



## تحلیل استاتیکی خمش و کمانش تیر متخلخل تابعی با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول

محمد جواد خوش گفتار<sup>الف\*</sup>، مونا حاجی ویسه<sup>ب</sup>

<sup>الف</sup> استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه اراک، اراک، ایران، [m-khoshgoftar@araku.ac.ir](mailto:m-khoshgoftar@araku.ac.ir)

<sup>ب</sup> دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه اراک، اراک، ایران، [mona.hk94@gmail.com](mailto:mona.hk94@gmail.com)

چکیده	واژگان کلیدی
در این مقاله خمش و کمانش استاتیکی ناشی از توزیع‌های متفاوت تخلخل تابعی بر اساس تئوری تیر تیموشنکو بررسی شده است. مدول الاستیسیته و چگالی جرمی با توجه به دو الگوی توزیع تخلخل مشخص در جهت ضخامت در نظر گرفته شده است. سیستم معادلات دیفرانسیل جزئی حاکم بر رفتار کمانش و رفتار خمشی، از اصل همپلتون به دست آمده است و برای محاسبه بارهای بحرانی کمانش و انحنای خمش عرضی، روش ریتز به کار برده شده است. جهت اعتبارسنجی روش و نتایج ارائه شده این پژوهش، مقایسه نتایج به دست آمده با نتایج ارائه شده در مراجع و مقالات معتبر و مدل سازی المان محدود صورت گرفته است. یک مطالعه پارامتری برای بررسی اثرات ضریب تخلخل و نسبت باریکی بر کمانش و خواص خمشی تیرهای متخلخل دارای تکیه گاه مفصلی در دو طرف تیر، انجام شده است. همچنین تأثیر توزیع متفاوت تخلخل بر عملکرد ساختاری بررسی شده تا به بینش‌های مهمی در طراحی این نوع تیر، برای دستیابی به مقاومت کمانش و رفتار خمشی مورد نظر دست یابیم. طبق نتایج مطالعه پارامتری، با افزایش ضریب تخلخل و نسبت باریکی، بار بحرانی کمانش و میزان خمش افزایش می‌یابد. فوم‌های فلزی با استفاده از روش‌های ساخت افزایشی در سال‌های اخیر استفاده و کاربرد نتایج حاصل از این تحقیق را بیشتر کرده است. از جمله کاربردهای تحقیق حاضر استفاده از این نوع مواد متخلخل جهت داربست ترمیم استخوان می‌توان نام برد.	تیر متخلخل، کمانش، خمش استاتیکی، اصل همپلتون.
	تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۰۶/۱۰
	تاریخ بازنگری: ۱۴۰۰/۰۷/۰۷
	تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۷/۱۱

## Static bending and buckling analysis of functionally porous beam by First order Shear Deformation Theory

M. J. Khoshgoftar<sup>a\*</sup>, M. Hajiveisheh<sup>b</sup>

<sup>a</sup> Assistant Professor, Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Arak University, Arak, 38156-88349, Iran

<sup>b</sup> MSc. Student, Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Arak University, Arak, 38156-88349, Iran

### KEYWORDS

Porous beam,  
Buckling,  
Static bending,  
Hamilton principle.

Received: September 01, 2021

Revised: September 29, 2021

Accepted: October 03, 2021

### ABSTRACT

In this paper, static bending and buckling due to different distributions of functional porosity based on Timoshenko's beam theory are investigated. The modulus of elasticity and mass density are considered according to the two patterns of specific porosity distribution in the direction of thickness. The partial differential governing equations are derived from the minimum potential energy principle. The Ritz method is used to calculate the critical buckling loads and transverse bending curvature. The obtained results have been compared with other references and also finite element modeling. A parametric study was performed to investigate the effects of porosity coefficient and slenderness ratio on buckling and flexural properties of porous beams with pinned boundary conditions. Also, the effect of different porosity distributions on structural performance has been investigated to obtain essential insights into the design of this type of beam to achieve the desired buckling strength and flexural behavior. According to the parametric study results, increasing the porosity coefficient and slenderness ratio increase the critical buckling load and the bending strength. This research results can design porous beams like metal foams or recent manufacturing methods like additive manufacturing. Among the applications of the present study, this type of porous material for bone repair scaffolding can be mentioned.

