخراج نتایج، دیده می‌شود که مقدار مقاومت ۱۰۰۰۰ اهم برای دو مود اول و مقدار مقاومت ۱۰۰۰ اهم برای مود سوم بیشینه مقدار توان را منتج می‌شوند. از این رو در سایر نمودارها از مقاومت ۱۰۰۰۰ اهم استفاده می‌شود. همین

⁴ Modal expansion

رفتار غیر یکنوای توان خروجی باعث برخورد نمودارها در شکل ۴ شده است به طوری که به ازای دو مقاومت متفاوت در برخی حالات، توان خروجی یکسانی به دست آمده است.



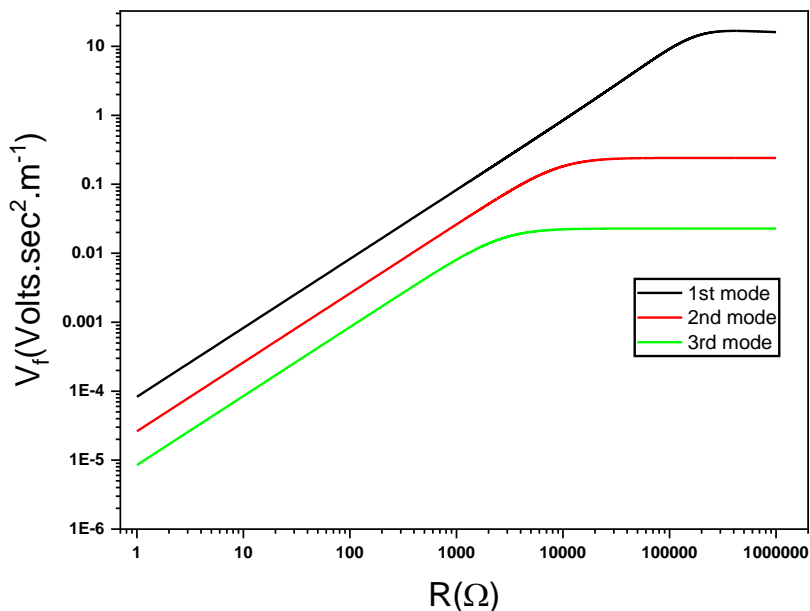
شکل ۳ پاسخ فرکانسی جریان الکتریکی به ازای مقاومت‌های مختلف



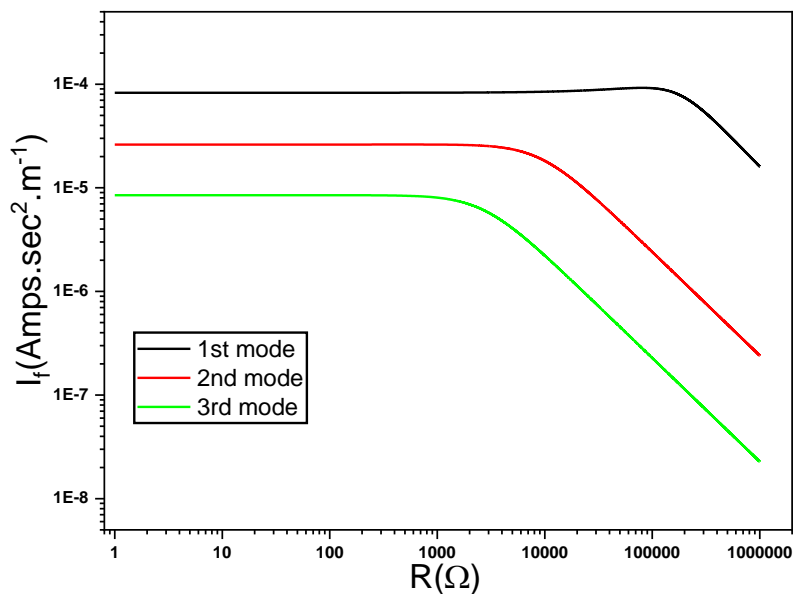
شکل ۴ پاسخ فرکانسی توان الکتریکی به ازای مقاومت‌های مختلف