سازه‌های ساخته‌شده از مواد مدرج تابعی به دلیل مزایای منحصر به فرد خود که با توزیع ناهمگن خواص، در طول یک یا چند جهت ارائه می‌شوند، مورد توجه محققان قرار گرفته و در چند دهه گذشته مطالعات زیادی در این زمینه انجام شده است. مواد جامدی که در ساختار خود دارای حفره و منفذ باشند به عنوان مواد متخلخل تعریف می‌شوند. حفره‌های موجود در مواد متخلخل به دو نوع حفره‌های باز و حفره‌های بسته تقسیم می‌شوند. حفره‌های باز به سطح ماده دسترسی دارند ولی حفره‌های بسته در درون ماده محبوس هستند. اکنون فنونی برای فومی شکل کردن نه فقط مواد آلی بلکه فلزات، سرامیک‌ها و شیشه‌ها وجود دارد. این مواد کاربردهای بسیار زیادی، مثلاً برای عایق کاری یا بالشتک‌های محافظ، برای جذب انرژی جنبشی ضربات شدید و برای کاتالیزگری دارند. بسیاری از خصوصیات فیزیکی نظیر چگالی، رسانایی گرمایی، استحکام و غیره به میزان تخلخل و ساختار منافذ یک جسم بستگی دارد. کنترل دقیق منافذ، به‌ویژه در کاربردهای صنعتی، مثلاً در طراحی کاتالیزرها، مواد جاذب صنعتی، غشاءها، مواد ساختمانی و سرامیک‌ها اهمیت زیادی دارد. به‌علاوه تخلخل یکی از عواملی است که در واکنش‌پذیری شیمیایی و برهم‌کنش‌های فیزیکی جامدات با گازها و مایعات تأثیر می‌گذارد.

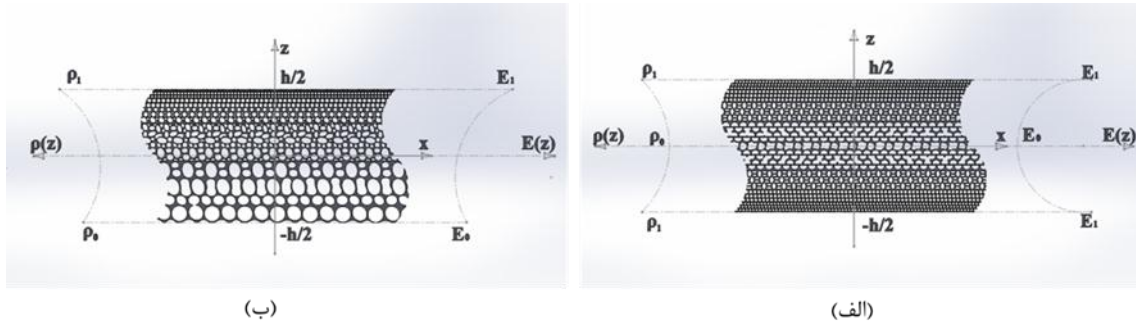
ریبعی و وندرا خواص انواع مختلف فوم‌های فلزی مرکب را مقایسه کردند [۱]. لیم و همکارانش رفتار فشرده‌سازی تک‌محوری فوم‌های فلزی با تخلخل تصادفی را به‌طور تجربی مورد بررسی قرار دادند [۲]. کاربردهای ساختاری، تولید، خواص، مواد و مدل‌سازی مواد فومی فولادی به‌طور پیشرفته بررسی شده است تا نقش اصلی چگالی مواد را برجسته کنند و امکان‌پذیر بودن فوم‌های فلزی برای استفاده در کاربردهای داخلی یا ساختاری را نشان دهند [۳]. کاردوسو و اولیویرا نیز بر استفاده از فوم‌های فلزی در طراحی خودرو به دلیل کاهش وزن، از طریق مدل‌سازی و شبیه‌سازی کامپیوتری تأکید داشتند و برای تحلیل ساختاری، از نرم‌افزار المان محدود آباکوس استفاده کردند [۴]. راج و همکاران با استفاده از تکنیک تولید تجاری لحیم‌کاری دو ورق به یک هسته فوم، پانل‌های فوم فولادی ضدزنگ مستطیلی را ساخته و پس از انجام تست‌های لازم، نتایج را با داده‌های منتشرشده از فوم‌های فلزی و پلیمری و فوم‌های تغییر شکل یافته پیشنهادی سلول باز مقایسه کردند [۵]. بانهارت احتمالات مربوط به ساخت فوم‌های فلزی و دیگر ساختارهای فلزی متخلخل را مورد بررسی قرارداد [۶]. نتایج تحقیقات لیائو-لیانگ و همکارانش نشان می‌دهد که تأثیر اندازه روی خمش، کمانش و مشخصه‌های ارتعاشی زمانی قابل توجه است که نسبت ضخامت میکروولیت‌ها<sup>۱</sup> به پارامتر مقیاس طول مواد کم‌تر از ۱۰ باشد [۷]. طراحی مؤثر تیر فوم فلزی سانداویچی توسط مگنوسکا-بلاندزی و مگنوسکا انجام شد تا پارامترهای بهینه بدون بعد، با توجه به جرم و نیروی بحرانی یک تیر با تیکه گاه مفصلی هم‌زمان انجام شود [۸]. بیکاکیس و همکارانش پاسخ کمانش الاستیک ورقه‌های مستطیلی الیاف فلزی که در معرض تنش‌های برشی قرار دارند را از روش اجزا محدود بررسی کردند [۹]. چن و همکارانش به عملکرد کمانش الاستیک و خمش تیرهای متخلخل با دو توزیع تخلخل مختلف پرداخته و تأثیر پارامترهای تخلخل بر عملکرد ساختاری تیرهای متخلخل با استفاده از نرم‌افزار انسیس را بررسی کرده‌اند [۱۰].

در مقاله حاضر یک تیر متخلخل تابعی مدرج با دو نوع توزیع تخلخل مشخص در جهت ضخامت در نظر گرفته شده و اثرات ضریب تخلخل و نسبت باریکی تیر بر کمانش الاستیک و خمش استاتیکی بررسی شده است. محاسبات این تیر متخلخل بارگذاری شده با تکیه‌گاه مفصلی در دو طرف به کمک نرم‌افزار ممتیکا<sup>۲</sup> انجام گرفته است. چون ضخامت تیر و صفحات بعد از تغییر شکل ثابت فرض شده است معادلات حاکم بر تیر بر اساس نظریه تیر تیموشینکو به دست آمده است. سپس با استفاده از اصل همپلتون و روش ریتز، کمانش و خمش استاتیکی تیر محاسبه گردیده است. تأثیر توزیع تخلخل بر عملکرد ساختاری تیر، تأثیر قابل توجهی در طراحی تخلخل‌ها برای دستیابی به مقاومت کمانش و رفتار خمشی دارد و جنبه نوآوری این مطالعه با توجه به مقالات مرجع، بررسی کمانش و خمش تیر متخلخل مدرج تابعی با توجه به الگوهای توزیع تخلخل مشخص و مقایسه حالت‌های مختلف تیرها است.

<sup>۱</sup> Microlates<sup>۲</sup> Mathematica

## ۲- تیر متخلخل تابعی

تیر متخلخل تابعی با طول  $L$  و ضخامت  $h$  با دو نوع توزیع تخلخل مشخص در جهت ضخامت در این قسمت معرفی می‌شود. این تیر در یک سیستم مختصات کارتزین با محور  $z$  در جهت ضخامت و محور  $x$  در جهت طول در شکل ۱ به تصویر کشیده شده است. هر دو توزیع تخلخل دارای حداکثر و حداقل مقادیر یکسان مدول الاستیک و چگالی جرمی هستند. در توزیع تخلخل نوع اول، شکل ۱-الف، حداقل مقادیر در خط میانی تیر که منافذ داخلی دارای بزرگ‌ترین اندازه و بیشترین تراکم هستند، وجود دارد و حداکثر مقادیر در سطوح بالایی و پایینی تیر است که برابر با مقادیر تیرهای همگن ساخته شده از ماده خالص است. در توزیع تخلخل نوع دوم، شکل ۱-ب، مدول‌های الاستیسیته و چگالی جرم حداکثر در سطح بالا و حداقل مقادیر در سطح پایین هستند.



شکل ۱ الگوی توزیع تخلخل تیر، الف) توزیع تخلخل متقارن، ب) توزیع تخلخل نامتقارن

با توجه به توزیع تخلخل غیریکنواخت، مدول یانگ،  $E$  مدول برشی،  $G$  مدول برشی و چگالی جرمی برای توزیع تخلخل نوع اول (توزیع متقارن) به صورت روابط ۱ تا ۳ و برای توزیع تخلخل نوع دوم (توزیع نامتقارن) به صورت روابط ۴ تا ۶ تعریف شده است [۱۰]:

$$E(z) = E_1[1 - e_0 \cos(\pi \zeta)] \quad (۱)$$

$$G(z) = G_1[1 - e_0 \cos(\pi \zeta)] \quad (۲)$$

$$\rho(z) = \rho_1[1 - e_m \cos(\pi \zeta)] \quad (۳)$$

$$E(z) = E_1[1 - e_0 \cos(\frac{\pi}{2} \zeta + \frac{\pi}{4})] \quad (۴)$$

$$G(z) = G_1[1 - e_0 \cos(\frac{\pi}{2} \zeta + \frac{\pi}{4})] \quad (۵)$$

$$\rho(z) = \rho_1[1 - e_m \cos(\frac{\pi}{2} \zeta + \frac{\pi}{4})] \quad (۶)$$