نمودارهای ۵ تا ۷ تأثیر مقاومت الکتریکی بر میزان ولتاژ خروجی، جریان الکتریکی و توان خروجی در سه مود اول تیر تابعی مدرج را نشان می‌دهد. همان‌گونه که انتظار می‌رود افزایش مقاومت الکتریکی تأثیری افزایشی و کاهشی به ترتیب روی ولتاژ و جریان الکتریکی دارد. اما نرخ این تغییرات به‌گونه‌ای است که با افزایش مقاومت الکتریکی رفته‌رفته تأثیر آن بر ولتاژ خروجی کاهش می‌یابد و در مقاومت‌های خیلی زیاد عملاً افزایش آن تأثیری بر میزان ولتاژ ندارد. عکس همین موضوع در مورد

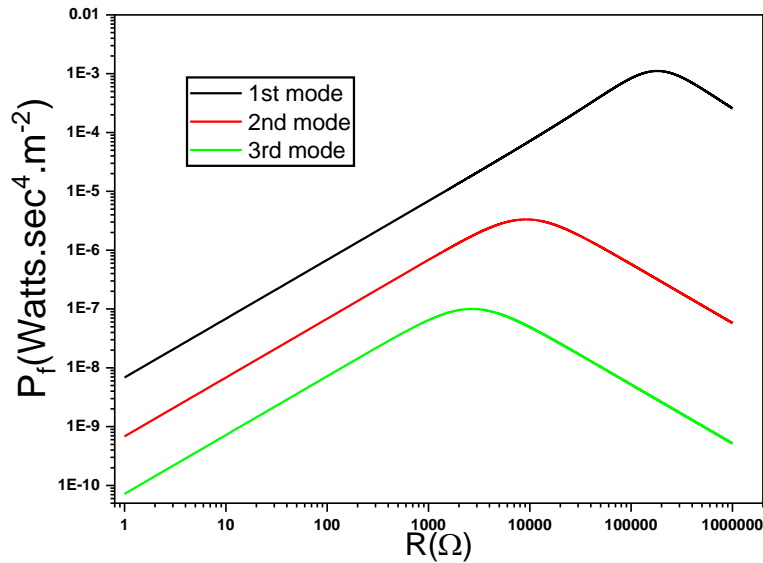
جریان الکتریکی نیز برقرار است و میزان تأثیر تغییرات مقاومت الکتریکی بر جریان خروجی در مقاومت‌های پایین بسیار ناچیز می‌باشد. مطابق با نمودار ۷، صرف‌نظر از شماره مود، با افزایش مقاومت الکتریکی ابتدا توان افزایش و سپس کاهش می‌یابد و لذا می‌توان مقاومت بهینه یعنی مقاومتی که بیشینه توان خروجی را می‌دهد به دست آورد.