در روابط ۱ تا ۶،  $\zeta = \frac{z}{h}$  است و ضریب تخلخل به صورت  $1 - \frac{E_0}{E_1} = 1 - \frac{G_0}{G_1}$  تعریف می‌شود که  $0 < e_0 < 1$  می‌باشد. پایین‌نویس‌های ۰ و ۱ به ترتیب کمترین و بیشترین مقادیر را نشان می‌دهند. از نظر فیزیکی مقدار  $E_1$  مدول یانگ در سطوح بالا و پایین تیر ( $z = \pm \frac{h}{2}$ ) در توزیع تخلخل نوع اول و در توزیع تخلخل نوع دوم مدول یانگ سطح بالایی تیر ( $z = \frac{h}{2}$ ) را نشان می‌دهد. رابطه ۷ ارتباط بین مدول یانگ و مدول برشی را نشان می‌دهد. در این تحلیل ضریب پواسون برای کل ماده یکسان در نظر گرفته شده است.

$$G_i = \frac{E_i}{2(1 + \nu)} \quad (i = 0, 1) \quad (۷)$$

## ۳- معادلات حاکم

در این پژوهش از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول یا همان تئوری تیموشنکو برای تیرها استفاده شده است. با توجه به ناهمگن بودن مسئله از اثر برش در راستای ضخامت نمی‌توان صرف‌نظر نمود، لذا از این تئوری برای این تحلیل استفاده شده است. با توجه به تئوری تیر تیموشنکو، میدان جابجایی به صورت رابطه ۸ برای محاسبه اثر کرنش برشی عرضی تیر استفاده می‌شود. این کرنش در جهت ضخامت ثابت و تنها تابع  $x$  است.

$$\begin{cases} u(x, z, t) = u_0(x, t) + z\phi_x(x, t) \\ w(x, z, t) = w_0(x, t) \end{cases} \quad (۸)$$

$u_0$  و  $w_0$  به ترتیب جابجایی محوری و عرضی در مرکز تیر و  $\phi_x$  چرخش سطح مقطع تیر را مشخص می‌کند. روابط ۹ و ۱۰، روابط کرنش-جابجایی خطی تیر را تعریف می‌کند. در این معادلات،  $\varepsilon_{xx}$  کرنش نرمال و  $\gamma_{xz}$  کرنش برشی می‌باشد.

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \quad (۹)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \quad (۱۰)$$

روابط تنش-کرنش در روابط ۱۱ تا ۱۳ تعریف شده است.  $Q$  تابعی از  $E$  (مدول یانگ) و  $\nu$  (ضریب پواسون) است.

$$\sigma_{xx} = Q_{11}(z) \times \varepsilon_{xx} \quad (۱۱)$$

$$\sigma_{xz} = Q_{55}(z) \times \gamma_{xz} \quad (۱۲)$$

$$Q_{11}(z) = \frac{E(z)}{1 - \nu^2}; \quad Q_{55}(z) = G(z) = \frac{E(z)}{2(1 + \nu)} \quad (۱۳)$$

با جایگذاری روابط ۹ تا ۱۳ در معادله انرژی کرنشی  $U$  و سپس استفاده از رابطه ۸، انرژی کرنشی تیر متخلخل از رابطه ۱۴ به دست می‌آید:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{xz}\gamma_{xz}) dz dx = \frac{1}{2} \int_0^L \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left( \frac{E(z)}{1 - \nu^2} \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right)^2 + \frac{E(z)}{2(1 + \nu)} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \right)^2 \right) dz dx \quad (۱۴)$$

بارگذاری تیر یکی به صورت عرضی در راستای محور  $z$  و دیگری در راستای طول تیر در نظر گرفته شده است. کار انجام شده در اثر این بارگذاری در رابطه ۱۵ آورده شده است:

$$V = \int_0^L \left[ \frac{1}{2} N_{x0} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 + Q w_0 \right] dx \quad (۱۵)$$

در معادله فوق  $N_{x0}$  نیروی محوری در راستای تیر و  $Q$  بار توزیع شده عرضی بر صفحه بالایی تیر ( $z = \frac{h}{2}$ ) را نشان می‌دهد. طبق اصل همیلتون انرژی کل تیر متخلخل بر اساس اختلاف انرژی کرنشی و کار به دست می‌آید و به صورت رابطه ۱۶ بیان می‌شود:

$$\Pi = U - V \quad (۱۶)$$

توابع مجهول رابطه ۸ و مقادیر بار بحرانی کمانش با استفاده از روش ریتز به دست می‌آید. جهت به دست آوردن جابجایی تیر از توابع سعی به شکل چندجمله‌ای‌های جبری به صورت رابطه ۱۷ که شرایط مرزی تیر دوسر مفصل را ارضا می‌کند، استفاده می‌شود. این توابع با توزیع مشخص و ضرایب مجهول به عنوان پاسخی برای معادلات حاکم در نظر گرفته می‌شود.

$$\begin{cases} u(x) = \sum_{j=1}^N A_j x^j (1-x) \\ w(x) = \sum_{j=1}^N B_j x^j (1-x) \\ \phi(x) = \sum_{j=1}^N C_j x^{j-1} \end{cases} \quad (۱۷)$$