شکل ۵ تغییرات ولتاژ خروجی به ازای مقاومت‌های مختلف

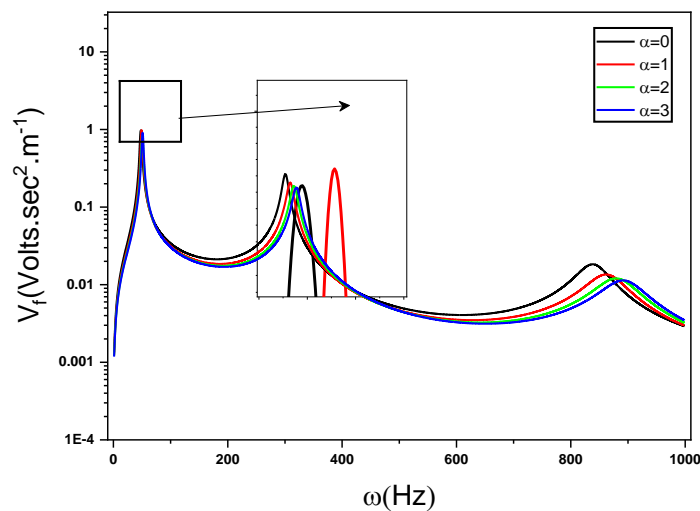


شکل ۶ تغییرات جریان خروجی به ازای مقاومت‌های مختلف

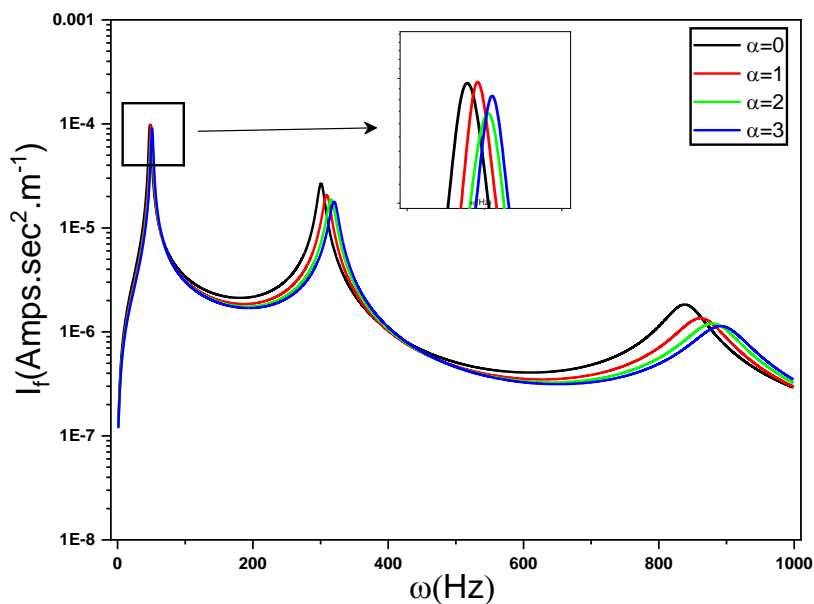


شکل ۷ تغییرات توان خروجی به ازای مقاومت‌های مختلف

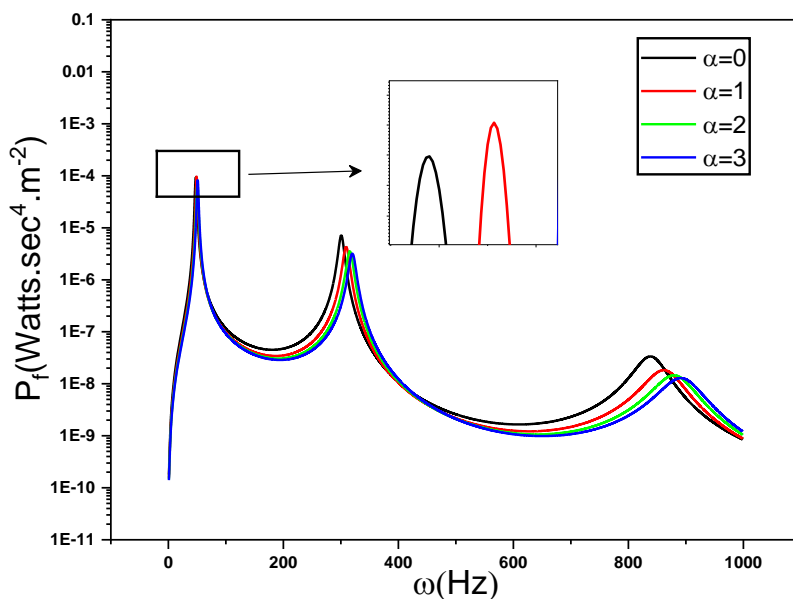
نمودارهای ۸ تا ۱۰ تأثیر پارامتر تابعی مدرج را بر پاسخ فرکانسی ولتاژ، جریان و توان خروجی نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که افزایش پارامتر تابعی مدرج اولاً باعث افزایش فرکانس رزونانس می‌شود. این رفتار در هر سه نمودار ولتاژ، جریان و توان دیده می‌شود. دلیل این رفتار این است که با افزایش پارامتر تابعی مدرج سفتی کلی سازه افزایش یافته و همین امر باعث زیاد شدن فرکانس‌های طبیعی آن می‌شود. از طرف دیگر دیده می‌شود که افزایش پارامتر تابعی مدرج باعث کاهش ولتاژ، جریان و در نتیجه توان خروجی خصوصاً در مدهای ارتعاشی بالاتر می‌شود. در مورد مود اول ارتعاشی نیز دیده می‌شود که افزایش α ابتدا پارامترهای برداشت انرژی را افزایش و سپس کاهش می‌دهد به طوری که به ازای یک α مشخص (در اینجا $\alpha=1$) بیشینه‌ی توان خروجی را می‌توان از سازه گرفت.



شکل ۸ تغییرات ولتاژ خروجی به ازای پارامتر لایه تابعی مدرج



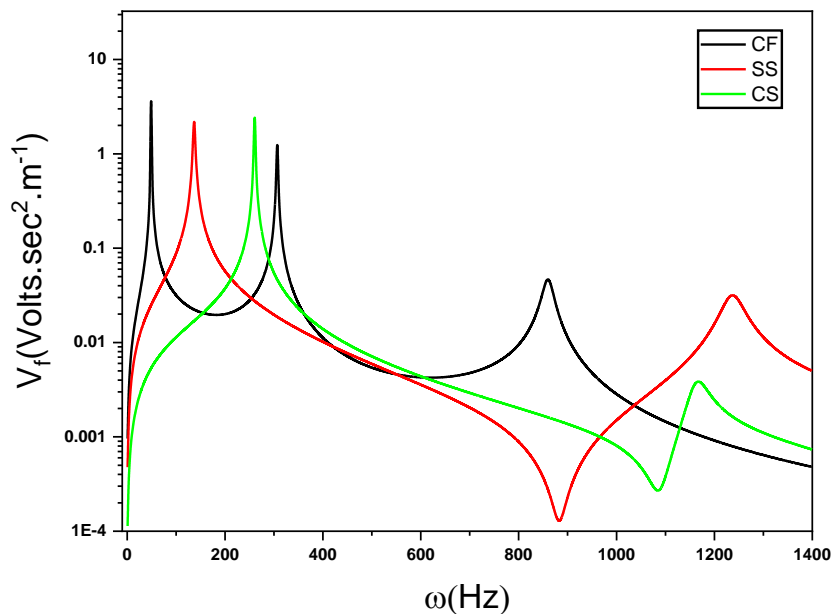
شکل ۹ تغییرات جریان خروجی به ازای پارامتر لایه تابعی مدرج



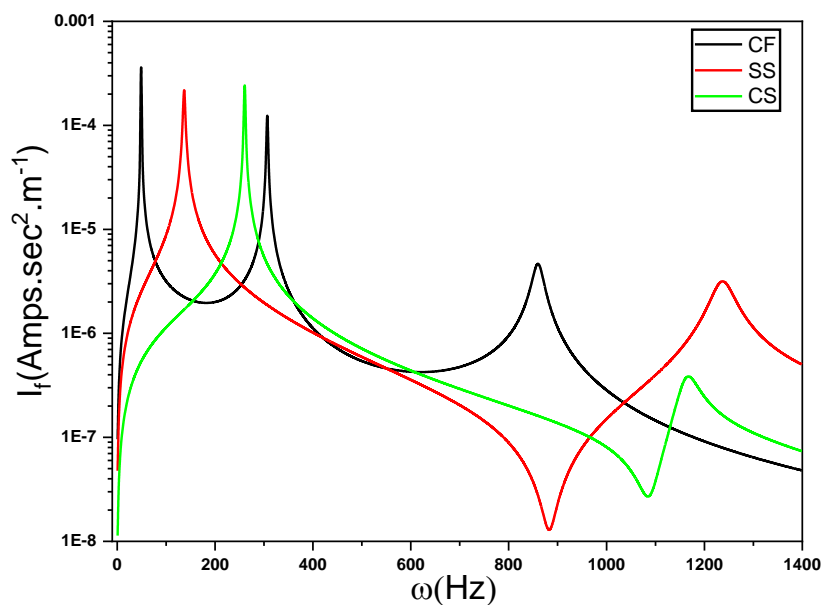
شکل ۱۰ تغییرات توان خروجی به ازای پارامتر لایه تابعی مدرج