$N$  تعداد چندجمله‌ای‌های ساده جبری را نشان می‌دهد که با تغییر تعداد آن مدهای مختلف کمانش به دست می‌آید و ضرایب  $A_j$ ،  $B_j$  و  $C_j$  مقادیر مجهول هستند. با توجه به اصل ریتز جهت به دست آوردن این ضرایب از انرژی کل مطابق با رابطه

۱۸ نسبت به هرکدام از ضرایب مشتق گرفته و برابر با صفر قرار می‌دهیم تا مقدار انرژی مینیمم شود:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial A_j} = 0, \frac{\partial \Pi}{\partial B_j} = 0, \frac{\partial \Pi}{\partial C_j} = 0 \quad (18)$$

رابطه ۱۸، یک دستگاه معادلات جبری می‌باشد که با حل این دستگاه ضرایب مجهول به دست می‌آیند. برای پاسخ غیر صفر این دستگاه روابط جبری، دترمینان ضرایب برابر با صفر می‌باشد. پاسخ این مرحله برابر با بار بحرانی کمانش تیر متخلخل به دست می‌آید. برای محاسبه مقاومت خمشی تیر مقدار  $N_{x0}$  در رابطه ۱۵ را صفر در نظر گرفته و پس از مشتق‌گیری و تشکیل دستگاه معادلات و حل آن، مقدار جابجایی عرضی تیر و در نهایت مقدار خمش تیر متخلخل نیز محاسبه می‌شود. مقدار بار بحرانی بی‌بعد شده کمانش از تقسیم نیروی محوری بر اجزای ماتریس سختی تیر همگن طبق رابطه ۱۹ به دست می‌آید و با  $P_{Cr}$  نشان داده شده است:

$$P_{Cr} = \frac{N_{x0}}{\frac{E_1 h}{1-\nu^2}} = \frac{N_{x0}(1-\nu^2)}{E_1 h} \quad (19)$$

در این پژوهش فوم فولادی با خواص ذکر شده در جدول ۱ در نظر گرفته شده است.

جدول ۱ مشخصات فوم فولادی [۱۰]

مقدار	خواص
۷۸۵۰ kg/m <sup>3</sup>	چگالی $\rho$
۲۰۰ GPa	مدول یانگ اولیه $E$
۰/۳۳۳	ضریب پواسون $\nu$
۱۰۰۰۰ N/m <sup>2</sup>	نیروی توزیعی وارده $Q$

#### ۴- نتایج

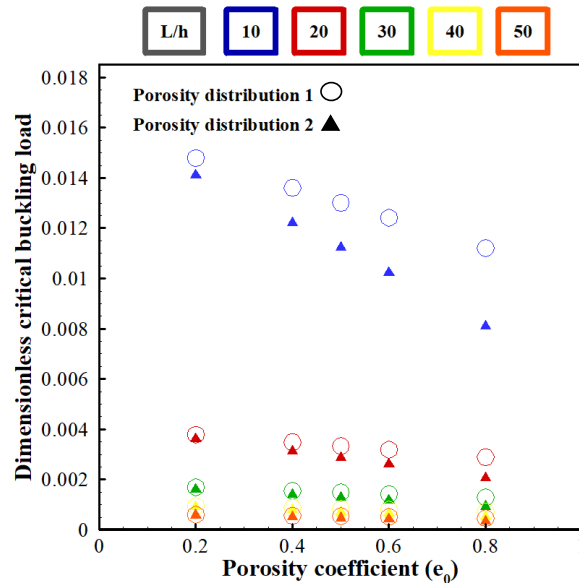
با حل دستگاه معادلات جبری رابطه ۱۸ بار بحرانی تیر متخلخل مدرج تابعی با شرط مرزی دو سر مفصل محاسبه شده است. با تغییر تعداد چندجمله‌ای‌ها، مدهای مختلف کمانش به دست می‌آید. با توجه به نتایج جدول ۲، مقدار نیروی محوری  $N_{x0}$  و بار بحرانی بی‌بعد شده  $P_{Cr}$  در مد ششم ( $N=6$ ) همگرا شده است. جهت اعتبارسنجی، نتایج به‌دست‌آمده با نتایج مقاله [۱۰] مقایسه شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود نتایج به‌خوبی با یکدیگر مطابقت دارند؛ بنابراین کلیه محاسبات این مقاله با  $N=6$  انجام شده است.

جدول ۲ مقدار بار بحرانی تیر متخلخل نسبت به افزایش تعداد چندجمله‌ای‌ها

$N$	$N_{x0}$	$P_{Cr}$	
۲	۴/۵۵۸۱۸×۱۰ <sup>۷</sup>	۰/۰۰۴۰۵۱۷	نتایج مقاله [۱۰]
		۰/۰۰۴۰۵۱۷۲	نتایج روش حاضر
۴	۳/۷۵۸۱۶×۱۰ <sup>۷</sup>	۰/۰۰۳۳۴۰۶	نتایج مقاله [۱۰]
		۰/۰۰۳۳۴۰۵۹	نتایج روش حاضر
۶	۳/۷۵۶۰۹×۱۰ <sup>۷</sup>	۰/۰۰۳۳۳۸۷	نتایج مقاله [۱۰]
		۰/۰۰۳۳۳۸۷۵	نتایج روش حاضر
۸	۳/۷۵۶۰۹×۱۰ <sup>۷</sup>	۰/۰۰۳۳۳۸۷	نتایج مقاله [۱۰]
		۰/۰۰۳۳۳۸۷۵	نتایج روش حاضر
۱۰	۳/۷۵۶۰۹×۱۰ <sup>۷</sup>	۰/۰۰۳۳۳۸۷	نتایج مقاله [۱۰]
		۰/۰۰۳۳۳۸۷۵	نتایج روش حاضر

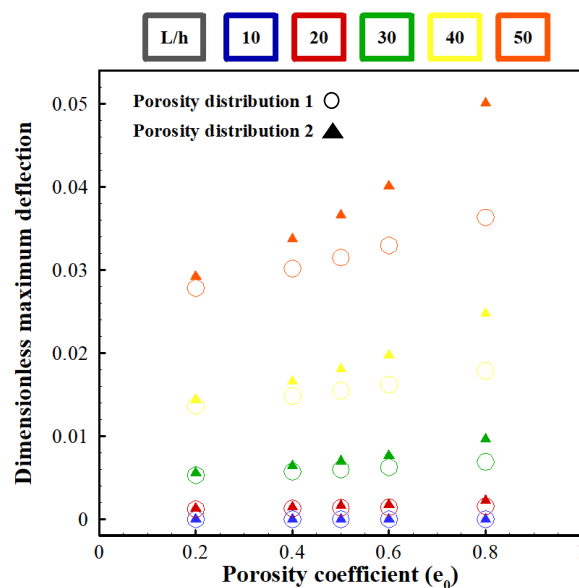
شکل ۲، نمودار تیر متخلخل مدرج تابعی را در دو حالت توزیع تخلخل متقارن و توزیع تخلخل نامتقارن، با توجه به تغییرات نسبت باریکی و تغییرات ضریب تخلخل نشان می‌دهد. افزایش ضریب تخلخل و افزایش نسبت باریکی تیر منجر به کاهش بار بحرانی کمانش می‌شود. هرچه نسبت باریکی کمتر باشد، افزایش ضریب تخلخل روی بار بحرانی اثر بیشتری دارد. همچنین در این نمودار توزیع تخلخل متقارن نسبت به توزیع تخلخل نامتقارن از مقاومت کمانشی بزرگ‌تری برخوردار است. این مقاومت در نسبت‌های باریکی بزرگ‌تر، کمتر خود را نشان می‌دهد؛ بنابراین همان‌طور که انتظار می‌رود، منافذ داخلی باعث

کاهش سختی مؤثر تیرها و افزایش نسبت باریکی باعث کاهش مقاومت کمانش در تیرها می‌شود.



شکل ۲ نمودار اثرات ضریب تخلخل و نسبت باریکی بر بار بحرانی کمانش بدون بعد تیرهای متخلخل مدرج تابعی

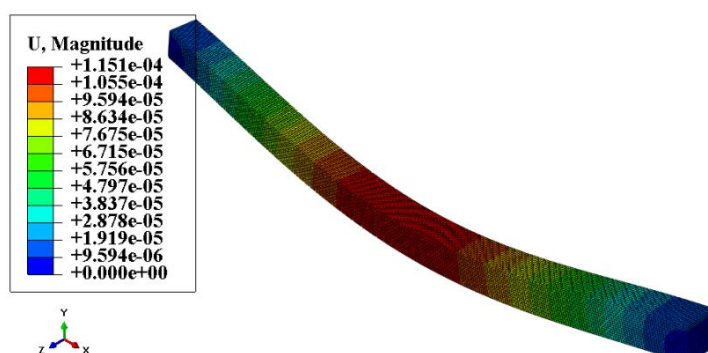
شکل ۳ نمودار اثرات ضریب تخلخل و نسبت باریکی را بر بیشترین انحراف بدون بعد تیرهای متخلخل تحت بار یکنواخت در دو حالت توزیع متقارن و نامتقارن نشان می‌دهد. انحراف بی‌بعد از تقسیم مقدار جابجایی عرضی بر مقدار ارتفاع تیر به دست می‌آید. همان‌طور که نمودار نشان می‌دهد بیشترین مقدار انحراف و جابجایی زمانی رخ می‌دهد که ضریب تخلخل دارای بیشترین مقدار ( $e_0=0.8$ ) است و مقدار انحراف در الگوی توزیع تخلخل نامتقارن نسبت به حالت متقارن بیشتر است. نوع توزیع تخلخل در نسبت باریکی‌های کمتر تقریباً هیچ اثری ندارد و هر دو حالت به صورت یکسان عمل می‌کنند، درحالی‌که در نسبت باریکی‌های بزرگ‌تر هر چه میزان تخلخل افزایش یابد، مقدار اختلاف بین دو حالت توزیع متقارن و نامتقارن بیشتر دیده می‌شود و توزیع تخلخل متقارن نسبت به توزیع نامتقارن در برابر خمش مقاومت بیشتری نشان می‌دهد. همچنین تغییرات شیب مقدار انحراف در نسبت‌های باریکی کمتر در طول افزایش ضریب تخلخل در مقایسه با نسبت باریکی بزرگ‌تر، تقریباً ثابت است.