نمودارهای ۱۱ تا ۱۳، پاسخ فرکانسی ولتاژ الکتریکی، جریان الکتریکی و توان خروجی را برای سه شرط مرزی یکسر درگیر، دو طرف ساده و ساده-گیردار نشان می‌دهد. اولاً همان‌طوری که دیده می‌شود شرایط مرزی یکسر درگیر دارای کمترین فرکانس‌های طبیعی می‌باشد چراکه لبه‌ها دارای قیود کمتری نسبت به سایر شرایط مرزی هستند و همین باعث کاهش سفتی سازه می‌گردد. همین امر باعث می‌شود که این شرط مرزی با صرف انرژی کمتری به رزونانس دربیاید و برداشت انرژی از آن راحت‌تر می‌باشد. از سوی دیگر مشاهده می‌شود که میزان ولتاژ و جریان و در نتیجه توان خروجی در حالت یکسر درگیر نیز بسیار بیشتر از حالات دیگر می‌باشد. نکته دیگری که در نمودارها می‌توان دید این است که میزان توان خروجی گرفته‌شده از

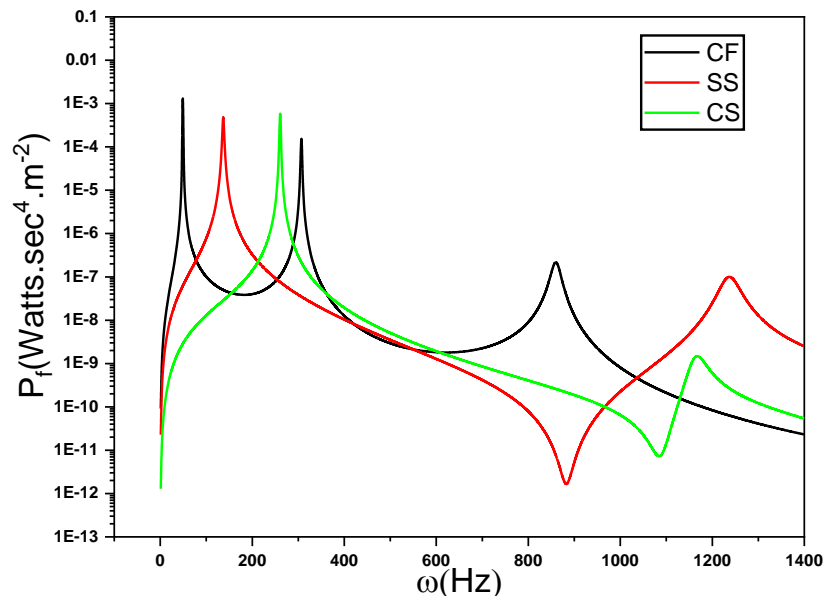
سیستم مفروض در موده‌های بالاتر (دوم و سوم) برای شرایط مرزی دو طرف ساده و گیردار-ساده بسیار ناچیز می‌باشد. این بدان دلیل است این مودها در این شرایط مرزی دچار کرنش ناچیزی با توجه به نوع بارگذاری می‌شوند و لذا میزان توان خروجی آن‌ها نیز بسیار اندک می‌باشد.