شکل ۳ نمودار تأثیر ضریب تخلخل و نسبت باریکی بر حداکثر انحراف بدون بعد تیر تحت بار توزیعی یکنواخت

با توجه به این دو نمودار می‌توان نتیجه گرفت توزیع تخلخل متقارن نسبت به توزیع تخلخل نامتقارن از مقاومت خمشی بیشتر و ظرفیت کمانش بزرگ‌تری برخوردار است و هرچه نسبت باریکی تیر کمتر و دارای تخلخل بیشتر در قسمت میانی خود باشد، در اثر اعمال نیرو ضعیف‌تر برخورد خواهد کرد. در نتیجه در ساخت ساختارهایی که استحکام از اهمیت بالاتری برخوردار است، نمی‌توان از تیرهایی با این ویژگی استفاده کرد.

خمش استاتیکی تیر متخلخل، با الگوی توزیع تخلخل متقارن تحت تأثیر نیروی توزیعی یکنواخت در نرم‌افزار المان محدود آباکوس شبیه‌سازی شده است. در این مدل‌سازی، تخلخل نوع اول اعمال شده و جهت تعریف آن، سابروتین یومت<sup>۳</sup> به کار برده شده است. المان‌بندی نیز با در نظر گرفتن المان‌هایی از جنس فولاد (با خواص ذکر شده در جدول ۱)، ضریب تخلخل ۰/۵ و نسبت باریکی ۲۰ انجام شده است. پس از انجام همگرایی مش، تیر با ۹۶۲۳۷ المان شش‌وجهی تقسیم شد. همان‌طور که در شکل ۴ نشان داده شده است، برای دو طرف تیر، شرط مرزی تکیه‌گاه مفصلی اعمال شده است؛ در نتیجه، جابجایی تیر در لبه‌ها برابر صفر می‌باشد. مقایسه نتایج تحلیلی و عددی مسئله در شرایط اعمال بار توزیعی یکنواخت در جدول ۳ نشان داده شده است. اختلاف بین نتایج عددی و تحلیلی ۱۵/۸۶ درصد است.



شکل ۴ شبیه‌سازی خمش استاتیکی تیر متخلخل تابعی تحت تأثیر نیروی توزیعی یکنواخت با نرم‌افزار المان محدود،  
( $e_0 = 0/5$  و  $L/h = 20$ )

جدول ۳ مقایسه نتایج مقدار ماکزیمم انحراف تیر

نتیجه حاصل از کد ممتیکا	۰/۰۰۱۳۶۸
نتیجه حاصل از شبیه‌سازی آباکوس	۰/۰۰۱۱۵۱

نتیجه حائز اهمیت و کاربرد اصلی این پژوهش، امکان استفاده از آن در مدل‌سازی در روش‌های نوین ساخت همانند روش‌های ساخت افزایشی است. با انجام این مدل‌سازی، می‌توان مناسب‌ترین هندسه و نحوه توزیع تخلخل را برای کاربردهایی مانند داربست‌های استخوانی جهت ترمیم و رشد استخوان، شبیه‌سازی و محاسبه نمود و مناسب‌ترین نتیجه را در عمل بکار برد تا امکان تحمل وزن و حرکات اعضای بدن دوباره برای بافت استخوانی مهیا شود. با انجام این پژوهش این نتیجه دریافت شد که اگرچه با افزایش ضریب تخلخل و نسبت باریکی مقاومت کمانشی و ظرفیت خمش کاهش می‌یابد؛ اما نحوه توزیع تخلخل نقش مهمی را ایفا می‌کند زیرا سرعت و کارایی برخی فرآیندهای بازسازی به سختی مدل بستگی دارد. برای مثال سازه‌های نرم‌تر در فرآیند استخوان‌سازی فرآیند بهبود را تقویت می‌کنند [۱۱]. در نتیجه با استفاده از نمودارها و در نظر گرفتن شرایط می‌توان مدل‌سازی و طراحی مورد نیاز را انجام داد.