شکل ۱۱ پاسخ فرکانسی ولتاژ خروجی در شرایط مرزی متفاوت



شکل ۱۲ پاسخ فرکانسی جریان خروجی در شرایط مرزی متفاوت



شکل ۱۳ پاسخ فرکانسی توان خروجی در شرایط مرزی متفاوت

۵- نتیجه‌گیری

در مقاله حاضر به مدل‌سازی تیر تابعی مدرج با لایه پیزوالکتریک به روش تحلیلی پرداخته شده است. ابتدا با استفاده از اصل همپلتون بر پایه‌ی تئوری‌های تغییر شکل برشی اصلاح‌شده، معادلات دیفرانسیل حاکم بر رفتار ارتعاشی سازه با در نظر گرفتن کوپلینگ الکترومکانیکی به‌دست‌آمده و سپس با استفاده از روش بسط مودال به حل معادلات برای شرایط مرزی مختلف پرداخته شده است. خواص مکانیکی لایه پایه به‌صورت پیوسته در راستای ضخامت متغیر در نظر گرفته شده و همچنین دو نوع دمپینگ سازه‌ای و لزج برای مدل شده است. پس از اعتبارسنجی مدل با مراجع معتبر، اثرات پارامترهای مختلف مانند مقاومت الکتریکی، شرایط مرزی، پارامتر تابعی مدرج و غیره بر میزان ولتاژ الکتریکی، جریان الکتریکی و توان خروجی نشان داده شده است.

۶- مراجع

- [1] Erturk A, Inman D J. On mechanical modeling of cantilevered piezoelectric vibration energy harvesters. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. 2008;19:1311-1325.
- [2] Rezaeisaray M, Raboud D, Moussa W. Optimizing Energy Output of Piezoelectric Microcantilevers. In *International Conference on Nanochannels, Microchannels, and Minichannels*. 2011;401-405.
- [3] Khorshidi K, Bahrami M, Karimi M, Ghasemi M. A theoretical approach for flexural behavior of FG vibrating micro-plates with piezoelectric layers considering a hybrid length scale parameter. *Journal of Theoretical and Applied Vibration and Acoustics*. 2020;6:51-68.
- [4] Lu Z-Q, Chen J, Ding H, Chen L-Q. Two-span piezoelectric beam energy harvesting. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2020;175:105532.
- [5] Khorshidi K, Karimi M. Fluid-Structure Interaction of Vibrating Composite Piezoelectric Plates Using Exponential Shear Deformation Theory. *Mechanics of Advanced Composite Structures*. 2020;7:59-69.
- [6] Hu G, Wang J, Tang L. A comb-like beam based piezoelectric system for galloping energy harvesting. *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2021;150:107301.

- [7] Rezaeisaray M. Investigation of potential platforms for low frequency MEMS-based piezoelectric energy harvesting. 2015.
- [8] Hu G, Liang J, Lan C, Tang L. A twist piezoelectric beam for multi-directional energy harvesting. *Smart Materials and Structures*. 2020;29:11LT01.
- [9] Khorshidi K, Karimi M. Analytical modeling for vibrating piezoelectric nanoplates in interaction with inviscid fluid using various modified plate theories. *Ocean Engineering*. 2019;181:267-280.
- [10] Liu C, Zhao R, Yu K, Lee H P, Liao B. A quasi-zero-stiffness device capable of vibration isolation and energy harvesting using piezoelectric buckled beams. *Energy*. 2021:121146.
- [11] Khorshidi K, Ghasemi M, Karimi M, Bahrami M. Effects of Couple-stress Resultants on Thermo-electro-mechanical Behavior of Vibrating Piezoelectric Micro-plates Resting on Orthotropic Foundation. *Journal of Stress Analysis*. 2019;4:125-136.
- [12] Zhang Y-W, Chen W-J, Ni Z-Y, Zang J, Hou S. Supersonic aerodynamic piezoelectric energy harvesting performance of functionally graded beams. *Composite Structures*. 2020;233:111537.
- [13] Friswell M I, Ali S F, Bilgen O, Adhikari S, Lees A W, Litak G. Non-linear piezoelectric vibration energy harvesting from a vertical cantilever beam with tip mass. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. 2012;23:1505-1521.
- [14] Usharani R, Uma G, Umapathy M, Choi S-B. A new piezoelectric-patched cantilever beam with a step section for high performance of energy harvesting. *Sensors and Actuators A: Physical*. 2017;265:47-61.
- [15] Hamani I D, Tikani R, Assadi H, Ziaei-Rad S. Energy harvesting from moving harmonic and moving continuous mass traversing on a simply supported beam. *Measurement*. 2020;150:107080.
- [16] Stephen N G. On energy harvesting from ambient vibration. *Journal of sound and vibration*. 2006;293:409-425.
- [17] Rezaeisaray M, El Gowini M, Sameoto D, Raboud D, Moussa W. Low frequency piezoelectric energy harvesting at multi vibration mode shapes. *Sensors and Actuators A: Physical*. 2015;228:104-111.
- [18] Malakooti M H, Zhou Z, Sodano H A. Enhanced energy harvesting through nanowire based functionally graded interfaces. *Nano Energy*. 2018;52:171-182.
- [19] Heshmati M, Amini Y. A comprehensive study on the functionally graded piezoelectric energy harvesting from vibrations of a graded beam under travelling multi-oscillators. *Applied Mathematical Modelling*. 2019;66:344-361.
- [20] Karimi M, Khorshidi K, Dimitri R, Tornabene F. Size-dependent hydroelastic vibration of FG microplates partially in contact with a fluid. *Composite Structures*. 2020;244:112320.
- [21] Qi L. Energy harvesting properties of the functionally graded flexoelectric microbeam energy harvesters. *Energy*. 2019;171:721-730.
- [22] Motlagh P L, Anamagh M R, Bediz B, Basdogan I. Electromechanical analysis of functionally graded panels with surface-integrated piezo-patches for optimal energy harvesting. *Composite Structures*. 2021;263:113714.
- [23] Khorshidi K, Karimi M. Flutter analysis of sandwich plates with functionally graded face sheets in thermal environment. *Aerospace Science and Technology*. 2019;95:105461.
- [24] Fatehi P, Farid M. Piezoelectric energy harvesting from nonlinear vibrations of functionally graded beams: finite-element approach. *Journal of Engineering Mechanics*. 2019;145:04018116.

- [25] Amini Y, Heshmati M, Fatehi P, Habibi S E. Energy harvesting from vibrations of a functionally graded beam due to moving loads and moving masses. *Journal of Engineering Mechanics*. 2017;143:04017063.
- [26] Tao J, He X, Yi S, Deng Y. Broadband energy harvesting by using bistable FG-CNTRC plate with integrated piezoelectric layers. *Smart Materials and Structures*. 2019;28:095021.
- [27] Cha Y, Kim H, Porfiri M. Energy harvesting from underwater base excitation of a piezoelectric composite beam. *Smart Materials and Structures*. 2013;22:115026.
- [28] Song H J, Choi Y-T, Wereley N M, Purekar A S. Energy harvesting devices using macro-fiber composite materials. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. 2010;21:647-658.
- [29] Rafiee M, He X Q, Liew K M. Nonlinear analysis of piezoelectric nanocomposite energy harvesting plates. *Smart Materials and Structures*. 2014;23:065001.
- [30] Zhu B, Xu Q, Li M, Li Y. Nonlinear free and forced vibrations of porous functionally graded pipes conveying fluid and resting on nonlinear elastic foundation. *Composite Structures*. 2020;252:112672.
- [31] Erturk A, Inman D J. A distributed parameter electromechanical model for cantilevered piezoelectric energy harvesters. *Journal of vibration and acoustics*. 2008;130.