## ۵- نتیجه‌گیری

در این پژوهش کمانش الاستیک و خمش استاتیک تیرهای متخلخل مدرج تابعی با توزیع تخلخل مشخص مورد بررسی قرار گرفت. فرمول‌بندی مسئله با استفاده از تیر تیموشینکو و اصل همپلتون به دست آمد و از روش ریتز برای به دست آوردن بار بحرانی کمانش و انحراف عرضی استفاده شد. نتایج عددی در مورد تأثیر ضریب تخلخل و نسبت باریکی بر بار بحرانی

<sup>3</sup> Subroutine UMAT

کمانش و حداکثر انحراف نشان می‌دهد: (۱) افزایش ضریب تخلخل و نسبت باریکی منجر به کاهش بار بحرانی کمانش تیرهای متخلخل تابعی می‌شود. (۲) حداکثر انحراف برای تیرهای متخلخل با افزایش ضریب تخلخل و نسبت باریکی افزایش می‌یابد. با کاهش ضریب تخلخل، تیر متراکم‌تر شده در نتیجه تیر مقدار بار بیشتری را تحمل می‌کند. (۳) الگوی توزیع تخلخل تأثیر قابل توجهی در کمانش و رفتار خمشی تیر دارد. در مقایسه با الگوی توزیع نامتقارن، توزیع متقارن ظرفیت کمانش و مقاومت خمشی بهتری را ارائه می‌دهد. در نسبت باریکی بزرگ‌تر، نحوه توزیع تخلخل نقش مهم‌تری در برابر رفتار خمشی و مقاومت کمانشی ایفا می‌کند. در نهایت با توجه به اهداف و کاربرد مدل مورد نظر می‌توان نوع توزیع تخلخل مناسب را انتخاب نمود. اثر تغییرات ضریب تخلخل، تغییرات نسبت باریکی تیر و نوع توزیع تخلخل، بر خمش استاتیک و بار بحرانی کمانش در طراحی مواردی همانند داربست‌های استخوانی اهمیت دارد زیرا هم نیاز به تخلخل کافی جهت رشد استخوان و هم استقامت کافی در برابر بارگذاری‌های فشاری و خمشی نقش مهمی ایفا می‌کند.

## ۶- مراجع

- [1] Rabiei A, Vendra L. A comparison of composite metal foam's properties and other comparable metal foams. *Materials Letters*. 2009;63:533-536.
- [2] Lim T J, Smith B, McDowell D L. Behavior of a random hollow sphere metal foam. *Acta Materialia*. 2002;50:2867-2879.
- [3] Smith B H, Szyntowski S, Hajjar J F, Schafer B W, Arwade S R. Steel foam for structures: A review of applications, manufacturing and material properties. *Journal of Constructional Steel Research*. 2012;71:1-10.
- [4] Cardoso E, Oliveira B. Study of the use of metallic foam in a vehicle for an energy-economy racing circuit. *Materialwissenschaft Und Werkstofftechnik*. 2010;41:257-264.
- [5] Raj S V, Ghosn L J, Lerch B A, Hebsur M, Cosgriff L M, Fedor J. Mechanical properties of 17-4PH stainless steel foam panels. *Materials Science and Engineering: A*. 2007;456:305-316.
- [6] Banhart J. Manufacture, characterisation and application of cellular metals and metal foams. *Progress in materials science*. 2001;46:559-632.
- [7] Ke L L, Yang J, Kitipornchai S, Bradford M A. Bending, buckling and vibration of size-dependent functionally graded annular microplates. *Composite structures*. 2012;94:3250-3257.
- [8] Magnucka-Blandzi E, Magnucki K. Effective design of a sandwich beam with a metal foam core. *Thin-Walled Structures*. 2007;45:432-438.
- [9] Bikakis G S, Kalfountzos C D, Theotokoglou E E. Elastic buckling response of rectangular GLARE fiber-metal laminates subjected to shearing stresses. *Aerospace Science and Technology*. 2019;87:110-118.
- [10] Chen D, Yang J, Kitipornchai S. Elastic buckling and static bending of shear deformable functionally graded porous beam. *Composite Structures*. 2015;133:54-61.
- [11] Pobloth A M, Checa S, Razi H, Petersen A, Weaver J C, Schmidt-Bleek K, Windolf M, Tatai A Á, Roth C P, Schaser K D, Duda G N. Mechanobiologically optimized 3D titanium-mesh scaffolds enhance bone regeneration in critical segmental defects in sheep. *Science translational medicine*. 2018;10(423).